QUINTO POSTULADO E INFINITO: UMA ABORDAGEM ESTÉTICA A PARTIR DOS ARABESCOS DE GIORDANO BRUNO

Gadafy de Matos Zeidam*

Resumo: Este artigo destaca a influência da estética árabe no pensamento de Giordano Bruno. Os arabescos presentes na obra do pensador italiano, precursor, como Digges, do infinito no Ocidente, revelam o conhecimento da matemática árabe, que fez a conciliação da geometria grega, refratária ao infinito, com a aritmética hindu, familiar ao infinito. Neste novo contexto cosmológico, do espaço infinito a substituir o cosmos esférico finito, o Quinto Postulado deixa de apresentar-se problemático apenas por sua escrita destoante (a crítica estética), para passar a ser objeto de tentativas de demonstração (a crítica técnica). Portanto, pensar na introdução do infinito como um elemento cultural do ocidente não é apenas percorrer a história da matemática, mas também procurar pistas estéticas na arte, na filosofia, na literatura etc.

Palavras-Chaves: Arabescos, Quinto Postulado, Geometria, Infinito.

FIFTH POSTULATE AND INFINITY: AN AESTHETICAL APROACH FROM GIORDANO BRUNO'S ARABESQUES

Abstract: This paper emphasizes the influence of the Arabic aesthetics on the thought of Giordano Bruno. The Islamic patterns present in the work of the Italian philosopher, who is herald of the infinity in the West, like Digges, discloses the knowledge of Arabic mathematics, wich conciliated the Greek geometry, refractory to infinity, and the Hindu arithmetic, close to infinity. In this new cosmological context, when the infinite space replaces the finite spherical cosmos, the Fifth Postulate is no more questionable just by its odd written (the aesthetical review), it becomes the target of attempts of proof. Therefore, thiking of introduction of the infinity as an ocidental cultural element is not only wander the history of Math, but likewise searchig for aesthetic indications in the Art, Philosophy, Literature etc.

Keywords: Islamic Patterns, Fifth Postulate, Geometry, Infinity.

É consenso entre os matemáticos que o Quinto Postulado revela-se como o aspecto especialmente problemático do longo reinado de Euclides sobre o pensamento ocidental. Também conhecido

* Mestre em Filosofia pela Universidade Federal do Piauí: gadafy@oi.com.br

como Postulado das Paralelas, ele consta no Livro I dos Elementos[139], logo após as definições e os primeiros quatro postulados:

Se duas retas (BB' e CC') pertencentes a um mesmo plano são cortadas por outra (AA'), e se a soma dos ângulos internos (D + E) de um lado é menor do que dois ângulos retos (180º), então, as retas cortadas, quando prolongadas, irão encontrar-se neste lado, cuja soma dos ângulos internos é menor do que dois ângulos retos.

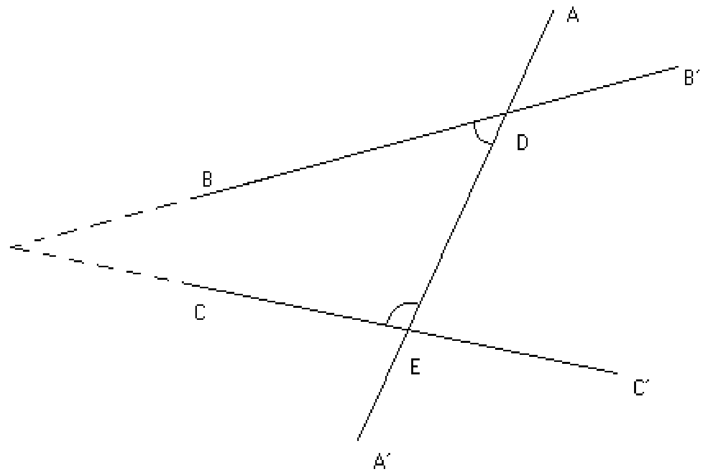

Figura 1. A Versão Original de Euclides para o Postulado das Paralelas

A escrita original de Euclides para o Quinto Postulado é muito destoante da escrita dos quatro primeiros postulados[140]. Não é um postulado evidente, pois envolve muitas definições (reta, ângulo, ângulo reto), uma operação aritmética (soma) e uma comparação.

Um bom sistema axiomático (consistente, completo e econômico) deve ter princípios[141] simples e naturalmente evidentes, a partir dos quais serão efetuadas as demonstrações das demais

[139] As referências aos *Elementos*, de Euclides, serão feitas preferencialmente pela tradução brasileira de Irineu Bicudo, São Paulo: Unesp, 2009. Subsidiariamente pela tradução já consagrada de Sir Thomas Little Heath, New York: Dover, 1956.

[140] Os outros quatro postulados são: 1) traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto; 2) também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta; 3) com todo centro e distância, descrever um círculo; 4) serem iguais entre si todos os ângulos retos. "The form of statement of the postulate is long and awkward compared with that of the others, and its obviousness thereby lessened". LEWIS Florence P. History of the Parallel Postulate. **The American Mathematical Monthly**, v.27, n.1, jan/1920, pp.16-23. p. 16.

[141] Pode-se igualmente denominar os princípios de axiomas ou proposições de grau zero.

proposições. Ao destoar com a escrita do Quinto Postulado, Euclides dá ensejo a séculos de atenção das melhores mentes matemáticas.

O Livro I dos *Elementos*, que apresenta os fundamentos de sua geometria plana, contém 23 definições, 5 postulados e 5 noções comuns[142], de onde seguem 48 proposições. "As definições, noções comuns e postulados são tomados como os pontos de partida a partir dos quais outras afirmações, chamadas de proposições, são demonstradas segundo rígidas regras lógicas[143]". Certamente, o Postulado das Paralelas não é um bom axioma, pois mais parece uma proposição do tipo teorema do que um postulado.

