Resolução exemplar

Frank Thomas Sautter[1]
Universidade Federal de Santa Maria

Resumo

Frequentemente o método de tablôs inclui regras por intermédio das quais parâmetros são introduzidos; por exemplo, o método de tablôs para a lógica quantificacional inclui regras por intermédio das quais parâmetros para indivíduos são introduzidos, e o método de tablôs para a lógica modal inclui regras por intermédio das quais parâmetros para mundos possíveis são introduzidos. A utilização inteligente dessas regras pode fazer a diferença entre o sucesso e o insucesso. Baseando-se em análise de um argumento proposto por Raymond Smullyan, proponho uma técnica para a utilização inteligente dessas regras.

Palavras-chave: método de tablôs, parâmetro, técnica de prova

[1] Agradeço os colegas Nelson Gonçalves Gomes, da UnB, Daniel Durante Pereira Alves e João Marcos de Almeida, da UFRN, que muito contribuíram com críticas, sugestões e, inclusive, tópicos para a versão final deste trabalho.

Abstract

Often the tableaux method includes rules through which parameters are introduced; for instance, the tableaux method for quantificational logic includes rules through which parameters for individuals are introduced, and the tableaux method for modal logic includes rules through which parameters for possible worlds are introduced. The clever application of these rules can make the difference between success and failure. Based on analysis of an argument proposed by Raymond Smullyan, we propose a technique for the clever application of these rules.

Keywords: *tableaux method, parameter, proof technique*

O problema

Avalie o seguinte argumento:[2]

Todos amam os amantes.

João ama Maria.[3]

∴ Iago ama Otelo.[4]

---

[2] Não se sabe ao certo a origem do argumento. Utiliza-se, aqui, a versão apresentada em Smullyan (2009, p. 127). Talvez ele tenha sido inspirado na ética leibniziana, na qual o *vir bonus*, o homem virtuoso, é aquele que ama e é benevolente com todas as pessoas.

[3] João ("John") e Maria ("Mary") são os prenomes dos pais de William Shakespeare.

[4] Na peça teatral *Otelo, o mouro de Veneza*, de William Shakespeare, Iago quer vingar-se de Otelo por ter sido preterido em favor de Cássio.

O argumento apresentado é válido ou inválido? Se for válido, as duas premissas são necessárias para validá-lo? Se for inválido, qual alteração mínima nas premissas poderia validá-lo? Nas próximas seções, será resolvido informalmente e, depois, formalmente com o auxílio do método de tablôs. Mas, antes de prosseguir, procure resolvê-lo por si mesmo!

Resolução informal

Se João ama Maria, João é um amante.[5] Se João é um amante e todos amam os amantes, Otelo ama João. Se Otelo ama João, Otelo é um amante. Se Otelo é um amante e todos amam os amantes, Iago ama Otelo.

O argumento é válido e as duas premissas são necessárias para validá-lo, no sentido de que nenhuma delas pode ser simplesmente suprimida de tal modo que o argumento resultante continue válido. Isso parece surpreendente e contraintuitivo: em que medida a relação entre Iago e Otelo depende da relação entre João e Maria? A verdade é que a relação entre Iago e Otelo não depende da relação entre João e Maria;

[5] Nelson Gonçalves Gomes observou que a expressão "os amantes" pode referir-se a casais e, consequentemente, ela pode estar por uma relação e não por uma propriedade, ou, mesmo, ela pode estar por uma propriedade de "sujeitos compostos". Além disso, Gomes observou que a primeira premissa poderia ser expressa, na linguagem coloquial, por "Todos amam os que amam alguém", o que evita qualquer tipo de incompreensão de seu conteúdo. As observações de Gomes são pertinentes, mas prefere-se manter a formulação original para induzir o leitor a pensar a expressabilidade de um predicado, no caso o predicado associado à expressão "é um amante", a partir de outro predicado, no caso o predicado associado à expressão "ama", por intermédio de construção lógica.

ela depende da existência de um amante e este pode ser João ou outra pessoa qualquer.[6] Não podemos simplesmente eliminar a premissa "João ama Maria", mas podemos substituí-la por uma premissa mais fraca, a premissa "João é um amante".[7]

Resolução formal

Embora as proposições tratem da relação "amar" e da propriedade "amante", esta pode ser definida em termos daquela (mas não o inverso). Além disso, as proposições tratam de quatro pessoas, nomeadas por "João", "Maria", "Iago" e "Otelo". O vocabulário extralógico será constituído dos seguintes símbolos:

- Constantes individuais:
    - "j" para a pessoa nomeada por "João",
    - "m" para a pessoa nomeada por "Maria",
    - "i" para a pessoa nomeada por "Iago",
    - "o" para a pessoa nomeada por "Otelo";
- Constante de predicado:
    - "Axy" para a relação correspondente à expressa por "x ama y".

