O desafio benacerrafiniano: será possível obter conhecimento de objetos matemáticos abstratos?

The Benacerrafian challenge: is it possible to gain knowledge of abstract mathematical objects?

Daniela Moura Soares
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Resumo

Neste artigo analisaremos aquilo a que tem sido conhecido como o desafio benacerrafiniano de mostrar como é possível que o nosso conhecimento matemático seja conhecimento de objetos matemáticos abstratos. A primeira seção consistirá numa reformulação do argumento proposto por Benacerraf (1973) a favor da tese de que uma semântica adequada para a matemática é incompatível com uma epistemologia razoável para a matemática. Na segunda seção, procuraremos mostrar como esta tese pode ser usada paraatacar diretamente a visão platonista da matemática através da construção de um argumento puramente epistêmico.Na terceira seção, apresentamos brevemente a resposta aprioricistade Hale (1987) a este argumento, procurando mostrar que esta não é uma resposta satisfatória, posto não responder àquela que deve ser considerada a versão mais plausível do argumento epistêmico contra o platonismo matemático. Na quarta seção, procuramos mostrar como este argumento epistêmico contra a visão platonista da matemática pode ser reformulado sem que se faça uso de teorias causais do conhecimento, cuja plausibilidade é bastante controversa. Nessa seção também avaliaremos brevemente algumas tentativas de resposta por parte de Katz (1981) e outros. Na quinta seção,analisamos a proposta de Balaguer (1998) de reconstruir o platonismo tradicional usando o princípio da plenitude. Na sexta seção, apresentaremos então a única das respostas que parece responder à versão mais forte do argumento epistêmico benacerrafiniano, nomeadamente, o abstracionismo fregianode Hale e Wright (2002). A última seção deste artigo consistirá, portanto, apenas na formulação de algumas conclusõesacerca da questão de saber quais destas tentativas de dissolver o desafio epistêmico benacerrafiniano são promissoras, e se tal desafio representa uma dificuldade genuína à defesa do platonismoquanto à matemática.

Palavras-chave

abstracionismo fregiano. platonismo matemático. platonismo da plenitude. desafio benacerrafiniano.

Abstract

In this paper, the so-called benacerrafian epistemological challenge of showing how it is possible for our mathematical knowledge to be knowledge of abstract mathematical objects will be meticulously addressed. In section 1, we will provide a restatement of Benacerraf's (1973) argument for the claim that a suitable semantic for mathematics is incompatible with a reasonable epistemology for it. In section 2, we will try to show how this thesis can be used, in a very straight way, to make a case against the platonist view of mathematics by means of constructing a purely epistemological argument. In section 3, we will present quite briefly Hale's (1987) attempt to respond to this argument, trying to show that it is not a satisfactory answer, since it does not respond to the one which should be considered as the most plausible version of the epistemological argument against mathematical platonism. In section 4, we try to show that this argument can be restated without invoking any causal theory of knowledge, whose plausibility is quite controversial. In this section we also evaluate, quite briefly, some attempts to reject the benacerrafian epistemic argument by Katz (1981) and other philosophers. In the section 5, we analyse Balaguer's (1998) project of reconstructing traditional platonism using the *plenitudinous principle*. In section 6, we will present, then, the only approach which seems to really answer to the strongest version of the benacerrafian epistemic argument, namely, Hale & Wright's (2002) *fregean abstractionism*. Additionally, in the last section, we draw a few conclusions about the

question of determining which of these approaches are really promising as well as about the question of whether the benacerrafian epistemic challenge is a genuine challenge to the platonist view of mathematics.

Key-words

fregean abstractionism. mathematical platonism. plenitudinous platonism. benacerrafian challenge.

Introdução

Em *Science Without Numbers*, Hartry Field (1980) desenvolve uma versão bastante peculiar daquilo a que podemos chamar *visão ficcionalistada matemática*. A idéia central dos defensores desta perspectiva é a de que não há quaisquer boas razões para aceitar o pressuposto de que as teorias da nossa matemática são realmente verdadeiras, num sentido robusto de *ser verdadeiro*. Deste ponto de vista, a matemática é encarada como um dispositivo bastante útil na formulação de teorias científicas, sendo completamente desnecessário, entretanto, postular a existência de verdades matemáticas. A matemática é vista apenas como uma espécie de ficção que desempenha um papel importantíssimo nas ciências empíricas, ficção a qual, contrariamente às nossas teorias científicas, não constitui um corpo de verdades.

Esta é, portanto, a ideologia do *ficcionalismo matemático*. Há, de forma geral, dois modos de ser ficcionalista quanto à matemática. Se um defensor desta perspectiva reconhece que não podemos abdicar do uso intenso da matemática na formulação das nossas teorias científicas, estará obrigado a explicar como é possível dar sentido a esta enorme aplicabilidade da matemática dentro das ciências empíricas sem postular a existência de verdades matemáticas. Esta é precisamente a estratégia dos defensores daquilo a que chamamos *ficcionalismo do caminho fácil* (*easy-road fictionalism*). Trata-se de tentar compatibilizar a tese — relativamente incontroversa — de que o uso da matemática nas ciências empíricas é indispensável com a tese — bastante controversa — de que não há verdades matemáticas. Por outro lado, a postura segundo a qual devemos rejeitar a idéia de que a matemática é indispensavelmente aplicável às ciências empíricas — mostrando como podemos reconstruir teorias científicas sem o uso de qualquer dispositivo matemático —

pode ser caracterizada como *ficcionalismo do caminho árduo* (*hard-road fictionalism*), pois trata-se de desempenhar a tarefa árdua de mostrar que o uso da matemática nas nossas teorias científicas mais fundamentais é completamente dispensável, constituindo apenas um dispositivo de abreviação para muitos dos elementos constituintes destas teorias. Esta é versão de ficcionalismo matemático veementemente defendida por Field (1980). A seguinte passagem expressa muito claramente o seu ponto de vista:

> "Afinal, quais são os bons argumentos para considerar que a matemática padrão seja um corpo de verdades? O fato de a matemática padrão ser derivável de um corpo de axiomas aparentemente consiste não é suficiente. A questão é: porque considerar os axiomas como *verdades*, ao invés de considerá-los como ficções nas quais, por várias razões, os matemáticos tornaram-se interessados? Os únicos argumentos não circulares que já alguma vez ouvi a favor da visão de que a matemática é um corpo de verdades dependem todos, em última análise, da aplicabilidade da matemática ao mundo físico; portanto, se a aplicabilidade ao mundo físico também não é um bom argumento, então não há qualquer razão para considerar qualquer parte da matemática como verdadeira." (Field, p. 08, 1980)

A postura filosófica completamente oposta a esta consiste em afirmar que a matemática pretende fornecer — analogamente às ciências empíricas — descrições verdadeiras de uma realidade independente das nossas crenças, pensamentos e teorizações. Tal perspectiva é, *prima facie*, bastante mais plausível e intuitiva. Entretanto, se adotarmos tal postura, como haveremos de explicar a existência de verdades matemáticas? Noutras palavras, o que é isto em virtude do qual afirmamos intuitivamente que as afirmações da matemática são verdadeiras? O problema em disputa pode ser formulado mediante a construção das seguintes duas perguntas: (1) Em virtude do que são as proposições matemáticas simples, tais como aquelas expressas pelas frases "3 é um número ímpar" e "2 + 2 = 4" verdadeiras? (2) Podemos responder adequadamente a (1) sem postular a existência de certo tipo de objetos abstratos, nomeadamente, números? Trata-se de estabelecer, portanto, com que tipo de entidades estamos comprometidos ao formular as nossas teorias matemáticas.

As teorias que pretendem responder a este problema dividem-se adequadamente em teorias platonistas e teorias nominalistas. A resposta daquilo a que podemos chamar *platonismo matemático* à pergunta (1) consiste em afirmar a existência de uma realidade abstrata, composta pela categoria ontológica de todas as entidades sem localização espaciotemporal, categoria à qual todos os objetos matemáticos pertencem. Esta é a realidade abstrata que constitui o reino matemático (*mathematical realm*) e que contém os veridadores das nossas verdades matemáticas. Os defensores desta visão responderão, portanto, negativamente à pergunta (2). A idéia central do platonismo matemático é a de que há entidades abstratas e a matemática é acerca destas entidades. Podemos caracterizá-locomo a conjunção das seguintes quatro teses:

1) Há objetos matemáticos

2) Tais objetos são abstratos

3) Tais objetos existem necessariamente e independentemente dequaisquer agentes cognitivos capazes de os conceber

4) As verdades da matemática são acerca destes objetos[1]

Deste ponto de vista, proposições simples da aritmética — tal como a proposição expressa pela frase "3 é ímpar" — são acerca de objetos abstratos, isto é, objetos que não têm localização espaciotemporal. Assim, tal como a expressão "Sócrates" na frase "Sócrates é mortal" refere a pessoa Sócrates, a expressão "3" na frase "3 é ímpar" refere o número 3. Os referentes dos termos "Sócrates" e "3" têm, contudo, naturezas distintas; no primeiro caso trata-se de um objeto concreto (um objeto que existe no espaço e no tempo), mas no segundo caso trata-se de um objeto abstrato (um objeto que não existe noespaço e do tempo).

Por outro lado, a tese central defendida pelos defensores daquilo a que chamamos *nominalismo matemático*é a de que não há entidades matemáticas abstratas e, portanto, somos obrigados a aceitar o seguinte trilema:

(a) Ou matemática é acerca de entidades concretas

(b) Ou as verdades da matemática não devem ser interpretadas literalmente

1 - Existem diferentes versões desta visão platonista da matemática. Aquilo a que frequentemente se chama *platonismo tradicional* — o qual foi endossado veementemente por Frege (1884) e Gödel (1964) — corresponde exatamente a estas quatro afirmações, porém outras formas de platonismo matemático (como, por exemplo, o *platonismo da plenitude* (*full-blooded platonism*) defendido por Balaguer (1998), ou o *platonismo dos valores semânticos enfraquecidos* (*lightweight semantic values platonism*) defendido por Linnebo (2008)) surgiram como tentativas de responder às objeções propostas por Benacerraf (1965 e 1973).

(c) Ou não há verdades matemáticas

Os defensores daquilo a que podemos chamar *nominalismo fisicalista* rejeitam (b) e (c) e, por silogismo disjuntivo, aceitam (a). De acordo com esta perspectiva, as verdades da matemática —em especial da aritmética — são acerca de objetos físicos comuns (objetos contáveis). Esta teoria foi defendida por Mill (1843) e, mais recentemente, por Phillip Kitcher (1984).

Se rejeitarmos (a) e (c), por outro lado, estamos obrigados a aceitar (b). Isto é, estamos obrigados a aceitar a tese segundo a qual as verdades da matemática não devem ser interpretadas literalmente. Deste ponto de vista, a proposição expressa pela frase "3 é ímpar", por exemplo, não deve ser entendida como uma afirmação simples acerca de um objeto (o número 3) que exemplifica uma propriedade (a propriedade *ser ímpar*). A forma lógica de uma proposição deste tipo não é Fn, mas sim $\exists x\ (x = n) \rightarrow Fn$, onde "$n$" representa o número 3 e "Fx" representa a propriedade *ser ímpar*. Assim, as verdades da matemática devem ser interpretadas como condicionais cujas antecedentes são sempre falsas, pois asseveram a existência de objetos matemáticos abstratos, os quais não existem. A idéia de um defensor desta teoria —a qual chamamos *if-thenism*— é a de que as verdades da matemática são verdades vácuas.

De igual modo, se rejeitarmos a idéia de que a matemática é acerca de entidades concretas e aceitarmos a tese de que as verdades matemáticas devem ser interpretadas literalmente, estaremos comprometidos com (c), isto é, com a tese segundo a qual não há verdades matemáticas. Isto é exatamente o que afirmam os defensores do ficcionalismo matemático. Nesta perspectiva, a forma lógica de proposições expressas por frases como "3 é ímpar" é de fato Fn; a referência de n é, contudo, vazia, pelo que tal proposição não é verdadeira. Evidentemente, um defensor do ficcionalismo matemático não tem de estar comprometido com a tese mais forte de que proposições matemáticas como as de que 3 é ímpar e $2 + 2 = 4$ são falsas; são apenas não-verdadeiras. Hartry Field (1980), Balaguer (1996, 1998, 2009) e Leng (2010) são alguns dos defensores desta perspectiva.