> Como se pode perceber, há uma disparidade entre alguns postulados com relação ao modo como são enunciados. Vê-se que alguns são formulados como comandos, ordens, e outros possuem um caráter descritivo, explanatório. Estas diferenças se fazem notar também nas proposições demonstradas a partir deles. Aquelas que se assemelham a comandos são chamadas problemas, e as proposições descritivas são chamadas teoremas. A primeira proposição do primeiro livro é um exemplo de problema (Prop. I.1: 'Construir um triângulo equilátero sobre uma linha reta finita dada'); e a sexta proposição do mesmo livro é um exemplo de teorema (Prop. I.6: 'Se em um triângulo dois ângulos são iguais entre si, então os lados opostos aos ângulos iguais também serão iguais entre si')[144].

Euclides parece estar consciente disso, tanto que posterga a aplicação de seu problemático Quinto Postulado, ou Postulado das Paralelas. Apenas na Proposição I.29[145], Euclides recorre ao Quinto Postulado. "Se a ordem é significante, ela indica que o autor não pretendeu primeiramente incluí-lo (o quinto postulado) entre os postulados, e que ele finalmente o fez apenas quando ou não poderia prová-lo ou não poderia prosseguir sem ele"[146]:

[142] Segundo Heath (1956). A tradução de Bicudo (2009) apresenta 9 noções comuns. N.C.1: Coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si. N.C.2: Se iguais são adicionados a iguais, os totais são iguais. N.C.3: Se iguais são subtraídos de iguais, os restos são iguais. N.C.4: Coisas que coincidem entre si são iguais entre si. N.C.5: O todo é maior que a parte.

[143] O'SHEA, Donal. *A Solução de Poincaré: em Busca da Forma do Universo*. Tradução Paulo Cezar Castanheira. Rio de Janeiro: Record, 2009. p. 69.

[144] VAZ, Bruno. A Concepção de Demonstração em Euclides e Hilbert. **Anais do V Simpósio Internacional Principia**, Florianópolis: NEL/UFSC, 2009. pp. 165-172. p.167.

[145] Proposição 29 do Livro I dos Elementos.

[146] "If the order is significant, it indicates that the author did not at first intend to include this among the postulates, and that he finally did so only when he found that he could neither prove it nor proceed without it". LEWIS Florence P. History of the Parallel Postulate. **The American Mathematical Monthly**, v.27, n.1, jan/1920, pp.16-23. p. 16. (N.T.)

Proposição I. 29 de Euclides: A reta [t], caindo sobre as retas paralelas [a//b], faz tanto os ângulos alternos iguais entre si quanto o exterior igual ao interior e oposto e os interiores e no mesmo lado iguais a dois retos.

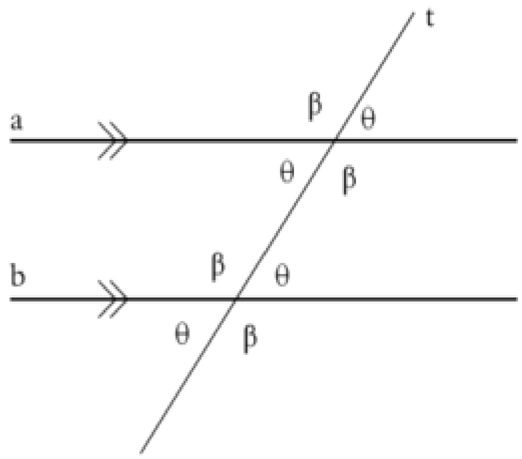

Figura 2. Proposição I.29 dos *Elementos*

Devido a sua escrita não-econômica, o Quinto Postulado esteve sob forte suspeita de muitos matemáticos. As críticas podem ser agrupadas em estéticas e técnicas. As primeiras buscam demonstrar que a escrita do postulado é imprópria, e, então, várias versões equivalentes foram propostas de maneira mais econômica, remontando a Proclo, no século V[147]. As críticas técnicas, por sua vez, tentam demonstrar que o conteúdo do postulado é redundante, ou seja, que o Postulado das Paralelas é logicamente necessário e pode ser deduzido dos outros axiomas da Geometria Euclideana.

Importante destacar que a crítica estética se dá no contexto da cosmologia clássica, do cosmos esférico finito, enquanto a crítica técnica inicia-se com os árabes, que incorporaram o infinito hindu à matemática ocidental. A passagem de uma crítica à outra ocorre, pois, quando os limites do cosmos são rompidos pelo infinito e a geometria euclidiana deixa de ser dedutiva para ser descritiva.

[147] "In modern textbooks it appears in a different version that was first formulated by Proclus in the 5th century". STAHL, Saul. *The Poincaré Half-Plane: a Gateway to Modern Geometry*. London: Jones and Bartlett, 1993, p.27.

Em outras palavras, no contexto do cosmos esférico finito, o espaço geométrico euclidiano era apenas uma hipótese matemática. Nesta geometria dedutiva, o Quinto Postulado é uma hipótese matemática que precisa ser assumida para a constituição de um todo coerente de proposições. As críticas se dão na forma como ele foi apresentado por Euclides, considerando a sua escrita destoante e não-econômica (crítica estética).

Já no contexto do espaço infinito, o espaço geométrico euclidiano deixa de ser apenas uma hipótese matemática, mas uma leitura necessária do espaço real. Na doravante geometria descritiva, o Quinto Postulado passa a ser um constituinte da própria natureza e parece bastante tentador buscar na própria geometria euclidiana a prova de sua verdade (a crítica técnica).

Apenas em 1868, após milênios de esforços matemáticos direcionados ao Quinto Postulado, Eugênio Beltrami demonstra finalmente a independência do Quinto Postulado frente aos outros axiomas de Euclides, cessando em grande parte a atenção dos matemáticos sobre a problemática do Quinto Postulado.

Voltando à cosmologia clássica, pode-se compreender a incompatibilidade entre o espaço real (cosmos esférico finito) e o espaço geométrico a partir da versão de Playfair para o Postulado das Paralelas. Essa é a versão mais famosa para o Quinto Postulado, que homenageia o matemático escocês John Playfair (1748-1819): dados a reta 'r' e o ponto 'P', só é possível traçar uma única reta paralela a 'r' passando por 'P'.