Que x é uma amante será expresso por "∃yAxy".

O tablô é um método por refutação sistemática de todo contraexemplo, portanto iniciamos o procedimento sustentando a verdade das premissas, mas a falsidade da conclusão:

---

[6] Daniel Durante Pereira Alves observou que a primeira premissa nos coloca diante de duas alternativas: ou todos amam todos ou ninguém ama ninguém. A segunda premissa decide a questão em favor da primeira alternativa.

[7] Uma proposição P_1 é mais fraca do que uma proposição P_2 se e somente se P_1 for consequência lógica de $\{P_2\}$ mas P_2 não for consequência lógica de $\{P_1\}$.

$$
\begin{array}{c}
V\forall x(\exists y Axy \supset \forall z Azx) \\
V Ajm \\
F Aio
\end{array}
$$

A segunda premissa e a conclusão são proposições atômicas verdadeira e falsa, respectivamente; somente podemos expandir o tablô com a utilização da primeira premissa. Esta é uma universal afirmativa, o que significa que podemos utilizar uma constante individual (parâmetro) qualquer em lugar de "x", já utilizada no tablô ou nova. Mas qual? Indiquemos essa dúvida com a utilização da marcação "γ_1"[8]

$$
\begin{array}{c}
V\forall x(\exists y Axy \supset \forall z Azx) \\
V Ajm \\
F Aio \\
| \\
V \exists y A\gamma_1 y \supset \forall z Az\gamma_1
\end{array}
$$

A folha do único ramo pode ser utilizada na expansão do tablô, originando dois ramos:

$$
\begin{array}{c}
V\forall x(\exists y Axy \supset \forall z Azx) \\
V Ajm \\
F Aio \\
| \\
V \exists y A\gamma_1 y \supset \forall z Az\gamma_1 \\
\swarrow \qquad \searrow \\
F \exists y A\gamma_1 y \qquad V \forall z Az\gamma_1
\end{array}
$$

[8] A notação "γ" é utilizada por Smullyan naquelas regras dos quantificadores em que não há restrição quanto à utilização de constantes individuais. (Ver SMULLYAN, 2002/2009, p. 64)

Tanto a folha do ramo da esquerda como a folha do ramo da direita nos faculta a utilização de uma constante qualquer nos lugares de "y" e "z", respectivamente. Seguindo o padrão anteriormente utilizado, indiquemos essa indecisão com a utilização de marcações "γ":

$$
\begin{array}{c}
V\forall x(\exists y Axy \supset \forall z Azx) \\
V Ajm \\
F Aio \\
| \\
V\exists y A\gamma_1 y \supset \forall z Az\gamma_1 \\
\begin{array}{cc}
/ & \backslash \\
F\exists y A\gamma_1 y & V\forall z Az\gamma_1 \\
| & | \\
F A\gamma_1\gamma_2 & V A\gamma_3\gamma_1
\end{array}
\end{array}
$$

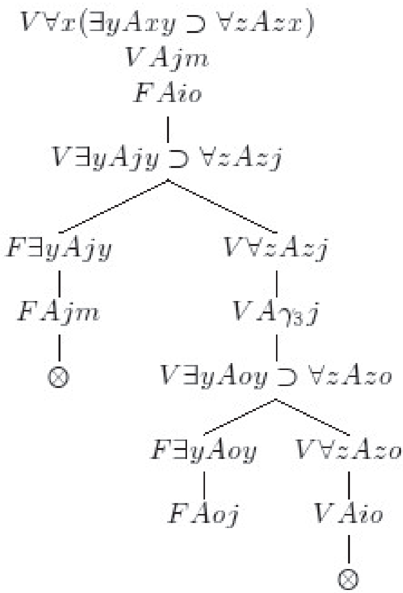
Para provarmos validade, precisamos nos esforçar para encontrar contradições nos ramos e, com elas, fechá-los. Se substituirmos "γ_1" por "j" e "γ_2" por "m", podemos fechar o ramo da esquerda:

$$
\begin{array}{c}
V\forall x(\exists y Axy \supset \forall z Azx) \\
V Ajm \\
F Aio \\
| \\
V\exists y Ajy \supset \forall z Azj \\
\begin{array}{cc}
/ & \backslash \\
F\exists y Ajy & V\forall z Azj \\
| & | \\
F Ajm & V A\gamma_3 j \\
| & \\
\otimes &
\end{array}
\end{array}
$$