Neste artigo, não abordaremos o problema filosófico mais geral de saber se as teorias nominalistas quanto à matemática são mais plausíveis comparativamente às teorias platonistas. O objetivo central será apenas o de mostrar que uma das objeções mais frequentemente usadas contra o platonismo matemático — designadamente, os argumentos epistêmicos inspirados em Benacerraf (1973) — não é promissora.

1. O dilema de Benacerraf

1.1. Duas explicações acerca da natureza das verdades matemáticas: a visão padrão e a visão combinatorial

Benacerraf (1973) defende a tese segundo a qual qualquer explicação adequada do conceito de verdade matemática será incompatível com um explicação adequada do conhecimento matemático. Do seu ponto de vista, dois tipos bastante distintos de exigências têm motivado as explicações da natureza das verdades matemáticas. A primeira consiste na idéia de que qualquer explicação do conceito de verdade matemática tem de fornecer uma semântica para a linguagem matemática, semântica esta a qual terá de ser paralela à semântica da qual dispomos para a linguagem natural e para a linguagem científica. A segunda preocupação consiste na tese de que tal explicação deve ser compatível com uma epistemologia adequada[2].

Entretanto, qualquer explicação do conceito de verdade matemática satisfaz uma, e apenas uma, destas exigências. Assim, qualquer explicação da natureza das verdades matemáticas que seja composta por um pacote semântico e epistêmico — o qual torna uniforme a semântica da linguagem matemática e semântica da linguagem científica e natural — será malsucedido, pois qualquer explicação do conceito de verdade que analise verdades matemáticas e verdades não-matemáticas de modo análogo torna ininteligível como podemos de todo em todo obter conhecimento matemático.

O problema epistêmico central apontado por Benacerraf parece ser composto por duas componentes distintas, quais sejam, (a) a exigência por uma explicação acerca de como as condições de verdade atribuídas a uma proposição matemática são condições para a sua verdade e (b) a exigência por uma explicação acerca do modo os nossos estados de crença conectam-se às condições de verdade atribuídas às proposições matemáticas por nós conhecidas. Tais exigências estão relacionadas àquilo que tradicionalmente é considerado como sendo as condições necessárias do conhecimento, nomeadamente, crença, verdade e justificação. Trata-se, especificamente, de explicar a existência de verdades matemáticas e a existência de crenças matemáticas justificadas.

Do ponto de vista de Benacerraf, se pretendemos explicar a natureza da verdade, da referência, do significado e do conhecimento, devemos fornecer uma explicação que englobe simultaneamente todos estes conceitos, e tal explicação deve ser adequada para todas as proposições às quais tais conceitos se aplicam[3]. É razoável exigirmos, por

2 - Cf. Benacerraf (1973, p. 661)

3 - Cf. Benacerraf (1973, p. 662)

exemplo, que uma explicação adequada da natureza das verdades matemáticas envolva uma explicação do como os termos singulares de uma frase matemática referem. A verdade da proposição expressa pela seguinte frase matemática "2 é par" não poderá ser adequadamente explicada se não especificarmos como é possível que o termo singular "2" refira o objeto que supostamente refere.

De igual modo, qualquer explicação dos mecanismos gerais de conhecimento que seja adequada para o conhecimento de objetos físicos, não sendo, porém, adequada para o conhecimento mais teórico, será uma explicação malsucedida, posto que estará negligenciando a interdependência existente entre as diferentes área do conhecimento[4]. Tal argumento a favor da uniformidade e universalidade das nossas explicações epistêmicas aplica-se também à análise das condições de verdade de proposições; o modo como atribuímos condições de verdade às proposições da linguagem natural dever ser uniforme ao longo de todas as outras formas de linguagem — isto é, deve-se aplicar-se não apenas à linguagem natural, mas também à linguagem matemática e científica. Benacerraf expressa exatamente esta idéia na seguinte passagem:

> "Uma teoria teoria da verdade para a linguagem na qual falamos, argumentamos, teorizamos, matematizamos, etc., deve, através do mesmo modelo, fornecer condições de verdade semelhantes para frases semelhantes. As condições de verdade atribuídas a duas frases contendo quantificadores deve refletir de modos relevantemente semelhantes a contribuição feita pelos quantificadores. Qualquer divergência de uma teoria assim homogênea teria de ser fortemente motivada para valer a pena ser considerada." (Benacerraf, 1973, p. 662)

Deste ponto de vista, as seguintes duas proposições têm a mesma forma lógica e, portanto, as mesmas condições de verdade:

(1) Há pelo menos três grandes cidades mais velhas que Nova York.

(2) Há pelo menos três números perfeitos maiores que 17.

4 - Cf. Benacerraf (1973, p. 662)

Ambas obedecem ao seguinte princípio matriz de interpretação:

(3) Há pelo menos três *s* de *F* e de *G* diferentes entre si e que estão em *R* com *a*.

"Há pelo menos três" é uma abreviação do uso de quantificadores numéricos, *F* e *G* representam predicados unários, *R* representa uma relação binária e *a* representa um nome. Assim, (3) fornece-nos a seguinte forma lógica:

$$\exists x\ \exists y\ \exists z\ (Rxa \wedge Rya \wedge Rza \wedge Fx \wedge Fy \wedge Fz \wedge Gx \wedge Gy \wedge Gz \wedge x \neq y \neq z)$$

(3) parece refletir muito claramente a forma lógica de (1). Assim, (1) será verdadeira se, e somente se, for o caso que o objeto nomeado pela expressão que substitui *a* (tal expressão é o nome "Nova York") mantém a relação nomeada pela expressão que substitui *R* com pelo menos três membros do domínio de quantificação os quais satisfazem os predicados que substituem *F* e *G* (os predicados 'ser uma cidade' e 'ser grande', respectivamente).

A explicação platonista da matemática analisa (2) como tendo as mesmas condições de verdade de (1): ambas obedecem à (3). As condições de verdade de (1) não requerem, entretanto, a existência de entidades abstratas, ao passo que as condições de verdade de (2) requerem precisamente este tipo de entidades, nomeadamente, números (entendidos como objetos matemáticos abstratos). Esta explicação platonista da natureza das verdades matemáticas corresponde àquilo que Benacerraf considera ser *a visão padrão.*

Contudo, embora pareça razoável pensar que (2) deva ser interpretada como (1) via (3) — posto tratar-se de frases semelhantes —, há bastante controvérsia neste ponto. Devido à carga ontológica acarretada por esta visão padrão, Benacerraf recusa-se a aceitar que (2) tenha as mesmas condições de verdade de (1). Uma das razões para tal rejeição, para além do fato de que números entendidos como entidades abstratas é algo ininteligível, é a de que, do seu ponto de vista, números não podem sequer ser considerados como objetos, pelo que em (2) não podemos tratar o numeral "17" como se fosse um nome[5].

Outra forma de rejeitar esta explicação semântica padrão da matemática consiste em dizer que, embora (1) tenha exatamente a mesma forma lógica que (2), as condições de verdade de (2) diferem das condições de verdade (1), dado que a explicação adequada da natureza

5 - Cf. Benacerraf (1965, 1973, p. 664) de uma verdade matemática não reside no compromisso ontológico da sua forma lógica, mas sim no fato de que tal proposição matemática pode ser demonstrada a partir de outras proposições matemáticas tomadas como axiomas. Assim, é correto afirmar, relativamente a (1), que a proposição expressa pela frase "Há pelo menos três grandes cidades mais velhas que Nova York" será verdadeira se, e somente se, existem pelo menos três objetos não-idênticos que exemplificam as propriedades *ser uma cidade* e *ser grande*, e tais objetos mantêm a relação binária *ser mais velho que* com o referente do nome "Nova York".

Contudo, não é correto afirmar que (2) é verdadeira se, e somente se, há pelo menos três objetos não-idênticos que exemplificam simultaneamente as propriedades*ser um número* e *ser perfeito* e tais objetos mantêm a relação também binária *ser maior que* com o referente do numeral "17". Nesta outra perspectiva, as condições de verdade de (2) não dependem da existência de quaisquer objetos, mas apenas do fato de (2) poder ou não ser demostrada. Deste ponto de vista, as condições de verdade de uma proposição da matemática esgotam-se na sua derivabilidade formal de um conjunto de axiomas. Esta é também a abordagem do intuicionismo de Brouwer (1981), Heyting (1956) e Dummett (1978): verdade consiste na existência de uma prova.

Este tipo de explicação da natureza das verdades matemáticas corresponde àquilo que Benacerraf chamou *perspectiva combinatorial*. A idéia central das perspetivas combinatoriais é a de que a atribuição de valores de verdade às frases matemáticas baseia-se em fatos sintáticos, fatos de teoria da prova. Trata-se, portanto, da idéia de que os determinantes das verdades da matemática são aspectos sintáticos (combinatórios) das frases da matemática[6]. Um defensor da perspectiva combinatorial poderá interpretar as proposições matemáticas conforme o modo semanticamente padrão; a análise semântica poderá ser realista — visto que as frases matemáticas poderão ser interpretadas literalmente —, embora a ontologia não o seja, visto que, deste ponto de vista, postular um universo matemático constituído por objetos platônicos ortodoxos é completamente irrelevante para estabelecer as condições de verdade das proposições matemáticas. Há, portanto, uma distinção clara entre perspectivas que atribuem uma semântica e uma sintaxe óbvia a proposições matemáticas — tal semântica e tal sintaxe são fundamentalmente platonistas — e perspectivas que ignoram a semântica aparente, atribuindo às proposições matemáticas condições de verdade através de considerações sintáticas não-semânticas. De acordo com esta última, a matemática limita-se à sintaxe.

Benacerraf observa, contudo, que uma das dificuldades que este tipo de abordagem enfrenta é a de violar a incompletude da aritmética.[7] Considere-se a seguinte formulação

6 - Cf. Benacerraf (1973, p. 665)

7 - Ibid.

informal do primeiro teorema da incompletude de Gödel:

> "*Incompletude 1*: Em qualquer sistema formal consistente *F*, dentro do qual uma certa quantidade de aritmética pode ser implementada, há asserções da linguagem de *F* que não podem nem ser provadas, nem refutadas." (Raatikainen, 2015, p. 01)

Deste modo, para qualquer sistema aritmético, não será o caso que seja possível obter como teorema tudo aquilo que se quer como teorema, visto que nem todas as verdades matemáticas podem ser demostradas. Se a aritmética for incompleta, não será correto afirmar, portanto, que para qualquer proposição *P* da aritmética, *P* é verdadeira se, e somente se, *P* pode ser demonstrada a partir de um conjunto especificado de axiomas, pois aceitando *Incompletude 1*, será falso que qualquer proposição matemática possa ser demostrada. Assim, se aceitarmos que cada proposição matemática tem um valor de verdade, estaremos obrigados a aceitar que todas as proposições matemáticas têm condições de verdade, muito embora existam proposições matemáticas para as quais não há provas. As perspectivas combinatoriais são, deste modo, incompatíveis com a incompletude da aritmética.

Embora Benacerraf tenha como objetivo geral mostrar que nem a visão padrão, nem a visão combinatorial constituem uma explicação completa e razoável da natureza das verdades matemáticas, cada uma destas abordagens da natureza das verdades matemáticas tem, do seu ponto de vista, algum mérito, seja por incorporar uma explicação coerente do conceito de verdade — fornecendo uma semântica e uma sintaxe aplicável não só à linguagem matemática, mas também à linguagem natural e às linguagens científicas —, seja por incorporar uma explicação coerente do conceito de conhecimento — fornecendo uma epistemologia adequada que engloba todos as instâncias de conhecimento (matemático e empírico).