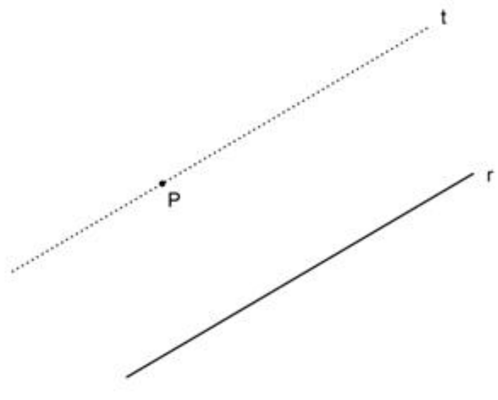

Figura 3. Versão de Playfair para o Quinto Postulado

Portanto, a menos que se defenda a tese um tanto quanto remota de que Euclides não partilhava da cosmologia prevalente de seu tempo[148] (o cosmos esférico finito da física platônico-aristotélica), faz-se necessário reconhecer a falta de identidade entre o espaço real e o espaço geométrico. Tomando-se a Definição 23 de Euclides: 'retas paralelas são retas que, pertencendo a um mesmo plano, não se encontram mesmo se prolongadas indefinidamente em ambas as direções', pode-se concluir que, se não há espaço além da esfera das estrelas, há não apenas uma, mas infinitas retas paralelas a uma reta 'r', que podem ser construídas passando por um ponto 'P' fora dessa reta.

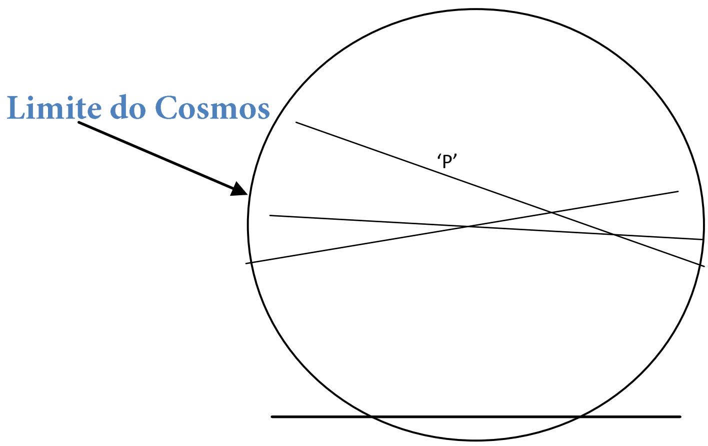

Figura 4. Incompatibilidade entre o Postulado das Paralelas e o Mundo Esférico Finito.

> Como não se sabe nada de Euclides como pessoa, a primeira possibilidade [assumir que o matemático Euclides rejeitava a cosmologia prevalente dos filósofos, ou seguia uma filosofia que sustentava ser o cosmos sem limite] não pode ser totalmente excluída; mas isso, no máximo, explicaria por que ele escreveu assim, não por que seu trabalho foi tão amplamente aceito e considerado adiante sem objeções neste aspecto pelos comentadores posteriores – nem por Ptolomeu, que de acordo com Proclo foi crítico da consideração do Quinto Postulado enquanto postulado, nem por Proclo, ele mesmo um platonista, nem por Simplício, o aristotélico. Devemos acrescentar que a mais renomada cosmologia infinita – a de Epicuro – era unida a um entendimento de geometria provavelmente muito ingênuo a alguém mais versado em matemática[149].

[148] Da vida de Euclides, pode-se inferir, com algum consenso entre os especialistas, que ele viveu no tempo do reinado de Ptolomeu I (306 – 283 a.C.). Não se pode olvidar, portanto, que no tempo de Euclides, Epicuro (341 – 271 a.C.) já estabelecera o infinito em sua Física, como se pode extrair da obra de Diógenes Laertios: "o todo é infinito, pois aquilo que é infinito tem uma extremidade, e a extremidade se vê somente em confronto com outra coisa. Ora: o todo não se vê em confronto com outra coisa, e portanto não tendo extremidade não tem limite, e por não ter limite deve ser infinito e ilimitado". *Vidas*, Livro X, 41.

[149] "Since we know nothing of Euclid as a person, the first possibility cannot be totally excluded [assume that Euclid the mathematician rejected the prevalent cosmology of the philosophers, or followed a philosophy which held the cosmos to be without limit]; but this would at most explain why he wrote as he did, not why

De fato, se não há espaço além da *ultima sphera mundi*, somente a hipótese teórica de um espaço geométrico infinito pode suportar que o Quinto Postulado seja enunciado. Parece claro para Aristóteles o conhecimento de uma formulação matemática muito próxima ao Postulado das Paralelas encontrado em Euclides[150], o que significa que os fundamentos da geometria euclidiana já estavam bem estabelecidos ao tempo do estagirita.

> Nossa abordagem não retira dos matemáticos a sua ciência, por refutar a existência atual do infinito na direção do acréscimo, no sentido da intransponibilidade. De fato, eles não precisam do infinito e não fazem uso dele. Eles apenas postulam que linhas retas finitas possam ser produzidas tão longas quanto eles desejem[151].

Vale ressaltar que a geometria grega, numa tradição que remonta à escola jônica, com Tales de Mileto, ao contrário da tradição geométrica egípcia, foi descolada da realidade, da resolução de problemas de agrimensura, e tornada abstrata a partir de teoremas gerais descritos com objetos ideais. Tais objetos, mesmo que intuitivamente próximos da realidade sensível, a ela não pertencem, pois não existem sólidos ou figuras rigorosamente perfeitos, ou geométricos.

Para os gregos, era inegável a sua realidade metafísica enquanto objetos singulares, o que não significa a realidade de uma geometria *in toto* enquanto constituinte do cosmos, o que pressuporia a incorporação do infinito ao espaço real.