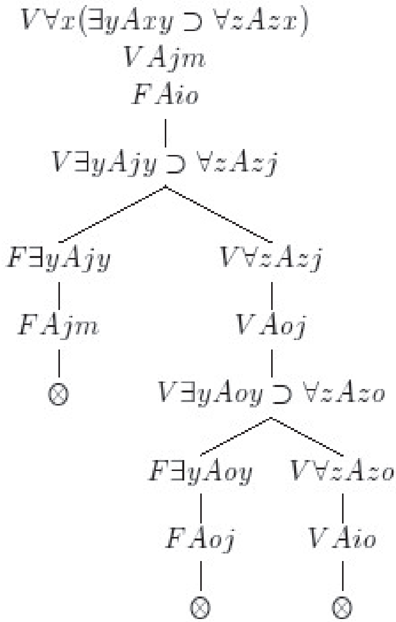
O ramo da direita ainda não pode ser fechado. Vamos repetir o processo anterior, indicando nossa indecisão quanto à utilização de constantes individuais com marcações "γ", desde que, novamente, as regras relacionadas aos quantificadores nos facultam a utilização de qualquer constante individual:

$$
\begin{array}{c}
V\forall x(\exists yAxy \supset \forall zAzx) \\
VAjm \\
FAio \\
| \\
V\exists yAjy \supset \forall zAzj \\
\begin{array}{cc}
/ & \backslash \\
\begin{array}{c} F\exists yAjy \\ | \\ FAjm \\ | \\ \otimes \end{array} &
\begin{array}{c} V\forall zAzj \\ | \\ VA\gamma_3 j \\ | \\ V\exists yA\gamma_4 y \supset \forall zAz\gamma_4 \\
\begin{array}{cc}
/ & \backslash \\
\begin{array}{c} F\exists yA\gamma_4 y \\ | \\ FA\gamma_4\gamma_5 \end{array} &
\begin{array}{c} V\forall zAz\gamma_4 \\ | \\ VA\gamma_6\gamma_4 \end{array}
\end{array}
\end{array}
\end{array}
\end{array}
$$

Agora, se substituirmos “γ_4” por “o”, “γ_5” por “j” e “γ_6” por “i”, podemos fechar o ramo da direita:



Finalmente, substituindo "γ_3" por "o", podemos fechar o ramo central:



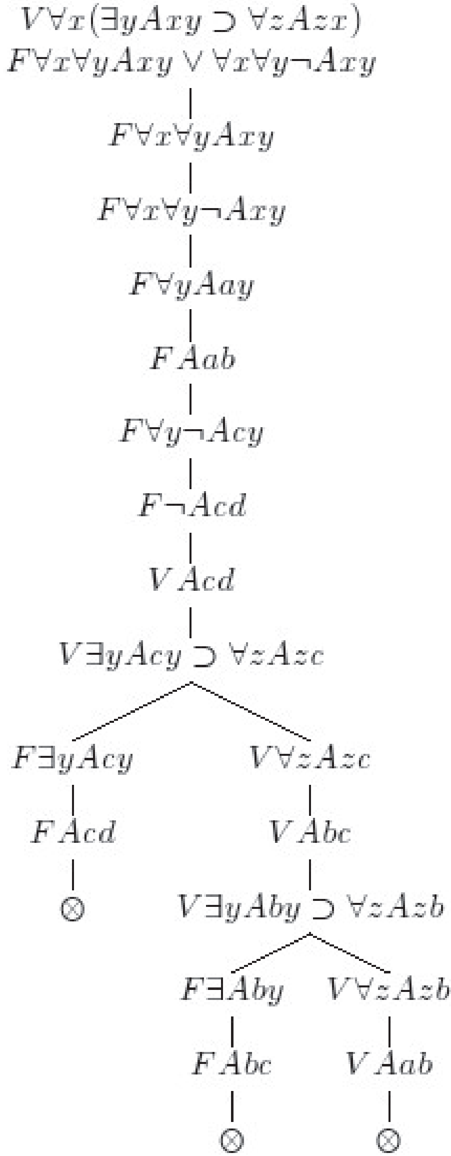
A resolução formal ilustra uma estratégia básica para o sucesso na aplicação do método de tablôs, a saber, quando a utilização de uma constante individual qualquer nos é facultada, devemos postergar essa decisão até o surgimento de boas razões, razões relacionadas ao fechamento de ramos!