1.2 Três condições para uma explicação adequada da natureza das verdades matemáticas

Benacerraf afirma[8] que qualquer explicação adequada do conceito de verdade matemática tem de seadequar às seguintes exigências: (a) deve fornecer uma teoria universal da verdade, a qual garanta que a explicação do conceito de verdade matemática seja de fato

8 - Cf. Benacerraf (1973, pp. 666-667) uma explicação do conceito de verdade matemática, (b) tal explicação do conceito de verdade matemática deve implicar condições de verdade para proposições matemáticas (e não apenas condições de teoremicidade (*theoremhood*) em algum sistema formal) e (c) tal explicação tem de ser compatível com a existência de conhecimento matemático.

Outro modo de formular a exigência descrita em (a) consiste em dizer que qualquer explicação do conceito de verdade matemática tem de estar em conformidade com uma teoria mais geral da verdade, para que possamos certificar-nos de que a propriedade das frases matemáticas que a explicação em questão do conceito de verdade matemática encara como sendo a propriedade *ser verdadeiro* corresponde realmente à propriedade *ser verdadeiro*. Assim, uma explicação adequada do conceito de verdade matemática tem de estar em conformidade com uma análise da linguagem como um todo. Tal exigência parece reivindicar que o aparato semântico da matemática seja visto como uma parte ou uma parcela da linguagem natural, acerca da qual uma teoria mais geral da verdade é construída. Deste modo, qualquer explicação que forneça um tratamento semântico para nomes próprios, termos singulares, predicados e quantificadores terá de ser uma explicação também aplicável àquilo a que podemos chamar *matematequês* (*mathematese*), uma espécie de subconjunto da linguagem natural.

Assim, a exigência descrita em (a) implica que (2) deverá ser analisada como (1) via (3). As diferenças entre as proposições asseridas em (1) e em (2) estão relacionadas apenas à referência dos termos singulares (o objeto referido pelo nome próprio "Nova York" é concreto, ao passo que o objeto referido pelo numeral "17" é abstrato) e aos predicados atribuídos aos referentes destes termos.

As exigências descritas em (a) e em (b) parecem ser mais favoráveis à visão padrão do que à perspectiva combinatorial, pois a análise das condições de verdade das proposições matemáticas fornecida pelos defensores desta visão parece adequar-se muito claramente ao truísmo de Tarski. Na visão padrão, a proposição expressa pela frase "2 é par" será verdadeira se, e só se, existir um objeto — o referente do numeral "2" — que exemplifica a propriedade de ser par. Contudo, designar tal condição de verdade para a proposição de que 2 é par está bastante próximo da afirmação de que "2 é par" é verdadeira se, e somente se, 2 é par — isto é, está bastante próximo de afirmar que " 2 é par" é verdadeira se, e somente se, for o caso que 2 é par.

A visão combinatorial, por outro lado, não parece adequar-se tão bem ao truísmo deTarski. Os defensores da visão combinatorial afirmam que a proposição expressa pela frase "2 é par" é verdadeira, se e somente se, pode ser provada a partir de um conjunto especificado de axiomas. Isto parece não dizer qualquer coisa acerca de ser o caso que 2 é par ou não, pelo que a análise das condições de verdade das proposições matemáticas erguida pelos defensores da visão combinatorial não parece coadunar-se àquilo que o truísmo de Tarski — interpretado numa versão realista e não-deflacionista — diz-nos acerca da verdade de qualquer proposição, designadamente, que uma proposição é verdadeira se, e somente se, aquilo que ela diz for o caso.

Entretanto, aceitar (b) não equivale a negar que *ser um teorema* possa ser aquilo que fornece as condições de verdade de uma proposição matemática. Tudo o que se requer é que haja uma explicação da conexão entre *ser verdadeiro* e *ser um teorema* — isto é, entre verdade e teoremicidade[9].

A exigência descrita em (c) pressupõe que temos conhecimento matemático proposicional e que tal conhecimento não tem menos importância por ser conhecimento matemático proposicional. Dado que o conceito de conhecimento proposicional envolve fundamentalmente o conceito de verdade, uma explicação da natureza das verdades matemáticas que seja incompatível com a possibilidade de haver conhecimento matemático proposicional não será satisfatória. Assim, tal explicação terá de acomodar a possibilidade de nós, agentes cognitivos, sabermos que as condições de verdades atribuídas às proposições matemáticas em causa obtêm-se. Qualquer explicação da natureza das verdades matemáticas deve adequar-se, portanto, auma explicação geral do conhecimento, de tal maneira que torne inteligível o modo como temos o conhecimento matemático proposicional que temos.

Deste modo, a exigência segundo a qual uma semântica adequada para as asserções matemáticas deve adequar-se a uma epistemologia geral razoável implica que se sabemos, por exemplo, que Cuba situa-se entre a América do Norte e a América do Sul, então tem de haver uma certa relação entre as condições de verdade desta proposição e o nosso estado de crença "subjetivo" relativo a essa proposição[10]. Dado que as condições de verdade estabelecidas pela visão padrão são condições que se baseiam na existência de objetos matemáticos platônicos — cujas naturezas "coloca-os para além do alcance do mais adequado e reconhecido método de cognição (como, por exemplo, a percepção e outros métodos equivalentes)." (Benacerraf, 1973, p. 668) —, a tese de que tal visão não consegue acomodar a existência de conhecimento matemático proposicional começa a ganhar alguma plausibilidade.

A perspectiva combinatorial, por outro lado, parece acomodar tal preocupação epistêmica. Isto porque a estratégia geral dos defensores desta visão é a de analisar a

9 - Cf. Benacerraf (1973, p. 666)
10 - Cf. Benacerraf (1973, p. 667)

natureza das verdades matemáticas recorrendo ao modo como justificamos uma proposição matemática verdadeira, a saber, via prova. Segundo tal perspectiva, não há aparentemente mistérios acerca de como obtemos conhecimento matemático; em princípio, é perfeitamente possível que haja uma certa relação entre os nossos estados de crença "subjetivos" e as condições de verdade de uma proposição matemática, designadamente, neste caso, uma prova ou demonstração desta proposição. Entretanto, como já observado anteriormente, uma das dificuldades centrais enfrentadas por esta perspectiva combinatorial é a de explicar a conexão entre verdade e teoremicidade.

Em resposta a Benacerraf, um defensor da visão combinatorial poderá argumentar que uma vez afirmado que as condições de verdade de uma proposição matemática esgotam-se na sua derivabilidade de um conjunto especificado de axiomas, nada mais há para ser explicado acerca da conexão entre a verdade e a teoremicidade de uma proposição. Ao dizer que uma proposição matemática *P* é verdadeira se, e somente se, resulta como teorema de um número finito de axiomas mais regras de inferência num sistema matemático apropriado qualquer, estamos fornecendo, na verdade, uma redução da noção de verdade matemática à noção de provabilidade, isto é, à noção de *ser provável como teorema*. Deste modo, a conexão existente entre as noções de *ser verdadeiro* e *ser um teorema* é dada através desta relação de redução.

Ao propor as exigências descritas em (a), (b) e (c), Benacerraf procura mostrar que a visão padrão adequa-se, aparentemente, muito bem àquilo que se exige em (a) e em (b). A visão combinatorial, em contrapartida, não se adequa a tais exigências — pelas razões mencionadas acima —, muito embora tal visão pareça ser bastante adequada para acomodar a exigência epistêmica descrita em (c). Este é o primeiro passo para a defesa daquilo que é conhecido como o dilema de Benacerraf: se fornecemos uma semântica adequada para as frases matemáticas, não somos capazes de fornecer uma epistemologia razoável para a matemática, e se formos capazes de fornecer uma epistemologia razoável para a matemática, não seremos capazes de fornecer uma semântica adequada para as frases matemáticas. Separadamente, contudo, todas as exigências descritas em (a), (b) e (c) são neutras e bastante plausíveis. Benacerraf pretende mostrar, entretanto, que tomadas conjuntamente, tais exigências solapam qualquer explicação do conceito de verdade matemática.

1.3 O que há de errado com a visão padrão?

Benacerraf enumera uma série de vantagens de se adotar a visão padrão (ou platonismo) acerca da natureza das verdades matemáticas[11]. A primeira delas é a de nos permitir fornecer uma semântica uniforme para a linguagem como um todo, sendo dispensável a tarefa de construir uma nova e diferente semântica para a linguagem matemática. Neste sentido, as frases matemáticas e as frases empíricas são tratadas de forma análoga, visto que ambos os tipos de frases contêm termos singulares, predicados e quantificadores. Assim, a forma lógica das proposições expressas pelas frases "Há pelo menos três grandes cidades maiores que Nova York" e "Há pelo menos três números perfeitos maiores que 17" não têm apenas uma gramática superficial semelhante. Isto é, não são apenas sintaticamente semelhantes, mas também semanticamente semelhantes; têm condições de verdade análogas.

Aceitar a visão padrão também nos permite dar um tratamento uniforme ao longo da matemática e das ciências empíricas para o conceito de inferência. Segundo uma caracterização relativamente aceita da noção de inferência, estamos autorizados a inferir *P* de *Q* se, e somente se, for impossível que *Q* seja verdadeira e *P* seja falsa. A noção de inferência é, deste ponto de vista, explicada em termos semânticos, visto que recorre à noção de verdade. Podemos manter esta explicação mais comumente aceitada noção de inferência, caso adotemos a visão padrão; não estaremos, portanto, obrigados a reformular o nosso conceito de inferência matemática. Contrariamente, um defensor da visão combinatorial está obrigado a formular outra explicação da noção de inferência, pois a atitude de explicar a noção de inferência recorrendo à noção de verdade — quando se defende, de antemão, que a noção de verdade pode ser eliminada através da noção de inferência (ou derivabilidade) — seria circular.

Do ponto de vista de Benacerraf, a principal desvantagem da visão padrão é a de não ser compatível com uma explicação bastante geral e plausível acerca da natureza do conhecimento proposicional, qual seja, a *explicação causal do conhecimento proposicional*. De acordo com tal explicação, condição necessária para um agente cognitivo *X* saber que uma proposição *S* é verdadeira é haver uma relação causal entre *X* e os referentes dos nomes, predicados e quantificadores da frase que exprime *S*. Admitindo que esta é uma explicação aproximadamente correta — aplicável a todos os tipos de conhecimento proposicional —, torna-se difícil ver como o platonismo matemático poderia acomodar e explicar a existência de conhecimento matemático, visto que, nesta perspectiva, os objetos que constituem o domínio de quantificação das proposições matemáticas são abstratos — isto é, são objetos causalmente inertes que não existem no espaço e no tempo.

Mais especificamente, de acordo com esta teoria causal do conhecimento, se um agente cognitivo sabe que *P*, então tem de haver uma relação causal entre a crença deste agente

11 - Cf. Benacerraf (1973, pp. 669-670) cognitivo em *P* e aquilo que torna *P* verdadeira. Por exemplo, se João sabe que o objeto preto que se encontra no seu tapete é um gato, então que o objeto preto que está no seu tapete seja um gato tem de ser adequadamente mencionado numa explicação causal da sua crença na proposição de que o objeto preto que se encontra no seu tapete é um gato. O argumento de Benacerraf a favor da tese de que tal visão tem de estar correta e está na base da nossa concepção de conhecimento — embora seja uma explicação simplista da natureza do conhecimento — está expresso na seguinte passagem:

> "Que alguma visão deste tipo tem de estar correta e está na base da nossa concepção de conhecimento é indicado por aquilo que diríamos nas seguintes circunstâncias. Afirma-se que *X* sabe que *p*. Pensamos que *X* poderia não saber que *p*. Quais razões podemos fornecer a favor da nossa visão? Se estivermos convencidos de que *X* tem poderes inferenciais normais, de que *p* é de fato verdadeira, etc., somos redirecionados para o raciocínio de que *X* poderia não ter vindo a possuir as razões ou evidências suficientes: que o túnel de espaço-tempo tetradimensional no qual *X* está não faz o contato necessário com os fundamentos da verdade da proposição para que *X* possua a evidência adequada para sustentar a inferência"
>
> (Benacerraf, 1973, pp. 671-672)

O argumento presente nesta passagem pode ser reformulado do seguinte modo:

(1) Para qualquer proposição *P*, se há algum agente cognitivo *S* que sabe que *P*, então é possível que *S* não soubesse que *P*.