> A natureza de um ponto – a origem simples e auto-evidente da geometria – é em si um mistério: é possível que um ponto 'não tenha dimensão', exceto se for um ponto metafísico, e como ele pode ocupar 'lugar' se o espaço ainda não foi criado de seu desdobramento? Claramente deve haver uma diferenciação precisa entre

---

his work was so widely accepted and called forth no objections from later commentators on this account – neither from Ptolemy, who according to Proclos was critical of taking the fifth postulate as a postulate, nor from Proclos the Platonist himself, nor from Simplicios the Aristotelian.We may add that the most renowned infinite cosmology – that of Epicuros – was coupled to an understanding of geometry that was probably much too naive to appeal to anybody versed in mathematics". HOYRUP, Jens. Existence, Substantiality, and Counterfactuality: Observations on the Status of Mathematics according to Aristotle, Euclid and Others. Paper presented to the meeting on **Existence in Mathematics**. University of Roskilde, p. 1-30, nov. 2000, p. 19. (N.T.)

150 É conveniente lembrar que Euclides é posterior a Platão (427-347 a.C.) e anterior a Arquimedes (287-212 a.C.).

151 "Our account does not rob the mathematicians of their science, by disproving the actual existence of the infinite in the direction of increase, in the sense of the untraversable. In point of fact they do not need the infinite and do not use it. They postulate only that the finite straight line may be produced as far as they wish". *Physics, Book III, Part 7,* by Hardie and Gaye, disponível em <http://classics.mit.edu/Aristotle/physics.html>. (N.T.)

> física e metafísica, entre ideia e expressão, mesmo que ambas estejam entrelaçados por uma única realidade[152].

Nesse sentido, não é impróprio inferir que Euclides possa ter incorporado o Quinto Postulado enquanto hipótese metafísica necessária de seu sistema geométrico, sem correspondência com a realidade cosmológica prevalente de seu tempo (platônico-aristotélica). Antes do universo infinito, não há como tentar promover uma crítica técnica ao Postulado das Paralelas, cabendo tão somente críticas estéticas.

Aristóteles, nos *Primeiros Analíticos*, obra que talvez preceda, em muito, à sistematização dos *Elementos*, foi o mais perspicaz dos antigos, ao declarar que é impossível demonstrar a existência das paralelas, havendo necessidade apenas de sua incorporação teórica ao espírito especulativo da geometria grega.

> Por exemplo, se alguém quer provar A através de B, e B através de C, mas C é de tal modo que será provado por meio de A (então resulta que aqueles que deduzem desta maneira provam A através dele mesmo). Isto se dá justamente com aqueles que tentam provar que existem paralelas; para eles não ocorre que eles mesmos assumem tais premissas, onde não é possível demonstrar que não existem paralelas[153] (65a2-7).

Em outras palavras, antes da identidade entre o espaço real e o espaço geométrico, como física (o cosmos esférico finito) e metafísica (o espaço geométrico infinito), ideia (o objeto especulado pela geometria) e expressão (o objeto desenhado) possuem uma diferenciação precisa, mesmo que compondo uma única realidade, as aversões ao Quinto Postulado possuem uma natureza estética.

Assim, tomando por base o testemunho de Aristóteles, o que os antigos fizeram foi tentar reposicionar o Quinto Postulado à categoria de teorema, buscando demonstrá-lo mediante a sua

---

[152] "The nature of a point – the simple, self-evident origin of geometry – is one such mystery: is it possible that a point 'has no dimension', except that it be a metaphysical point, and how can it occupy 'place' if space has not yet been created from its unfolding? Clearly there has to be a precise differentiation between physical and metaphysical, between idea and expression, yet both are embraced by one reality". CRITCHLOW, Keith. *Islamic Patterns: An Analytical and Cosmological Approach.* Foreword by Seyyed Hossein Nasr. London: Thames & Hudson, 1983, p.7. (N.T.)

[153] "For example, if someone should prove A through B and B through C, but C were of such a nature as to be proved by means of A (for it results that those who deduce in this way prove A through itself). This is just what those people who think they draw proofs that there are parallels do; for they do not notice that they themselves take the sorts of premises which it is not possible to demonstrate if there are no parallels". *Prior Analytics.* Translation, with introduction and notes by Robin Smith. Indianopolis: Hackett, 1989. (N.T.)

substituição por outro postulado, mais econômico, o qual, por sua vez, implicitamente (circularmente) admitia a hipótese do paralelismo.

O panorama crítico do Postulado das Paralelas muda, contudo, após a incorporação do infinito ao universo, que ocorre inicialmente com os árabes, através da religião e da matemática hindus, e, somente após alguns séculos, entre os europeus, com Thomas Digges (1576) e Giordano Bruno (1584).

Doravante, o Quinto Postulado deixa de ser uma hipótese incorporada para a constituição harmônica do espaço geométrico, para integrar-se enquanto estruturante real do espaço físico moderno, não mais concebido enquanto cosmos esférico finito, mas como um todo contínuo: o universo infinito, contínuo, homogêneo e isótropo.

Dessa constatação, surgiu a necessidade, entre os matemáticos, de demonstrar que o Postulado das Paralelas é uma decorrência lógica não apenas da geometria euclidiana, mas do próprio universo (crítica técnica), sem que para tanto, outro axioma mais econômico precisasse ser assumido (a anterior crítica estética). A crítica técnica, pois, representa as inúmeras tentativas dessa demonstração, e de suas frustradas tentativas irão resultar o desenvolvimento das geometrias não-euclidinas.

Assim, enquanto a crítica estética propõe a substituição da versão original do Quinto Postulado por uma versão mais econômica, mais próxima a um princípio, a crítica técnica propõe a redundância do Postulado das Paralelas. No contexto da crítica estética, além da versão já apresentada de Playfair (cf. Figura 3), existem muitas versões equivalentes, as quais procuram simplificar a escrita de Euclides, tornando-a mais apropriada esteticamente.

> Dizer que o quinto postulado é equivalente ao postulado de Playfair significa que podemos provar o postulado de Playfair se aceitarmos os cinco postulados de Euclides, e, reciprocamente, se aceitarmos os quatro primeiros postulados de Euclides e o postulado de Playfair, podemos provar o quinto postulado como teorema[154].