Após entendida a técnica de postergação da escolha de constante individual, seremos capaz de provar o resultado proposto por Daniel Durante Pereira Alves, a saber:

$$\forall x(\exists yAxy \supset \forall zAzx)$$

$$\therefore \forall x\forall yAxy \lor \forall x\forall y\neg Axy$$

O resultado final, sem as etapas intermediárias, é dado abaixo:



Dedução natural

Baseado nas observações de Daniel Durante Pereira Alves, João Marcos de Almeida propôs uma prova natural, que utiliza a seguinte vantagem da dedução natural em relação aos tablôs: o reaproveitamento de resultados previamente obtidos.

Considere, então, os seguintes lemas:

Lema 1: $\exists x \forall y \Phi \supset \forall y \exists x \Phi$

Lema 2: $\forall x(\Phi \supset \Psi) \supset (\forall x \Phi \supset \forall x \Psi)$

Lema 3: $\forall x \forall y \Phi \supset \forall y \forall x \Phi$

João Marcos de Almeida sugere a introdução de duas propriedades (uma para cada *relatum* da relação expressa por "amar"):

x é amante: $Bx =_{def.} \exists yAxy$

x é amado: $Cx =_{def.} \exists yAyx$

A prova segue o seguinte roteiro: 1º) provamos que todos são amantes; 2º) todos são amados por todos; 3º) todos amam todos (desnecessário para o resultado final); 4º) que todos são amados (desnecessário para o resultado final) e, 5º) Iago ama Otelo.

A prova é a seguinte:

1. $\forall x(\exists yAxy \supset \forall zAzx)$
   :Premissa.
2. Ajm
   :Premissa.
3. $\exists yAjy \supset \forall zAzj$
   :E$\forall$1.
4. $\exists yAjy$
   :I$\exists$2.

Utilizando uma definição, temos Bj, ou seja, João é amante.

5. $\forall zAzj$
   :E$\supset$3,4.
6. $\exists x\forall zAzx$
   :I$\exists$5.
7. $\exists x\forall zAzx \supset \forall z\exists xAzx$
   :Lema 1.
8. $\forall z\exists xAzx$
   :E$\supset$6,7.

Utilizando uma definição, temos $\forall zBz$, ou seja, todos são amantes.

9. $\forall x(\exists yAxy \supset \forall zAzx) \supset (\forall x\exists yAxy \supset \forall x\forall zAzx)$
   :Lema 2.
10. $\forall x\exists yAxy \supset \forall x\forall zAzx$
    :E$\supset$1,9.
11. $\forall x\forall zAzx$
    :E$\supset$8,10.

Todos são amados por todos.

12. $\forall x \forall z Azx \qquad \supset \qquad \forall z \forall x Azx$
    :Lema 3.
13. $\forall z \forall x Azx$
    :E⊃11,12.

Todos amam todos.

14. $\forall x Ajx$
    :E∀13.
15. $\exists y \forall x Ayx$
    :I∃14.
16. $\exists y \forall x Ayx \qquad \supset \qquad \forall x \exists y Ayx$
    :Lema 1.
17. $\forall x \exists y Ayx$
    :E⊃15,16.

Utilizando uma definição, temos $\forall x Cx$, ou seja, todos são amados.

18. $\forall z Azo$
    :E∀11.
19. Aio
    :E∀18.

Não foi necessária a utilização de nenhuma regra hipotética, apenas regras diretas. A prova foi construída de tal modo a utilizar uma única vez a segunda premissa e somente a informação de que João é amante.

Referências

SMULLYAN, R. M. *Lógica de primeira ordem.* São Paulo: UNESP, Discurso, 2002/2009.

_________________. *Logical labyrinths.* Wellesley: A. K. Peters, 2009.