(2) Mas se é possível que *S* não soubesse que *P*, e se ainda assim *S* tem uma crença verdadeira em P, então a melhor explicação para o fato de que *S* poderia não saber que *P* é a inexistência de contato causal entre as razões da verdade de *P* (aquilo que torna *P* verdadeira) e o aparato cognitivo espaciotemporal de *S*.

Contudo,

(3) Se a inexistência de contato causal entre as razões da verdade de *P* (aquilo

que torna *P* verdadeira) e o aparato cognitivo espaciotemporal de *S* é aquilo que melhor explica o fato de que *S* poderia não saber que *P*, então o contato causal entre aquilo que torna *P* verdadeira e o aparato cognitivo espaciotemporal de *S* é condição necessária para *S* saber que *P*.

(4) Mas se o contato causal entre aquilo que torna *P* verdadeira e o aparato cognitivo espaciotemporal de *S* é condição necessária para *S* saber que *P*, então a explicação simplista acerca da natureza geral do conhecimento segundo a qual o estado de coisas que torna uma proposição verdadeira desempenha um papel causal na formação da nossa crença nesta proposição está correta.

Logo,

(5) Para qualquer proposição *P*, se há algum agente cognitivo *S* que sabe que *P*, então a explicação simplista acerca da natureza geral do conhecimento segundo a qual o estado de coisas que torna *P* verdadeira desempenha um papel causal na formação da nossa crença em *P* está correta.

Esta parece ser uma explicação perfeitamente adequada para o conhecimento de objetos físicos. Tal explicação implica referência direta aos fatos conhecidos e, através disto, referência aos objetos que constituem tais fatos. Evidentemente, o conhecimento de objetos físicos, tais como mesas, gatos, árvores, etc., constitui o caso mais claro e fácil de lidar. É defensável, contudo, que nem todo o conhecimento da realidade empírica inclui esta componente causal. O conhecimento de muitas proposições da ciência acerca de fatos passados (e também futuros) é inferencial e não-causal. Benacerraf reconhece este aspecto[12], mas não considera que isto seja uma dificuldade proeminente à teoria causal do conhecimento por ele defendida, pois embora não pareça razoável dizer que tais proposições possam ser justificadas via alguma conexão entre os estados de coisas em virtude dos quais são verdadeiras e as nossas crenças em tais proposições, poder-se-á dizer que aquilo que justifica a verdade de tais proposições é o fato de poderem ser adequadamente inferidas de outras proposições mais básicas, as quais são acerca de estados de coisas com os quais podemos manter algum tipo de relação causal.

De acordo com esta teoria causal do conhecimento, se um agente cognitivo *X* sabe que

12 - Cf. Benacerraf (1973, p. 672)

P, então a crença de *X* em *P* tem de estar relacionada de um modo causalmente apropriado com aquilo que é o caso quando *P* é verdadeira. A existência de tal relação causal é condição necessária para que *X* tenha evidências e razões suficientes para acreditar em *P*, embora a conexão entre aquilo que tem de ser o caso para *P* ser verdadeira e as causas da crença de *X* em *P* possa variar bastante[13]. Deste ponto de vista, tem de ser possível estabelecer uma conexão entre as condições de verdade de *P* e as razões em virtude das quais *P* é verdadeira. A conexão entre as razões em virtude das quais *P* é verdadeira e a crença de algum agente cognitivo em *P* é condição necessária para que a crença em *P* esteja justificada.

Se aceitarmos aquilo que tradicionalmente tem sido considerado como condição necessária do conhecimento, designadamente, crença, verdade e justificação, então esta conexão entre crença e aquilo em virtude do qual uma proposição é verdadeira terá inevitavelmente de existir, visto que tal conexão é aquilo que permite a existência de justificações.

Entretanto, como já observado anteriormente, ao combinarmos esta explicação acerca do conhecimento em geral com a visão padrão acerca das verdades matemáticas, não conseguimos ver como o conhecimento matemático é possível. Se números, por exemplo, são entidades platônicas, então não se pode construir uma conexão entre as condições de verdade atribuídas às proposições de teoria dos números e qualquer evento relacionado às pessoas que supostamente conhecem tais proposições. Será impossível explicar como alguém pode conhecer alguma proposição de teoria dos números. Assim, se aceitarmos a visão padrão, não teremos uma explicação de como sabemos que as condições de verdade atribuídas às proposições matemáticas obtêm-se — isto é, não poderemos justificar as nossas crenças matemáticas.

Analogamente, se aceitarmos a idéia de que uma explicação adequada de como termos singulares referem terá também de incorporar elementos causais, não conseguiremos explicar como podem os termos singulares de uma frase matemática referir os objetos matemáticos abstratos que supostamente referem. Formulada de uma maneira bastante simplória, tal explicação diz-nos que se um termo singular *b* refere um objeto *u* qualquer, então há uma relação causal entre *b* (que deve ser encarado como um objeto linguístico, porém concreto) e *u* (seja qual for a natureza de u). Tem de haver, portanto, uma relação causal entre termos singulares e referentes de termos singulares. Contudo, se o referente de um termo singular é um objeto abstrato, não haverá qualquer relação causal (posto que objetos abstratos são causalmente inertes) entre este termo singular e o seu referente.

A estratégia de endossar a defesa de uma explicação causal da referência de termos

13 - *Ibid.*

singulares conjuntamente à defesa de uma teoria causal do conhecimento permite construir um argumento epistêmico mais poderoso a favor da tese de que a visão platonista da matemática é incompatível com a existência de conhecimento matemático proposicional. A idéia aqui subjacente é a de que se não conseguirmos explicar como é possível que um termo singular refira o objeto que supostamente refere — por exemplo, se não conseguirmos explicar como pode o numeral “2” referir o objeto platônico 2 —, seremos incapazes de fornecer uma explicação da natureza das verdades matemáticas, posto que seremos incapazes de explicar a própria existência de verdades matemáticas. Se não podemos explicar, por exemplo, como o numeral “2” refere o objeto abstrato 2, então não podemos explicar como a proposição expressa pela frase “2 é par” poderá sequer ser verdadeira, pois se um termo singular de uma frase do tipo *Fa* fracassa em referir, então a proposição expressa por tal frase não será de todo em todo verdadeira. Contudo, dado que a verdade é condição necessária do conhecimento, não poderemos fornecer uma explicação adequada do conhecimento matemático sem garantir de antemão a existência de verdades matemáticas.

Deste modo, a visão padrão mostra-se incapaz não apenas de fornecer uma epistemologia razoável para a matemática, mas também de fornecer uma semântica adequada para a matemática, pois qualquer explicação satisfatória da semântica de uma dada frase deve acomodar e explicar a possibilidade deos termos singulares constituintes desta frase referirem aquilo que supostamente referem.

1.4 O que há de errado com a visão combinatorial?

Entretanto, Benacerraf também não considera que a visão combinatorial seja adequada para responder à questão de como funciona o processo através do qual adquirimos o conhecimento matemático proposicional que efetivamente temos[14]. Do seu ponto de vista, recorrer à demostrabilidade das proposições matemáticas para fornecer uma explicação de como sabemos que as condições de verdade atribuídas a tais proposições obtêm-se parece não funcionar muito bem, visto que, neste caso, careceríamos ainda de uma conexão entre verdade e demostrabilidade.

Como já mencionamos, entretanto, esta acusação benacerrafiniana — segundo a qual um defensor da visão combinatorial está obrigado a dizer algo mais para além da afirmação de que uma proposição matemática é verdadeira se, se somente, pode ser demostrada a partir de um conjunto especificado de axiomas — parece infundada. O objetivo desta

14 - Cf. Benacerraf (1973, p. 675)

perspectiva é reduzir a natureza das verdades matemáticas à noção de prova matemática.

Há, contudo, outra objeção aparentemente mais promissora à tese de que um defensor da visão combinatorial seja capaz de explicar a existência de conhecimento matemático proposicional. Tal objeção recorre à idéia de que provas ou demonstrações têm de ser encaradas como entidades abstratas. Se considerarmos uma prova de um teorema qualquer — por exemplo, a prova do primeiro teorema de Gödel —, não parece fazer sentido dizer, acerca de um certo conjunto de símbolos num papel (mesmo admitindo que não se trata apenas de símbolos, mas sim de símbolos com significado), que tais símbolos correspondem à prova do primeiro teorema de Gödel. De outro modo, estaríamos obrigados a aceitar que há mais de uma prova para o primeiro teorema de Gödel, o que é, no entanto, extremamente implausível. Porém, se provas são entidades abstratas, então não é possível haver qualquer tipo de interação causal entre aquilo em virtude do qual supostamente resulta o nosso conhecimento matemático — nomeadamente, uma prova ou demonstração — e o nossos estados de crença. Do ponto de vista de um defensor da visão combinatorial, todo o conhecimento matemático proposicional é obtido e transmitido via prova, mas se tais provas são entidades abstratas causalmente inertes, então a existência de tal conhecimento torna-se ininteligível.

Contudo, mesmo que a visão combinatorial tivesse recursos para fornecer uma explicação adequada do conhecimento matemático proposicional, resta saber se tal visão realmente desempenha a tarefa de fornecer uma semântica adequada para as frases matemáticas. E como já observamos anteriormente, parece haver uma incompatibilidade entre algumas consequências do primeiro teorema de Gödel — a saber, a consequência de que há verdades matemáticas que não podem ser provadas— e uma das teses pressupostas pela visão combinatorial, nomeadamente, a tese de que uma asserção é uma verdade matemática se, se somente se, pode ser provada a partir de um número finito de axiomas.

1.5 A formulação do dilema

Deste modo, a tese benacerrafiniana segundo a qual qualquer pacote de explicações que pretenda fornecer simultaneamente uma explicação da semântica envolvida na linguagem matemática e uma explicação do processo através do qual obtemos conhecimento matemático proposicional começa a ganhar plausibilidade. Cada uma das explicações até agora apresentadas enfrentam dificuldades tanto na tarefa de fornecer uma semântica adequada para a matemática, como na tarefa de fornecer uma epistemologia razoável para a matemática.

Se ignorarmos a idéia de que a visão padrão não fornece afinal uma explicação semântica adequada para as frases da linguagem matemática — posto não fornecer uma explicação de como é possível para os termos singulares de uma frase matemática referir uma entidade abstrata —, tal visão torna, ainda assim, obscura a existência de conhecimento matemático proposicional, pelas razões já mencionadas.

Por outro lado, se ignorarmos as dificuldades que um defensor da visão combinatorial enfrenta para fornecer uma explicação razoável de como obtemos conhecimento matemático proposicional, será ainda assim implausível que esta visão permita-nos estabelecer as condições de verdade para todas as frases da linguagem matemática.

Assim, parece que estamos autorizados a afirmar que ainda que sejamos capazes de fornecer uma semântica adequada para a linguagem matemática, tal semântica entrará em conflito com uma epistemologia razoável suficientemente clara para explicar a existência de conhecimento matemático proposicional. Em contrapartida, se formos capazes de fornecer tal epistemologia — e a rota para isto é estabelecer a possibilidade de uma conexão entre aquilo que é conhecido e aquilo que conhece —, não seremos capazes de fornecer a requerida semântica adequada para a linguagem matemática. Logo, a seguinte disjunção exclusiva parece ser verdadeira: ou podemos fornecer uma semântica adequada para a matemática ou podemos fornecer uma epistemologia razoável para a matemática. Este é o dilema de Benacerraf.