[154] O'SHEA, Donal. *A Solução de Poincaré: em Busca da Forma do Universo*. Tradução Paulo Cezar Castanheira. Rio de Janeiro: Record, 2009, p.264.

Dentre as mais importantes versões equivalentes, no âmbito da crítica estética, a qual procura não demonstrar, mas simplificar o Postulado das Paralelas, posto que assumem implicitamente o Paralelismo, incluem-se as versões de Possidônio, Ptolomeu e Proclo:

- Retas paralelas são equidistantes (Possidônio);
- Duas retas cortadas por uma transversal não serão paralelas de um lado, se do outro também não forem (Ptolomeu);
- Uma reta que corta uma das paralelas, cortará a outra (Proclo).

A crítica técnica, por sua vez, não procura substituir o Quinto Postulado por uma versão mais econômica, mais apropriada a um princípio. Num contexto geométrico descritivo (onde o espaço geométrico e real coincidem), e não mais puramente dedutivo (onde os espaços geométrico e real não coincidem), o espaço infinito não é mais uma hipótese especulativa, mas uma declaração verdadeira e acurada do mundo das experiências espaciais. Nesse sentido, o Quinto Postulado deve decorrer logicamente dos outros princípios informadores da geometria euclidiana.

As primeiras críticas técnicas ao Quinto Postulado provêm dos árabes, os quais, após formação de seu império, abrangendo territórios do oriente ao ocidente, desenvolveram a matemática mediante contribuições da geometria grega e da aritmética hindu. Após a morte de Maomé (632), em apenas um século, o território já se estendia da Índia à Espanha, varrendo o Mediterrâneo oriental e o norte da África. Em 732, o rei dos francos, Carlos Martel, derrotou-os e pôs fim à expansão árabe na Europa.

> Os árabes também ficaram obcecados com o quinto postulado e tentaram deduzi-lo dos outros postulados ou simplesmente substituí-lo por outra coisa. Debalde. Mas eles introduziram muitas novas técnicas matemáticas que simplificavam os cálculos e tornaram a álgebra independente da geometria[155].

Territórios no oriente e no ocidente, aliada a uma elite que reconheceu o valor da ciência dos súditos, propiciou aos árabes unir a ciência grega, predominantemente geométrica, à matemática hindu, com notável e avançada aritmética. "O simbolismo numérico, a ciência dos números e a álgebra atingiram na Índia um alto grau de perfeição bem acima do que tinha sido alcançado na

[155] O'SHEA, Donal. *A Solução de Poincaré: em Busca da Forma do Universo*. Tradução Paulo Cezar Castanheira. Rio de Janeiro: Record, 2009, p.83.

Grécia[156]". Dos hindus, portanto, chega ao Ocidente, através dos árabes, o "sistema posicional de numeração de base dez, empregando dez símbolos, um dos quais o zero[157]".

> Entremeados com as ciências de origem grega, porém, havia elementos procedentes das tradições iraniana e indiana. Já no século IX, o matemático al-Khwarazmi (c.800-47) escrevia sobre o uso de números indianos – os chamados arábicos – em cálculos matemáticos. Essa mistura de elementos é significativa. No momento em que os califas abácidas juntavam as terras do oceano Índico e do Mediterrâneo numa única área comercial, também as tradições gregas, iranianas e indianas eram reunidas, e afirmou-se que, 'pela primeira vez na história, a ciência tornou-se internacional em larga escala'[158].

Segundo Cajori (2007), os primeiros autores traduzidos em árabe foram Euclides e Ptolomeu, isso aconteceu durante o reinado do famoso califa Harun al-Rashid, que reinou de 786 a 809. De acordo com Hourani (2001), os califas abácidas (749-1258), que tinham por capital Bagdá, estimularam – num fenômeno raro – o trabalho de tradução das obras científicas e filosóficas dos povos subjugados. Para tanto, fez-se necessária a ampliação dos recursos da língua árabe, e parte importante nisso foi desempenhada pelo maior dos tradutores, Hunayn ibn Ishaq (808-873).

Para Kali Muthu (2009), há uma extensa lista de críticos técnicos, de origem árabe, ao Quinto Postulado, podendo ser citados: Ibn al-Haytham (965-1039), que fez a primeira tentativa de provar o Postulado das Paralelas por contradição; Omar Khayyám (1050-1123), que fez a primeira tentativa de formular um postulado não-euclidiano como uma alternativa ao Quinto Postulado; e Nasir al-Din al-Tusi (1201-1274), que escreveu a obra *Discussão que Remove Dúvida sobre Linhas Paralelas* (1250), apresentando críticas detalhadas do Postulado das Paralelas.

> O filho de Nasir al-Din, Sadr al-Din (também conhecido por 'Pseudo-Tusi') escreveu um livro sobre o assunto em 1298, baseado nos últimos pensamentos de Nasir al-Din, que apresentou um dos mais antigos argumentos em prol de uma hipótese não-euclidiana equivalente ao Postulado das Paralelas. (...) Seu trabalho foi publicado em Roma em 1594 e estudado por geômetras europeus. Esta obra marcou o ponto de partida para o trabalho de Saccheri sobre o assunto[159].

---

[156] CAJORI, Florian. *Uma História da Matemática.* Tradução Lázaro Coutinho. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2007, p. 134.

[157] GARBI, Gilberto G. *A Rainha das Ciências: um Passeio Histórico pelo Maravilhoso Mundo da Matemática.* 5ª ed. São Paulo: Livraria da Física, 2010, p. 136.

[158] HOURANI, Albert. *Uma História dos Povos Árabes.* Tradução Marcos Santarrita. 2ª ed. São Paulo: Companhia das Letras, 2001, p. 92.

[159] "Nasir al-Din's son, Sadr al-Din (sometimes known as 'Pseudo-Tusi'), wrote a book on the subject in 1298, based on Nasir al-Din's later thoughts, which presented one of the earliest arguments for a non-Euclidean

Somente após o universo infinito, quando o espaço geométrico deixa de ser hipotético, é possível fomentar críticas técnicas (e não puramente estéticas) ao Quinto Postulado, o que supõe um ambiente cultural familiar ao infinito. Tal ambiente não era grego, mas hindu, e os árabes, ao tentar conciliar o infinito da aritmética hindu ao rigor dedutivo da geometria grega, foram os primeiros a tentar demonstrar o Postulado das Paralelas.

O infinito enquanto elemento cultural do pensamento hindu pode ser extraído da cosmologia contida nos Vedas, textos representativos da tradição cultural indiana antiga, cujas compilações remontam há pelo menos três mil anos:

> Existem muitas passagens nos textos Védicos sobre o universo infinito, enquanto ao mesmo tempo a distância finita até o sol é explicitamente mencionada (Kak, 1998a-d). Aditi, a grande mãe dos deuses, é a personificação do conceito de infinito. Um famoso mantra fala de como ao tirar infinito do infinito permanece o infinito. Isto indica que as propriedades paradoxais da noção do infinito eram conhecidas[160].

A familiaridade da aritmética hindu com o infinito em contraste com a refratária geometria grega pode ser destacada no tratamento da divisão por zero. Enquanto Aristóteles reconheceu geometricamente a impossibilidade da divisão por zero, pensada exatamente como a impossível divisão da linha pelo ponto, o indiano Bhaskara, no século XII, estabeleceu um tratamento aritmético da divisão por zero:

> É esclarecedor comparar estas passagens de Aristóteles com a proposição excessivamente alardeada sobre a divisão por zero dada por Bhaskara: 'Proposição: Dividendo 3. Divisor 0. Quociente 3/0. Esta fração, na qual o denominador é zero, é denominada uma quantidade infinita. Nesta quantidade,

hypothesis equivalent to the parallel postulate. (…) His work was published in Rome in 1594 and was studied by European geometers. This work marked the starting point for Saccheri's work on the subject". KALIMUTHU, S. The Parallel Postulate – Return of the Roaring Lion. **Indian Journal of Science and Technology**. International Digital Publication, v.2, n.4, p. 16-22, Apr. 2009, p. 20. (N.T.)

[160] "There are several statements in the Vedic texts about the universe being infinite, while at the same time the finite distance to the sun is explicitly mentioned (Kak, 1998a-d). Aditi, the great mother of the gods, is a personification of the concept of infinity. A famous mantra speaks of how taking infinity out of infinity leaves it unchanged. This indicates that paradoxical properties of the notion of infinity were known". KAK, Subhash. Concepts of Space, Time and Consciousness in Anciente India. **Baton Rouge: Louisiana State University**, 2008. p. 1-14, p. 3. (N.T.)

> que consiste daquela que tem zero como seu divisor, não há alteração, mesmo que muito seja inserido ou extraído;'[161].

Assim, percorrendo a crítica técnica árabe ao Postulado das Paralelas, chega-se ao duplo papel do infinito para a geometria. O infinito é, sem dúvida, o protagonista da mudança do *status* da geometria euclideana, que passa de dedutiva à descritiva. Mas ele é também o fermento da crítica técnica ao Quinto Postulado, para as incontáveis tentativas de demonstração de sua necessidade lógica em uma geometria não mais dedutiva, mas descritiva.

A história desse fracasso irá desembocar num dos mais frutíferos engenhos da mente humana, qual seja, o desenvolvimento das geometrias não-euclideanas. Mas é possível abordar a introdução do infinito no pensamento ocidental para além da história da matemática? A leitura de Giordano Bruno parece indicar que sim.

Nos dias atuais, a familiaridade com o infinito nos habilita a uma leitura extemporânea dos *Elementos*. Assim, pensamos uma linha ou uma reta como abstrações geométricas intuitivamente infinitas, quando, na realidade, as definições contidas em Euclides são refratárias ao infinito: "E linha é comprimento sem largura" (Definição 2). "E linha reta é a que está posta por igual com os pontos sobre si mesma". (Definição 4).

Em suma, em uma Europa herdeira do pensamento de Aristóteles, que comparou o inconcebível infinito à absurda divisão da linha por um ponto, o infinito cosmológico será proposto por Giordano Bruno (mesmo que Digges tenha sido o primeiro a atravessar a esfera das estrelas na Europa, em 1576, sua apresentação é de um infinito teológico e não cosmológico[162]) e não há como fugir da influência da arte, ciência e filosofia árabe em seu pensamento:

> Galileu Galilei sempre tentou separar a teologia da ciência; mas lamentavelmente para ele, houve um predecessor que não. Giordano Bruno era um ávido

[161] "It is illuminating to compare these passages from Aristotle with the much vaunted statement on the subject of division by zero given by Bhaskara: 'Statement: Dividend 3. Divisor 0. Quotient the fraction 3/0. This fraction, of which the denominator is cipher, is termed an infinite quantity. In this quantity consisting of that wich has cipher for its divisor, there is no alteration, though many be inserted or extracted'". BOYER, C. B. Na Early Reference to Division by Zero. **The American Mathematical Monthly.** Mathematical Association of América, v.50, n.8, p. 487-491, Oct. 1943, p. 490. (N.T.)

[162] "Thomas Digges coloca suas estrelas nos céus teológicos, e não em um céu astronômico". KOYRÉ, Alexandre. *Do Mundo Fechado ao Universo Infinito.* 4ª ed. revista. Tradução Donaldson M. Garschagen. Rio de Janeiro: Forense, 2010, p. 37.

> estudante de ciência e filosofia islâmica. Bruno argumentou não apenas que Copérnico estava certo – a Terra move-se ao redor do Sol – mas que havia muitos outros sistemas planetários iguais ao nosso. Infinitos deles nos universos, todos igualmente submetidos a Deus, removendo completamente a Igreja do sistema cosmológico[163].

Reconhecer, portanto, a influência do pensamento árabe em Giordano Bruno, o precursor do infinito cosmológico na Europa, é buscar pistas outras que não apenas matemáticas para a introdução do infinito no pensamento ocidental.