2. O argumento epistêmico contra a visão platonista da matemática: algumas tentativas de resposta

2.1 Primeira versão do argumento

Embora o dilema de Benacerraf não esteja comprometido com a falsidade do platonismo matemático — dado que a implicação deste dilema é apenas a condicional de que se adotarmos tal visão, seremos incapazes de fornecer uma epistemologia razoável para a matemática —, tal dilema pode ser usado para argumentar diretamente contra a visão platonista da matemática.

Deste modo, o seguinte argumento pode ser explicitamente formulado contra o platonismo matemático:

> (I) Se as proposições da matemática fossem acerca de objetos abstratos, então não poderíamos conhecê-las. Isto é, se a proposição expressa pela frase "3 é ímpar" é acerca de um objeto que não existe no espaço e no tempo, então não poderíamos saber que 3 é ímpar.

Contudo,

> (II) Que o conhecimento de proposições da matemática seja possível é algo incontroverso.

Logo,

> (III) As proposições da matemática não são acerca de objetos abstratos.

A única maneira razoável de rejeitar este argumento é negar (I), pois a afirmação presente em (II) segundo a qual o conhecimento matemático é possível não parece minimamente problemática. Entretanto, (I) pressupõe a verdade da teoria causal do conhecimento, a qual poderá ser formulada do seguinte modo:

> (*Teoria causal do conhecimento*): Se *S* sabe diretamente que *P*, então há uma relação causal entre (d) seja o que for que faz *P* ser verdadeira e (e) a crença de *S* em *P*, no sentido em que (d) causa (e).

De acordo com esta teoria causal do conhecimento, se Maria sabe que João é alto, por exemplo, então há uma relação causal entre a crença de Maria na proposição de que João é alto e o objeto concreto João, o qual constitui o fato correspondente à proposição expressa pela frase "João é alto". Assim, se Maria sabe que João é alto, então o objeto concreto João desempenha algum papel causal na formação da crença verdadeira de Maria acerca de João.

Ora, se esta for uma explicação adequada do processo de formação de crenças verdadeiras, então (I) é verdadeira, pois as entidades abstratas são causalmente inertes precisamente porque não existem no espaço e no tempo. Se aquilo em virtude do qual a proposição expressa pela frase "3 é ímpar" é verdadeira é um objeto abstrato, então não há qualquer agente cognitivo capaz de formar uma crença verdadeira acerca desse objeto. Logo, o conhecimento da proposição de que 3 é ímpar não é possível neste cenário.

2.2 A resposta de Gödel

Kurt Gödel (1964) parece defender não apenas aquilo a que temos chamado *visão padrão acerca da natureza das verdades matemáticas* (noutras palavras, platonismo matemático) — dada a sua afirmação de que "os objetos da teoria dos conjuntos transfinita [...] claramente não pertencem ao mundo físico e mesmo as suas conexões indiretas com a experiência física é bastante vaga [...]" (Gödel, 1964, p. 271) —, mas também a tese de que tal o platonismo matemático não envolve obscuridades epistêmicas. Do seu ponto de vista, temos algum tipo de percepção destes objetos matemáticos através da auto-evidência dos axiomas da teoria cujo domínio ontológico é constituído por tais objetos. Isto parece ser exatamente o que está em causa na sua afirmação de que "temos de fato uma percepção também dos objetos da teoria dos conjuntos, como é visto através do fato de que os axiomas forçam-se sobre nós como sendo verdadeiros" (Gödel, 1964, p. 271). Esse tipo de percepção — a qual nada mais é do que uma intuição matemática — não é menos confiável que a percepção sensorial através da qual conhecemos a realidade física.

Deste modo, Gödel parece reconhecer que temos de fornecer algum tipo de explicação para o modo como obtemos conhecimento matemático, tal como temos de especificar quais são os primeiros passos de uma explicação exaustiva do modo como obtemos conhecimento de objetos concretos.

A crítica de Benacerraf a esta proposta consiste em dizer que tal explicação é destituída de conteúdo[15], a menos que se forneça uma explicação adicional acerca de como exatamente tais axiomas forçam-se sobre nós; a existência de uma conexão entre as nossas faculdades cognitivas e os objetos conhecidos é obscura neste cenário. Relativamente às ciências empíricas, por exemplo, podemos fornecer pelo menos o princípio sob o qual uma explicação adequada do conhecimento empírico deve assentar-se: embora haja bastante controvérsia quanto às explicações do nosso conhecimento da realidade física, parece incontroverso que o princípio segundo o qual há algum tipo de relação causal entre o nosso aparato cognitivo e o mundo físico está correto.

15 - Cf. Benacerraf (1973, p. 674)

Do ponto de vista de Benacerraf, a analogia construída por Gödel entre a percepção sensorial, através da qual conhecemos o mundo físico, e a percepção matemática (intuição matemática), através da qual conhecemos o reino de objetos matemáticos, é na melhor das hipóteses superficial[16]. A existência de uma relação causal entre os estados de coisas que tornam verdadeira uma proposição acerca do mundo e o nosso estado de crença relativo a tal proposição é o alicerce de uma explicação adequada do conhecimento empírico. Quando passamos a considerar o conhecimento matemático sob a perspectiva sugerida por Gödel, não háqualquer explicação acerca de como a nossa suposta intuição matemática está conectada às condições de verdade das proposições matemáticas conhecidas. Esta explicação do conhecimento matemático será, portanto, insatisfatória.

Talvez seja possível argumentar que a crítica de Benacerraf a Gödel é apressada e pouco caridosa. Isto porque ao recorrer a uma espécie de percepção do intelecto — a saber, a intuição matemática — para tentar explicar como é possível que haja conhecimento de objetos matemáticos abstratos, Gödel parece cumprir a tarefa de fornecer um *insight* inicial daquilo que poderá vir a ser uma teoria exaustiva do conhecimento matemático proposicional.

2.3 A estratégia de Hale: ataques à teoria causal do conhecimento

Se rejeitarmos a idéia de que a teoria causal do conhecimento acima mencionada seja uma explicação adequada do conhecimento em geral, estaremos autorizados a rejeitar (I). Neste sentido, nem todo o conhecimento proposicional obedece à exigência de haver uma relação causal entre aquilo que torna uma proposição verdadeira e a nossa crença nesta proposição.

Podemos argumentar, mais especificamente, que tal explicação causal do conhecimento é incompatível com a existência de conhecimento *a priori*. Considere-se, por exemplo, a minha crença verdadeira de que João é alto ou não é alto. Embora seja razoável pensar que o objeto concreto João contribui para a verdade da proposição expressa pela frase "João é alto ou não é alto", é implausível que eu tenha de ter qualquer tipo de contato com João para que eu possa saber que João é ou não é alto. Ao compararmos o conhecimento da proposição expressa pela frase "João é alto" com o conhecimento da proposição expressa pela frase "João é alto ou não é alto", percebemos que a teoria causal do conhecimento aplica-se ao primeiro caso, mas não ao segundo. Embora o contato com o objeto concreto João seja uma condição necessária para o conhecimento direto da proposição expressa pela

16 - *Ibid.*

frase "João é alto", o contato com o objeto concreto João não parece ser condição necessária para que alguém possa saber que João é alto ou não é alto. O conhecimento direto de proposições primitivamente conhecíveis *a posteriori* exige algum tipo de contato com os objetos dos quais elas são acerca, porém isto não se aplica ao conhecimento de proposições primitivamente conhecíveis *a priori*.

O conhecimento matemático proposicional primitivo é *a priori*, pois não parece envolver qualquer recurso à experiência. A teoria causal do conhecimento pode ser incompatível com este fato. Se considerarmos apenas o processo de formação de crenças verdadeiras acerca do mundo físico, uma explicação causal do conhecimento parece-nos adequada; como já dito, se Maria sabe que João é alto, parece razoável pensar que o objeto concreto João desempenha algum papel causal na formação da crença verdadeira de Maria acerca de João. Isto é, parece haver uma relação causal entre o objeto concreto João e a crença verdadeira de Maria acerca de João. Este tipo de explicação não se aplica, entretanto, ao conhecimento matemático. Deste modo, se a explicação causal do conhecimentoestivesse correta, então não haveria conhecimento *a priori*. Mas isto é implausível. Logo, tal explicação não é adequada.

Esta é a estratégia adotada por Hale (1987, pp. 125-125) para tentar responder ao desafio benacerrafiniano de mostrar como é possível que tenhamos conhecimento de proposições que sejam acerca de objetos matemáticos abstratos. Do seu ponto de vista, dado que o conhecimento matemático proposicional é conhecimento *a priori*, a inteligibilidade de tal conhecimento é independente daquilo acerca do qual as proposições da matemática são acerca — isto é, o conhecimento matemático é inteligível independentemente da questão de ser conhecimento acerca de objetos abstratos ou não. Contudo, a resposta de Hale ao desafio epistêmico benacerrafiniano consiste não apenas em mostrar que uma epistemologia razoável para a matemática é perfeitamente compatível com a idéia de que as verdades da matemática são acerca de objetos abstratos, mas também em tentar refutar a teoria causal do conhecimento[17]. Uma das objeções formuladas por Balaguer (1998, pp. 36-37) contra Hale consiste em dizer que as réplicas ao argumento epistêmico contra o platonismo matemático devem ser direcionadas às versões deste argumento que estejam desvinculadas de teorias causais do conhecimento.

2.4 Segunda versão do argumento

Será possível, entretanto, formular o argumento epistêmico contra a visão platonista da

17 - Cf. Hale (1987, cap. 4 e 5)

matemática sem pressupor alguma forma de teoria causal do conhecimento? Consideremos a seguinte versão formulada por Linnebo[18]:

> "**Premissa 1**.
>
> Os matemáticos são confiáveis, no sentido em que para quase toda a frase matemática *S*, se os matemáticos aceitam *S*, então *S* é verdadeira.
>
> **Premissa 2**.
>
> Para que a crença na matemática possa ser justificada, tem de ser possível, pelo menos em princípio, explicar a confiabilidade descrita na Premissa 1.
>
> **Premissa 3**.
>
> Se o platonismo matemático for verdadeiro, então tal confiabilidade não pode, mesmo em princípio, ser explicada."
>
> (Linnebo, 2013, seção 4.1)

É controverso que esta versão do argumento epistêmico contra o platonismo matemático não pressuponha alguma forma de teoria causal do conhecimento. Embora as primeiras duas premissas sejam razoáveis, o único tipo de justificação que poderíamos fornecer para aceitar a premissa 3 seria uma justificação baseada na idéiade que não pode haver conhecimento que seja acerca de entidades abstratas. Se tal conhecimento não for possível, segue-se que a confiabilidade do conhecimento matemático, conhecimento este originalmente obtido por matemáticos, não poderá ser garantida. Assim, a premissa 3 parece pressupor a verdade do seguinte princípio:

> *Princípio de confiabilidade epistêmica*: se *S* acredita que *P*, e se *P* é acerca de entidades abstratas, então não se pode garantir que *S* sabe que *P*

Podemos recusar este princípio postulando a existência de um tipo especial de faculdade cognitiva que nos permite formar crenças verdadeiras acerca de objetos com os quais não temos qualquer tipo de contato. Tal faculdade cognitiva nada mais é do que a intuição matemática. Não se trata de defender, entretanto, como na perspectiva de Gödel, a existência

18 - Esta versão é uma reconstrução da versão formulada por Field (1989) de uma intuição matemática através da qual podemos ter algum tipo de *percepção não-sensorial* dos objetos matemáticos. A intuição matemática não está associada a qualquer tipo de percepção, nesta perspectiva. O propósito de um defensor desta alternativa é mostrar que, além da percepção sensorial — que deve ser entendida como uma faculdade cognitiva a qual nos permite formar crenças verdadeiras acerca de entidades perceptíveis —, há também outra faculdade cognitiva (a intuição matemática) que nos permite formar crenças verdadeiras acerca de entidades abstratas, muito embora o processo de formação de crenças verdadeiras oriundo desta faculdade não se baseie no contato com as entidades conhecidas. Parsons (1980, 1994), Steiner (1975) e Katz (1981) são alguns dos proponentes desta estratégia.