Nesse sentido, é esclarecedor destacar cerca de 75 arabescos, uma estampa árabe caracterizada pelo entrecruzamento de figuras geométricas e biomórficas, em dois de seus mais importantes tratados matemáticos, *Articuli centum et sexaginta*, de 1588, e *De triplici minimo et mensura*, de 1591.

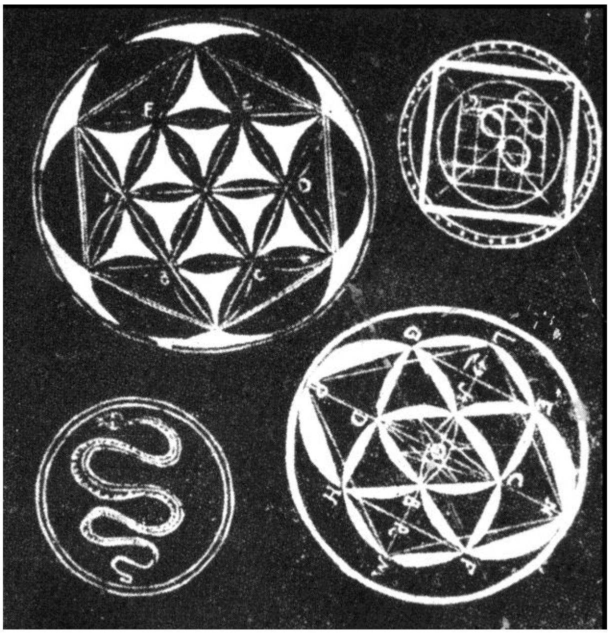

Figura 5. Estampas de Bruno na Obra *160 Artigos Contra Matemáticos e Filósofos Contemporâneos*

Mais do que uma função decorativa, os arabescos indicam a forte influência da estética árabe no pensamento de Giordano Bruno, precursor do infinito cosmológico na Europa. Os arabescos

[163] "Galileo Galilei always tried to separate the theology from the science; but unfortunately for him, he had a predecessor who did not. Giordano Bruno was an avid student of Islamic science and philosophy. Bruno argued not only that Copernicus is right – the earth goes around the sun – but that there are many other planetary systems like ours. Infinite numbers of them in universes, all equally under the God, removing the Church completely from the cosmological system". AHMAD, Imad-ad-Dean. Islamic Contributions to Modern Scientific Methods. **The Journal of Faith and Science Exchange**. The Boston Theological Institute, p. 27-36, 2000, p.34. (N.T.)

revelam, assim, a estética de um povo que conciliou elementos culturais gregos (finito, repouso, extensão), simbolizados pelos traços da geometria euclideana, a elementos culturais hindus (infinito, movimento, vazio), simbolizados pelo que hoje poderíamos chamar de traços geométricos não-euclideanos (uma art-noveau no final do século XVI?).

A conjunção de tais antípodas foi fundamental não apenas para que o cosmos esférico finito cedesse lugar ao universo matemático infinito, mas também como fonte de inspiração para uma estética livre do paralelismo euclideano. As estampas árabes, uma arte não-icônica liberta das proporções ideais renascentistas, desfazem a concepção de uma estética matemática da natureza.

> Segundo Le Corbusier (1948 apud LOACH, 1998), para o artista, matemática não consiste nos vários ramos da matemática. Não é necessariamente uma questão de cálculo, mas antes a presença de um poder soberano; uma lei de ressonância, consonância e organização infinitas. [...]. O acaso não tem lugar na natureza. Uma vez que se tenha entendido o que a matemática é – no seu sentido filosófico – pode-se discerni-la em todas as suas obras[164].

Ao contrário da estética renascentista, marcadamente euclideana, a estética árabe reflete conteúdos derivados não apenas da cultura grega refratária ao infinito (a cristalização na forma geométrica), mas também da hindu familiar ao infinito (a força formativa que desfaz a simetria euclideana).

Na obra *Islamic Patterns, an Analytical and Cosmological Approach*, Keith Critchlow defende uma interessante tese acerca da arte islâmica, que bem poderia compor um prefácio à obra capital de Schopenhauer, outro pensador influenciado pela cultura oriental:

> A arte islâmica é predominantemente um equilíbrio entre a forma geométrica pura e aquilo que pode ser chamado de forma biomórfica fundamental: uma polarização que tem valores associados aos quatro atributos filosóficos e experimentais: frio e seco – representando a cristalização na forma geométrica – e quente e úmido – representando as forças formativas por trás da forma vegetativa e vascular. O primeiro aspecto reflete as faces de uma jóia, a pureza do floco de neve e as flores congeladas de simetria radial; o outro, o flanco brilhoso

[164] "For the artist, mathematics does not consist of the various branches of mathematics. It is not necessarily a matter of calculation but rather of the presence of a sovereign power; a law of infinite resonance, consonance, organisation. [...]. **Chance has no place in nature**. Once one has understood what mathematics is – in the philosophical sense – thereafter one can discern it in all its works". LOACH, Judi. Le Corbusier and the Creative Use of Mathematics. **The British Journal for the History of Science,** 31, 1998, p. 185-215, p. 185. (N.T.)

> de um cavalo transpirante, o movimento silencioso de um peixe encurvando seu caminho na água, o desdobrar das folhas da parreira e o desabrochar da rosa.[165].

Concluindo, resta reconhecer que a influência árabe no pensamento de Giordano Bruno é reveladora de que aspectos estéticos são elementos importantes para a caracterização e a busca de conceitos em um ambiente cultural, como o infinito no Ocidente. Mas não apenas isso, quando os matemáticos árabes empreendem as primeiras críticas técnicas ao Quinto Postulado, a partir do século X, com a incorporação do infinito da cosmologia védica ao seu ambiente cultural, eles contribuem não apenas para a alvorada do pensamento moderno, mas também para a gestação do pensamento contemporâneo.

Isto porque, o infinito tem um duplo papel na história do pensamento. O primeiro serve à revolução científica, que solapa as bases qualitativas da Física Aristotélica, ao substituir a geometria dedutiva do cosmos esférico finito por uma geometria descritiva do universo infinito, base da Física Moderna, matemático-quantitativa, de Galileu e Newton.