A objeção proposta por Balaguer (1998, pp. 39-40) a esta alternativa consiste em dizer que o apelo à existência de um tipo especial de faculdade cognitiva que nos permite formar crenças verdadeiras acerca de objetos abstratos só é epistemologicamente útil se acompanhado de uma explicação acerca da confiabilidade deste tipo de faculdade cognitiva. Visto que se trata de uma faculdade cognitiva a qual não se baseia no contato, não podemos estar justificados em pensar que as crenças formadas através desta faculdade são verdadeiras.

Talvez seja possível dissolver esta objeção aceitando a idéia de que o conhecimento matemático proposicional seja conhecimento de proposições necessárias. Assim, aquilo que justifica a confiabilidade do conhecimento matemático proposicional formado via intuição matemática é o fato de tal conhecimento ser conhecimento de proposições matemáticas necessárias[19]. Deste ponto de vista, podemos saber que 3 é ímpar ainda que não tenhamos qualquer tipo de contato com o referente do termo "3", pois a proposição expressa pela frase "3 é ímpar" é uma verdade necessária. A única razão pela qual o contato é condição necessária ao conhecimento de proposições que sejam acerca de objetos concretos é que tais proposições são contingentemente verdadeiras. Assim, por exemplo, a única razão pela qual o contato causal é condição necessária para que possamos saber diretamente que as esmeraldas são verdes é que tais objetos poderiam não ser verdes. A proposição expressa pela frase "As esmeraldas são verdes" é contingentemente verdadeira, e é apensas por isto que o contato causal com os objetos dos quais ela é acerca —nomeadamente, as esmeraldas — é condição necessária para a conhecermos.

Este tipo de resposta pressupõe, contudo, que todas as proposições que são acerca de objetos concretossão verdades contingentes. Pressupõe que a tese essencialista segundo a qual há particulares que exemplificam essencialmente algumas propriedadesnão-triviais é falsa. Um defensor dessa tese dirá, por exemplo, que muitas das propriedades exemplificadas por objetos pertencentes a categorias naturais, como as esmeraldas, são propriedades

19 - Cf. Katz (1981, p. 207)

essenciais, isto é, são propriedades que tais objetos têm e não poderiam deixar de as ter. Se aceitarmos esta tese, então não será óbvio, por exemplo, que a proposição expressa pela frase "As esmeraldas são verdes" (ou "O fogo é amarelo") seja umaverdade contingente. Se a propriedade *ser verde* é uma propriedade essencial das esmeraldas, então a proposição de que as esmeraldas são verdes deverá ser encarada como uma verdade necessária. Esta não é, portanto, uma via promissora para tentar justificar a confiabilidade do conhecimento matemático proposicional oriundo da intuição matemática.

Contudo, a idéia de Balaguer segundo a qual temos de fornecer uma explicação acerca da confiabilidade epistêmica da intuição matemática não nos parece uma objeção razoável, pois o mesmo tipo de raciocínio utilizado nesta objeção poderá ser aplicado para duvidar também da confiabilidade da percepção sensorial. Assim, se estamos autorizados a exigir uma explicação acerca da confiabilidade do conhecimento matemático proposicional gerado via intuição matemática, também estamos autorizados a exigir uma explicação da confiabilidade do conhecimento proposicional gerado via percepção sensorial.

Poder-se-á argumentar, no entanto, em defesa da objeção de Balaguer, que tal explicação existe e é baseada na possibilidade de haver interação causal entre os veridadores das proposições conhecidas através da percepção sensorial e os estados de crença dos agentes cognitivos que acreditam nestas proposições. Mas isto não parece ser suficiente para justificar a confiabilidade do conhecimento gerado via percepção sensorial. A interação causal existente entre duas coisas — neste caso, entre estados de coisas do mundo físico e os nossos estados de crenças — é algo relativamente ao qual podemos sempre manter uma postura cética. Será sempre possível duvidar, por exemplo, da existência de interação causal entre o meu estado de crença relativo à proposição de que tenho uma mão e o veridador dessa proposição. Nada pode garantir a existência desta interação causal. Mas se tal interação causal não pode ser garantida, então o meu conhecimento proposicional (de que tenho uma mão) — conhecimento este gerado via percepção sensorial — também não poderá ser garantido. Logo, a confiabilidade de tal conhecimento não poderá ser justificada com base em alguma forma de interação causal.

No entanto, talvez a estratégia de tentar rejeitar o princípio de confiabilidade epistêmica postulando a existência de um tipo especial de faculdade cognitiva — a saber, a intuição matemática — seja uma estratégia arbitrária, pois trata-se de postular a existência de uma faculdade cognitiva em relação a qual não dispomos de quaisquer outras razões para pensar que existe. Seria *ad hoc* argumentar a favor da tese de que há este tipo de faculdade cognitiva com base na afirmação de que isto permite-nos justificar a confiabilidade do conhecimento matemático proposicional.

3. A proposta de Balaguer: o platonismo da plenitude

A proposta de Balaguer[20] para responder ao desafio epistêmico benacerrafiniano não apela à existência de um tipo especial de faculdade cognitiva através da qual possamos justificar a confiabilidade do nosso conhecimento matemático proposicional. A sua estratégia consiste em tentar mostrar que se reformularmos a versão tradicional do platonismo matemático — acrescentando-lhe outra tese a qual diz respeito à quantidade de objetos matemáticos existentes —, conseguiremos responder muito facilmente ao desafio benacerrafiniano de compatibilizar o conhecimento de proposições matemáticas com o suposto fato de que tais proposições são acerca de entidades abstratas. Do ponto de vista de Balaguer, esta outra versão do platonismo matemático consiste na conjunção das seguintes teses:

(A) Há objetos matemáticos

(B) Tais objetos são abstratos

(C) Tais objetos existem necessariamente e independentemente de quaisquer agentes cognitivos capazes de os conceber

(D) Todos os objetos matemáticos que logicamente poderiam existir existem

(E) As verdades da matemática são acerca destes objetos

A este tipo de platonismo matemático chamamos *platonismo matemático da plenitude*, pois em (D) afirmamos que todos os objetos matemáticos que logicamente poderiam existir existem de fato. Assim, basta que o conceito de um objeto matemático qualquer seja consistente para que tal objeto exista.

Como a proposta de Balaguer permite-nos responder à segunda versão do argumento epistêmico contra a visão platonista da matemática sem apelar à existência de intuição matemática? A estratégia de Balaguer também consiste em rejeitar o princípio de confiabilidade epistêmica segundo o qual se *S* sabe que *P*, e se *P* é acerca de entidades abstratas, então não se pode garantir que *S* sabe que *P*.

Chamemos *R* à proposição expressa pela seguinte frase "Na França, há uma cidade cujos habitantes são todos albinos". O nosso conhecimento direto de *R* claramente obedece ao princípio de confiabilidade epistêmica; isto é, para que possamos saber diretamente que há

20 - Cf. Balaguer (1998, capítulo 3) uma cidade na França cujos habitantes são todos albinos, temos ir até esta suposta cidade e ver que todas as pessoas que lá vivem são albinas. Assim, o conhecimento direto de *R* exige alguma espécie de interação causal entre nós —agentes cognitivos — e o objeto acerca do qual *R* é, designadamente, a suposta cidade francesa na qual todas as pessoas são albinas.

Consideremos, entretanto, a situação contrafactual na qual todas as cidades francesas que logicamente poderiam existir existem. Neste cenário, há na França uma cidade cujos habitantes são todos ruivos, outra na qual pelo menos uma pessoa é atropelada todos os dias, outra na qual 50% dos habitantes são albinos, outra na qual apenas 20% dos habitantes são albinos, e assim infinitamente até que se esgote todas as possibilidades lógicas. Se este fosse o cenário efetivo, então qualquer proposição acerca de cidades francesas seria uma descrição verdadeira de alguma cidade que realmente existe na França, desde que tal proposição não seja uma impossibilidade lógica. Assim, as proposições expressas pelas frases "A quarenta quilômetros de Paris situa-se uma cidade na qual 50% das pessoas são ruivas" e "Na França, há uma cidade cujos os habitantes são todos solteiros" descreveriam verdadeiramente duas cidade francesas, ao contrário da proposição expressa pela seguinte outra frase "Na França, há uma cidade cujos todos os habitantes são solteiros e cujos alguns habitantes são casados"; as primeiras são possibilidades lógicas, ao passo que a última é uma impossibilidade lógica (ou conceitual).

Neste cenário, o princípio de confiabilidade epistêmica acima mencionado é falso. Sendo *R* a proposição expressa pela frase "Há uma cidade francesa cujos os habitantes são todos albinos" e *S* um agente cognitivo qualquer, então *S* pode saber que *R*, muito embora não haja qualquer tipo de contato entre o objeto do qual *R* é acerca — designadamente, a cidade francesa cujos os habitantes são todos albinos — e *S*. Dado que todas as cidades francesas que logicamente poderiam existir existem, *R* é verdadeira. Assim, se *S* acredita que *R*, então *S* tem uma crença verdadeira. Evidentemente, disto não se segue que *S* sabe que *R*. Porém, se *S* sabe que todas as cidades francesas que logicamente poderiam existir existem, então *S* está adequadamente justificado em acreditar na proposição de que há uma cidade francesa cujos os habitantes são todos albinos, visto que tal proposição é uma possibilidade lógica. Logo, se *S* sabe que todas as cidades francesas que logicamente poderiam existir existem e se *S* acredita que *R*, então a crença de *S* em *R* é verdadeira e justificada, pelo que *S* sabe que *R*.

Se aceitarmos o platonismo matemático da plenitude, então a condicional do princípio de confiabilidade epistêmica será falsa. Se o platonismo matemático da plenitude for verdadeiro — isto é, se a realidade acomoda um reino matemático pleno —, então para alguma proposição matemática *P* e algum agente cognitivo *S*, as seguintes três condições serão possíveis:

- Que *S* sabe que *P*
- Que *P* é acerca de entidades abstratas
- Pode-se garantir que *S* sabe que *P*

Deste modo, a antecedente do princípio de confiabilidade epistêmica é verdadeira, mas a sua consequente falsa. Poderá ser o caso que, por exemplo, *S* sabe que 2 é par, a proposição de que 2 é par seja uma proposição acerca de objetos matemáticos abstratos e podemos garantir que *S* sabe que 2 é par. Isto porque sendo a proposição de que 2 é par uma possibilidade lógica, então se *S* acredita nesta proposição, *S* terá automaticamente uma crença matemática verdadeira, a qual é garantida pelo princípio de plenitude segundo o qual toda a proposição matemática que não seja uma contradição lógica ou conceitual é uma proposição verdadeira que descreve alguma parte do reino matemático. O argumento a favor da idéia de que a verdade da tese da plenitude implica a falsidade do princípio de confiabilidade epistêmica pode ser entendido como um argumento por analogia, o qual poderá ser formulado do seguinte modo:

> (**1ª Premissa**) Se todas as cidades francesas que logicamente poderiam existir existissem, então qualquer proposição que seja acerca de cidades francesas descreveria verdadeiramente pelo menos uma cidade que realmente existe na França, desde que tal proposição não seja uma contradição.
>
> (**2ª Premissa**) Mas se qualquer proposição não contraditória que seja acerca de cidades francesas descreve verdadeiramente pelo menos uma cidade que realmente existe na França, então sendo *P* uma proposição qualquer acerca de alguma cidade francesa e *S* um agente cognitivo qualquer, as seguintes duas condições são conjuntamente suficientes e individualmente necessárias para *S* saber que *P*: (a) *S* acreditar em *P* e (b) *S* estar adequadamente justificado em acreditar que todas as cidades francesas que logicamente poderiam existir existem — isto é, *S* saber que todas as cidades francesas que logicamente poderiam existir existem.
>
> (**3ª Premissa**) Ora, a realidade matemática descrita pelo platonismo matemático da plenitude é análoga à realidade do cenário hipotético no qual todas as cidades francesas que logicamente poderiam existir existem, no seguinte sentido: tal como neste cenário é verdade que todas as cidades francesas que logicamente

poderiam existir existem, no cenário descrito pelos defensores do platonismo matemático da plenitude é verdade que todos os objetos matemáticos que logicamente poderiam existir existem.

Logo,

(**1ª Conclusão**) Qualquer proposição matemática que não seja uma contradição descreverá verdadeiramente pelo menos uma coleção de objetos matemáticos abstratos.

(**2ª Conclusão**) Analogamente, se qualquer proposição matemática não-contraditória descreve verdadeiramente pelo menos uma coleção de objetos matemáticos abstratos, então sendo *P* uma proposição matemática e *S* um agente cognitivo qualquer, as seguintes condições também são conjuntamente suficientes e individualmente necessárias para *S* saber que *P*: (a) *S* acreditar em *P* e (b) *S* estar adequadamente justificado em acreditar que todos os objetos matemáticos que logicamente poderiam existir existem — isto é, *S* saber que todos os objetos matemáticos que logicamente poderiam existir existem.

Embora este seja um bom argumento a favor da idéia de que as proposições matemáticas são perfeitamente cognoscíveis — muito embora não tenhamos qualquer tipo de contato com os objetos dos quais estas proposições são acerca —, a estratégia de um defensor de platonismo matemático da plenitude para compatibilizar a existência de conhecimento matemático com a visão platonista da matemática com base neste argumento enfrenta algumas objeções, dentre as quais a de que tal estratégia implica algo bastante implausível[21]. Supostamente, a 2ª conclusão do argumento acima descrito permite-nos explicar como é possível que haja conhecimento matemático proposicional, apesar da referência a entidades abstratas envolvida nas asserções matemáticas. Assim, sendo *P* a proposição expressa pela frase "3 é primo" e *S* um agente cognitivo qualquer, se as condições (a) e (b) contidas na 2ª conclusão do argumentosão satisfeitas —isto é, se *S* acredita que 3 é ímpar e sabe que todos os objetos matemáticos que logicamente poderiam existir existem —, então *S* pode perfeitamente saber que 3 é ímpar, muito embora não tenha qualquer tipo de contato com o referente do termo "3".

21 - Cf. Balaguer (1998, p. 53-58)

Deste modo, conseguiríamos compatibilizar a existência de conhecimento matemático proposicional com o fato de as proposições da matemática serem acerca de entidades que não existem no espaço e no tempo. Contudo, se a 2ª conclusão do argumento acima mencionado fornecesse realmente uma explicação adequada do conhecimento matemático proposicional, então o conhecimento da tese da plenitude —isto é, o conhecimento da tese segundo a qual todos os objetos matemáticos que logicamente poderiam existir existem — seria uma condição necessária ao conhecimento de toda e qualquer proposição da matemática. Todavia, isto é bastante implausível; sabemos que zero não é o sucessor de qualquer número natural, ou que 3 é primo, muito embora não tenhamos conhecimento da tese platonista da plenitude, ou mesmo de qualquer outra tese platonista acerca do compromisso ontológico das proposições matemáticas. Logo, a 2ª conclusão deste argumento não nos fornece uma explicação adequada do conhecimento matemático.

Para bloquear esta objeção, um defensor do platonismo da plenitude poderá retirar a exigência de que para *S* saber que *P* (sendo *P* uma proposição matemática), *S* tem de saber que a tese da plenitude é verdadeira. Agindo deste modo, consegue-se formular uma *explicação externalista* do conhecimento matemático, a qual não pressupõe que o conhecimento da tese platonista da plenitude — que é aquilo que garante a verdade de uma proposição matemática — seja condição necessária à existência de conhecimento matemático. Esta estratégia consiste basicamente em mostrar que a existência de algo que garanta a verdade das proposições matemáticas é suficiente; não precisamos afirmara que nós, agentes cognitivos, temos acesso epistêmico àquilo que garante a verdade de tais proposições.

O externalismo acerca do conhecimento em geral corresponde à idéia de que saber justificar a verdade de uma crença numa proposição não é condição necessária ao conhecimento dessa proposição. Deste ponto de vista, se João acredita que a neve é branca e se for verdade que a neve é branca, então João sabe que a neve é branca, desde que haja algo que justifique a verdade da proposição expressa pela frase "A neve é branca". Portanto, João sabe que tal proposição é verdadeira, ainda que seja incapaz de justificá-la.

Contrariamente, o internalismo acerca do conhecimento consiste na tese de que se um agente cognitivo *S* conhece uma proposição *P* qualquer, então as seguintes condições terão de ser satisfeitas:

- *S* acredita que *P*,
- *P* é verdadeira

- Há uma justificação para *P*
- *S* conhece a justificação de *P*
- Se *S* não sabe justificar a verdade de *P*, então *S* não sabe que *P*.

Assim, considerando novamente a situação hipotética na qual todas as cidades francesas que logicamente poderiam existir existem, segue-se que se aceitarmos o externalismo acerca do conhecimento, qualquer agente cognitivo que acredite em alguma proposição não contraditória acerca de cidades francesas conhecerá tal proposição ainda que não saiba justificá-la. Deste modo, (a) será condição necessária e suficiente para *S* saber que *P*, por isso (b) poderá ser excluída da 2ª premissa *ceteris paribus*.

Analogamente, se aceitarmos o externalismo acerca do conhecimento matemático, então qualquer agente cognitivo que acredite em alguma proposição matemática não contraditória conhecerá tal proposição ainda que não saiba justificá-la, se for o caso (evidentemente) que todos os objetos matemáticos que logicamente poderiam existir existem.

Logo, a condição (b) da 2ª conclusão do argumento acima formulado poderá ser excluída, sendo a exigência descrita em (a) — qual seja, a exigência de que *S* acredita que *P* — a única condição necessária e suficiente para haver conhecimento matemático. Se aceitarmos, portanto, o externalismo acerca do conhecimento matemático, a idéia segundo a qual a proposta de Balaguer não nos fornece uma explicação adequada do conhecimento matemático — posto implicar algo implausível, nomeadamente, que o conhecimento da tese platonista da plenitude seja condição necessária à existência de conhecimento matemático — torna-se implausível.

Dado que esta resposta só é bem-sucedida se adotarmos o externalismo acerca do conhecimento matemático, poder-se-á objetar que tal resposta é *ad hoc*, pois não nos oferece quaisquer razões independentes a favor da idéia de que o externalismo acerca do conhecimento matemático é mais plausível do que o internalismo acerca do conhecimento matemático.

A resposta a esta objeção consiste em dizer que o tipo de explicação acerca do conhecimento matemático exigida pelos proponentes do desafio benacerrafiniano não é internalista, mas sim externalista. Como vimos anteriormente, a segunda versãodo argumento epistêmico contra a visão platonista da matemática depende daquilo a que temos chamado *princípio de confiabilidade epistêmica.*

> *Princípio de confiabilidade epistêmica*: se *S* acredita que *P*, e se *P* é acerca de entidades abstratas, então não se pode garantir que *S* sabe que *P*

A idéia central deste princípio é a de que não pode haver conhecimento matemático proposicional — mais especificamente, não pode haver garantia para tal conhecimento —, se as proposições supostamente conhecidas são acerca de objetos abstratos. Mas a razão para duvidar da confiabilidade de tal conhecimento é que não é possível garantir a existência de crenças matemáticas verdadeiras e justificadas. Deste ponto de vista, embora seja perfeitamente possível formar uma crença numa proposição verdadeira a qual seja acerca de um objeto abstrato, não é possível que tal crença seja — além de verdadeira — justificada.

Reconstruindo um exemplo do próprio Benacerraf[22], a razão pela qual sei que a proposição expressa pela frase "O gato está sentado no tapete" é verdadeira é que existe uma relação causal entre a minha crença nesta proposição e o estado de coisas que a torna verdadeira, sendo esta relação causal aquilo que justifica a minha crença. Se não há, portanto, qualquer tipo de interação entre aquilo que torna uma proposição verdadeira e o agente cognitivo que nela acredita, então não pode haver crença verdadeira e justificada, pelo que não pode haver conhecimento — muito embora possa haver crença verdadeira apenas.

É precisamente esta a idéia que está presente no princípio de confiabilidade epistêmica. Assim, o desafio benacerrafiniano consiste em saber como é possível haver crença verdadeira e justificada acerca de objetos abstratos, e não em saber como é possível haver crença verdadeira e reconhecidamente justificada acerca de objetos abstratos. O problema de saber se somos capazes de justificar as nossas crenças matemáticas é completamente irrelevante para um adepto deste desafio, porquanto uma explicação externalista do conhecimento matemático responde-o adequadamente.

3.1 As objeções de Greg Restall à proposta de Balaguer

Restall (2003) apresenta uma série de objeções ao platonismo da plenitude de Balaguer, a maioria das quais pretendem mostrar que a tese da plenitude não pode ser adequadamente formalizada, visto que seja qual for a forma lógica atribuída a esta tese, tal formalização terá sempre consequências implausíveis acerca do domínio de quantificação, da natureza da

22 - Cf. Benacerraf (1973, p. 671, nota 7) possibilidade empregada, e da natureza da existência dos objetos matemáticos. Ademais, ainda que modifiquemos ligeiramente tal formalização — dissolvendo, desse modo, muitas destas consequências — qualquer outra interpretação formal da tese da plenitude implicará sempre uma contradição.

Por outro lado, se entendermos o platonismo da plenitude como uma tentativa informal de fornecer uma epistemologia adequada para a ontologia platonista, abdicando, portanto, da tese de que tem de haver uma forma lógica correspondente à tese da plenitude, obteremos uma interpretação demasiado fraca e trivial, a qual claramente tanto poderá ser endossada por platonistas como porantiplatonistas.

Do ponto de vista de Restall[23], a formulação de Balaguer da tese plenitude tem a seguintes duas primeiras consequências implausíveis: (a) estaremos comprometidos com a quantificação meinongiana se aceitarmos aquilo que Balaguer considera ser a forma lógica mais adequada para a tese da plenitude e (b) estaremos comprometidos com possibilidades *de re*, visto que para uma variável *x* presente na forma lógica da tese da plenitude, perguntamos se tal variável representa um objeto que existe possivelmente. Como vimos, Balaguer formula a tese da plenitude do seguinte modo:

> *Princípio da plenitude*:Todos os objetos matemáticos que logicamente poderiam existir existem.

A forma lógica atribuída a este princípio é[24]:

$$(\rho)\ \forall Y\ [\ \diamond(\exists x)\ (\ Mx \wedge Yx) \rightarrow (\exists x)\ (Mx \wedge Yx)]$$

Do ponto de vista de Restall, estamos obrigados a quantificar sobre objetos não-existentes nesta formalização, "…pois se o quantificador 'qualquer' quantifica meramente sobre o que é, então todos nós, platonistas e antiplatonistas, podemos simultaneamente concordar com a tese. Qualquer objeto matemático (existente) que pode existir existe"[25]. Embora a quantificação meinongiana não levante quaisquer dificuldades em si, Restall considera que este tipo de quantificação constitui um percalço à defesa balagueriana da tese

23 - Cf. Restall (2003, p. 82)

24 - Cf. Balaguer (1998, p. 06)

25 - Cf. Restall (2003, p. 82)

da plenitude, visto que Balaguer afirma não estar comprometido com objetos inexistentes ou mesmo com objetos possíveis que podem ou não existir:

> "Quero distanciar-me de tudo isto. Não penso que há coisas tais como objetos que "não existem" ou que "são possíveis, mas não atuais". Do meu ponto de vista, todos os objetos são objetos comuns, efetivamente existentes." (Balaguer, 1998, p. 6)

Contudo, a idéia de Restall segundo a qual o domínio de quantificação dos quantificadores existenciais presentes na formalização do princípio da plenitude tenha de envolver objetos inexistentes parece equivocada; nem o quantificador da antecedente $(\Diamond(\exists x)(Mx \wedge Yx))$, nem o quantificador da consequente $((\exists x)(Mx \wedge Yx))$ estão associados a domínios de quantificação compostos por objetos inexistentes.