O segundo serve à gestação do pensamento contemporâneo, porque o infinito traz a ilusão da demonstração do quinto postulado, e o fracasso desta tentativa irá prenunciar uma nova filosofia, quando o desenvolvimento das geometrias não-euclidianas e o convencionalismo geométrico de Poincaré no final do século XIX solapam as bases kantianas do sintético *a priori.*

REFERÊNCIAS

AHMAD, Imad-ad-Dean. Islamic Contributions to Modern Scientific Methods. **The Journal of Faith and Science Exchange.** The Boston Theological Institute, p. 27-36, 2000.

[165] "Islamic art is predominantly a balance between pure geometric form and what can be called fundamental biomorphic form: a polarization that has associative values with the four philosophical and experimental qualities of cold and dry – representing the crystallization in geometric form – and hot and moist – representing the formative forces behind vegetative and vascular form. The one aspect reflects the facets of a jewel, the purity of the snowflake and the frozen flowers of radial symmetry; the order the glistening flank of a perspiring horse, the silent motion of a fish winding its way through the water, the unfolding and unfurling of the leaves of the vine and rose". CRITCHLOW, Keith. *Islamic Patterns: An Analytical and Cosmological Approach.* Foreword by Seyyed Hossein Nasr. London: Thames & Hudson, 1983, p.8. (N.T.)

ARISTÓTELS. *Physics.* Translation by R. P. Hardie and R. K. Gaye. Disponível em <http://classics.mit.edu/Aristotle/physics.html>.

______. *Prior Analytics.* Translation, with introduction and notes by Robin Smith. Indianapolis: Hackett, 1989.

BOYER, C. B. Na Early Reference to Division by Zero. **The American Mathematical Monthly**. Mathematical Association of America, v.50, n.8, p. 487-491, Oct. 1943.

BRUNO, Giordano. *Sobre o Infinito, o Universo e os Mundos, in Os Pensadores.* Tradução Helda Barraco e Nestor Deola. São Paulo: Abril Cultural, 1983. p.1-91.

CAJORI, Florian. *Uma História da Matemática.* Tradução Lázaro Coutinho. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2007.

CRITCHLOW, Keith. *Islamic Patterns: An Analytical and Cosmological Approach.* Foreword by Seyyed Hossein Nasr. London: Thames & Hudson, 1983.

DAVIS, Philip J.; HERSH, Reuben; MARCHISOTTO, Elena A. *The Mathematical Experience: Study Edition.* 3ª ed. Massachusetts: Birkhäuser, 2003.

DUNHAM, William. *Journey Through Genius: the Great Theorems of Mathematics.* New York: Wiley, 1990.

EUCLIDES. *Elementos.* Tradução Irineu Bicudo. São Paulo: Unesp, 2009.

______. *Elements.* Por Sir Thomas Little Heath. New York: Dover, 1956. Disponível em <http://www.perseus.tufts.edu/hopper/text?doc=Perseus:text:1999.01.0086> Acesso em 10/nov/2011.

GARBI, Gilberto G. *A Rainha das Ciências: um Passeio Histórico pelo Maravilhoso Mundo da Matemática.* 5ª ed. São Paulo: Livraria da Física, 2010.

HOYRUP, Jens. Existence, Substantiality, and Counterfactuality: Observations on the Status of Mathematics according to Aristotle, Euclid and Others. Paper presented to the meeting on **Existence in Mathematics**. University of Roskilde, p. 1-30, nov. 2000.

HOURANI, Albert. *Uma História dos Povos Árabes*. Tradução Marcos Santarrita. 2ª ed. São Paulo: Companhia das Letras, 2001.

KALIMUTHU, S. The Parallel Postulate – Return of the Roaring Lion. **Indian Journal of Science and Technology**. International Digital Publication, v.2, n.4, p. 16-22, Apr. 2009.

KAK, Subhash. Concepts of Space, Time and Consciousness in Anciente India. **Baton Rouge**: Louisiana State University, 2008. p. 1-14.

KOYRÉ, Alexandre. *Do Mundo Fechado ao Universo Infinito*. 4ª ed. revista. Tradução Donaldson M. Garschagen. Rio de Janeiro: Forense, 2010.

LAÊRTIOS, Diógenes. *Vidas e Doutrinas dos Filósofos Ilustres*. 2ª ed. Tradução do grego, introdução e notas Mário da Gama Kury. Brasília: UnB, 2008.

LEVI, Beppo. *Lendo Euclides: a Matemática e a Geometria sob um Olhar Renovador*. Tradução Julián Miguel Barbero Fuks. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 2008.

LEWIS, Florence P. History of the Parallel Postulate. **The American Mathematical Monthly,** v. 27, n. 1, p. 16-23, Jan.1920.

LOACH, Judi. Le Corbusier and the Creative Use of Mathematics. **The British Journal for the History of Science**, 31, p. 185-215, 1998.

OMNÈS, Roland. *Filosofia da Ciência Contemporânea*. Tradução Roberto Leal Ferreira. São Paulo: Unesp, 1996.

O'SHEA, Donal. *A Solução de Poincaré: em Busca da Forma do Universo*. Tradução Paulo Cezar Castanheira. Rio de Janeiro: Record, 2009.

PLATÃO. *Timeu*. Tradução direta do grego Carlos Alberto Nunes. 3ª ed. (Coleção Diálogos). Belém: Edufpa, 2001. p. 49-147.

RAVINDRAN, Renuka. Euclid's Fifth Postulate. **Resonance. Journal of Science Education of the Indian Academy of Sciences**. Bangalore, v.12, n.4, p. 26-36, Apr. 2007.

STAHL, Saul. *The Poincaré Half-Plane: a Gateway to Modern Geometry*. London: Jones and Bartlett, 1993.

VAZ, Bruno. A Concepção de Demonstração em Euclides e Hilbert. In: DUTRA, L. H. A.; MORTARI, C. A. **Anais do V Simpósio Internacional Principia**, Florianópolis: NEL/UFSC, p. 165-172, 2009.