Relativamente à antecedente da condicional, o domínio de quantificação do quantificador existencial antecedido pelo operador de possibilidade é o conjunto de todos os objetos matemáticos possíveis, ao passo que o domínio de quantificação do quantificador existencial sem o operador de possibilidade — isto é, o quantificador existencial da consequente — é o conjunto de todos os objetos matemáticos efetivamente existentes.

Contudo, os termos "objeto matemático possível" e "objeto matemático efetivo" têm — do ponto de vista do defensor da tese da plenitude — a mesma extensão. Isto é exatamente o que a formulação da tese nos diz: todos os objetos matemáticos que poderiam existir existem, isto é, todos os objetos matemáticos possíveis são objetos matemáticos efetivos, pelo que os termos "objeto matemático possível" e "objeto matemático efetivo" são coextensionais. O domínio de quantificação de cada um dos quantificadores existenciais é composto, portanto, exatamente pelo mesmo conjunto de objetos, nomeadamente, o conjunto de todos os objetos existentes. Logo, a formalização da tese da plenitude proposta por Balaguer não está comprometida com um domínio de quantificação meinongiano.

A segunda acusação de Restall consiste em dizer que a afirmação segundo a qual todos os objetos matemáticos que logicamente poderiam existir existem está comprometida com modalidades *de re*:

> "Em segundo lugar, a afirmação parece comprometer-nos com a modalidade *de re* acerca de possibilia. Para cada *x*, perguntamos se tal *x* existe

> possivelmente. Quantificamos dentro deste contexto modal. Evidentemente, estas não são dificuldades significativas, se quisermos aceitar a quantificação meinongiana e a modalidade *de re* aplicada a possibilia. Estas são dificuldades para Balaguer, visto que ele não quer aceitar qualquer uma destas coisas. Para ele, a modalidade em questão é a possibilidade *lógica*, e para isto, o portador da possibilidade e da necessidade é a frase, e não os objetos, ou as frases com variáveisde primeira ordem livres. Logo, para que o platonismo da plenitude possa ser formalmente e claramente expresso, terá de ser expresso de outro modo." (Restall, 2003, p. 82)

Tais observações parecem, contudo, equivocadas. Embora a leitura mais adequada da tese da plenitude obrigue-nos a perguntar para cada *x*, se tal *x* existe possivelmente, disto não se segue que a modalidade expressa pelo operador de possibilidade — o qual é representado, na linguagem natural, pelo advérbio "possivelmente" — seja *de re*. A distinção entre modalidades modais *de re* e de *de dicto* é tipicamente encarada como uma distinção sintática, posto que diz respeito ao âmbito dos operados modais. Considere-se, por exemplo, a seguinte caracterização da noção de modalidade *de re*[26]: um operador modal é *de re* se, e somente se, (i) no âmbito deste operador modal houver uma constante individual ou (ii) no âmbito de tal operador modal houver uma variável livre ou (iii) no âmbito de tal operador houver uma variável ligada por um quantificador o qual está fora do âmbito do operador modal em questão. Caso nenhuma destas condições seja satisfeita, a modalidade será *de dicto*. Assim, as modalidades das seguintes formas lógicas $\Box Fa$ e $\forall x \Box Fx$ são *de re*, ao passo que modalidade da seguinte outra $\Box \forall x\, Fx$ é *de dicto*.

Se aceitarmos esta caracterização do conceito de operador modal *de re*, então afirmar acerca de um objeto que tal objeto existe possivelmente não implica que o operador modal de possibilidade aqui empregado seja *de re*; se a formalização da afirmação em causa não satisfaz alguma das condições descrita em (i), (ii) ou (iii), então a modalidade será *de dicto* e não *de re*. A formalização de Balaguer da tese da plenitude não obedece a qualquer destas condições, visto que o operador de possibilidade empregado na antecedente tem âmbito longo. Portanto, a afirmação segundo a qual para qualquer objeto matemático, se a existência de tal objeto matemático é uma possibilidade lógica, então tal objeto existe atualmentenão está comprometida com modalidades *de re*.

A terceira objeção proposta por Restall[27] procurar mostrar que a tese da plenitude tal

26 - Cf. Forbes (1986, p. 48)

27 - Cf. Restall (2003, pp. 83-84) como formalizada por Balaguer implica algo bastante implausível acerca da natureza da existência dos objetos matemáticos, dado que implica a seguinte fórmula: $P \rightarrow \neg\Diamond(\exists x)(Mx \wedge \neg P)$. A demonstração para tal pode ser reformulada do seguinte modo por *reductio ad absurdum*:

I. $\forall Y[\Diamond(\exists x)(Mx \wedge Yx) \rightarrow (\exists x)(Mx \wedge Yx)]$	*premissa*
II. $\neg[P \rightarrow \neg\Diamond(\exists x)(Mx \wedge \neg P)]$	*suposição*
III. $\Diamond(\exists x)(Mx \wedge \neg P) \rightarrow (\exists x)(Mx \wedge \neg P)$	1, *eliminação* $\forall$
IV. $\neg(\exists x)(Mx \wedge \neg P) \rightarrow \neg\Diamond(\exists x)(Mx \wedge \neg P)$	3, *contraposição*
V. $\neg(\exists x)(Mx \wedge \neg P) \wedge \Diamond(\exists x)(Mx \wedge \neg P)$	4, *definição da condicional*
VI. $\neg(\exists x)(Mx \wedge \neg P)$	5, *eliminação da conjunção*
VII. $\neg\Diamond(\exists x)(Mx \wedge \neg P)$	4 e 6, *modus ponens*
VIII. $\Diamond(\exists x)(Mx \wedge \neg P)$	5, *eliminação da conjunção*
IX. $\neg\Diamond(\exists x)(Mx \wedge \neg P) \wedge \Diamond(\exists x)(Mx \wedge \neg P)$	6, *introdução da conjunção*
X. $P \rightarrow \neg\Diamond(\exists x)(Mx \wedge \neg P)$	2 - 9, *redutio ad absursum*

Ao substituirmos *P* por alguma proposição contingentemente verdadeira, obtemos algo bastante implausível, nomeadamente, a consequência de que se uma proposição *P* qualquer é efetivamente verdadeira— por exemplo, se a neve é branca é uma proposição efetivamente verdadeira —, então não há qualquer mundo possível em que exista um objeto tal que seja um objeto matemático e tal proposição seja falsa. Ou seja, se neve é efetivamente branca, então a seguinte disjunção é uma verdade necessária: ou não existem quaisquer objetos matemáticos, ou a neve é branca. Logo, por *definição da disjunção*, as seguintes condicionais são também verdades necessárias: (1) se há objetos matemáticos, então a neve não é branca e (2) se a nave é branca, então não há objetos matemáticos. A existência de objetos matemáticos é, portanto, incompatível com a existência de outras verdades que não aquelas que sejam acerca das suas próprias existências. Dizemos, portanto, que tais objetos matemáticos são *modalmente frágeis*[28], posto que se existem, então existem sozinhos (nada mais além de tais objetos existe). Assim, a forma lógica da tese da plenitude implica o seguinte dilema: ou só há objetos matemáticos no mundo atual, ou todas as proposições verdadeiras do mundo atual são verdades necessárias. Nenhuma destas hipótese é minimamente plausível, pelo que os defensores do platonismo da plenitude estão obrigados ou a admitir que a tese da plenitude é falsa, ou a admitir que a formalização proposta por Balaguer não capta adequadamente a semântica da afirmação desta tese.

28 - Cf. Restall (2003, pp. 83)

Restall sugere, entretanto, outro modo de se formalizar a tese da plenitude, modo este que bloqueia tal inferência[29]. Tal estratégia consiste em acrescentar uma conjunção na antecedente da fórmula,especificandoqueas propriedades sobre as quais quantificamos têm de ser propriedades matemáticas. Obtemos, portanto, a seguinte outra formalização:

$$(\rho') \ \forall Y \ [TY \land \Diamond(\exists x) \ (Mx \land Yx) \rightarrow (\exists x) \ (Mx \land Yx)]$$

"TY" representa a propriedade (de segunda ordem) de ser uma propriedade matemática. Tal formalização já não nos permite derivar a fórmula seguinte $P \rightarrow \neg\Diamond(\exists x)(Mx \land \neg P)$, evitando, deste modo, as consequências indesejáveis anteriormente mencionadas.

Entretanto, outras consequências implausíveis parecem seguir-se desta nova formalização da tese da plenitude. Restall usa a *hipótese do contínuo* (doravante HC) para mostrar isto.[30] Sabemos que todos os conjuntos têm uma cardinalidade, a qual é dada pelo número de elementos de um conjunto. Dizemos, pois, que a cardinalidade de um conjunto de três pessoas é a mesma de um conjunto de três árvores, a saber, 3. Os conjuntos infinitos também têm cardinalidades, as quais são dadas pelo número de elementos destes conjuntos; posto tratar-se de números infinitos de elementos, chamamos *cardinais transfinitos* aos números que dão as cardinalidades dos conjuntos infinitos. Nem todos os conjuntos infinitos têm a mesma cardinalidade, dado que nem todos os conjuntos infinitos são enumeráveis. Um conjunto é enumerável se, e somente se, tem uma bijeção com o conjunto dos números naturais — isto é, se, e somente se, há uma correspondência um-a-um entre os elementos do conjunto em questão e os elementos do conjunto dos naturais. Sabe-se, por exemplo, que o conjunto potência dos números naturais[31] — tal como o conjunto dos números reais — não é enumerável, ao passo que o conjunto dos números inteiros e o conjunto dos números racionais são enumeráveis[32]. Usamos a primeira letra do alfabeto hebraico "$\aleph$" combinada a um índice numérico para representar a ordem dos cardinais transfinitos. Assim, tal como há a série infinita dos números naturais (0,1,2,3,…), há também a série infinita dos números cardinais transfinitos ($\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots$), a qual representa a ordem crescente dos conjuntos infinitos. O conjunto infinito cuja cardinalidade é dada pelo cardinal transfinito

29 - Cf. Restall (2003, p. 85)

30 - *Ibid.*

31 - Para qualquer conjunto *X* (infinito ou não), o conjunto potência de *X* consiste no conjunto de todos os subconjuntos de *X*

32 - Que o conjunto dos números reais não é enumerável pode ser provado através do *método de diagonalização de Cantor*. Para uma explicação simples e clara de como esta e outras provas (a prova de que os racionais e os inteiros são enumeráveis, por exemplo) podem ser formuladas, veja-se Imaguire & Barroso (2006, pp. 40-44)

$\aleph_0$ é um *infinito menor* comparativamente ao conjunto infinito cuja cardinalidade é dada pelo cardinal transfinito $\aleph_1$, tal como o conjunto infinito cuja cardinalidade é dada por $\aleph_1$ também é um infinito menor comparativamente ao conjunto infinito cuja cardinalidade é dada por $\aleph_2$, e assim sucessivamente.

Sabe-se que o menor cardinal transfinito — isto é, o primeiro membro da série dos cardinais transfinitos ($\aleph_0$) — é a cardinalidade dos números naturais. Em termos informais, a HC consiste na afirmação de que o cardinal transfinito que corresponde à cardinalidade do conjunto dos reais é o segundo menor cardinal transfinito ($\aleph_1$), vindo logo a seguir, na série dos transfinitos, ao cardinal transfinito correspondente à cardinalidade do conjunto dos naturais. Em termos formais, esta afirmação é assim formulada: $2^{\aleph_0} = \aleph_{1.}$

AHC é logicamente indecidível, dado não haver uma prova nem para a sua afirmação, nem para a sua negação. Assim, aceitando que $x = 2 \ \land x^{\aleph_0} = \aleph_1$ seja um predicado matemático, a seguinte fórmula parece ser verdadeira:

$$(\mathbf{I})\ \diamond(\exists x)\ (Mx \land x = 2 \land x^{\aleph_0} = \aleph_1)$$

De igual modo, podemos tomar $x = 2 \ \land x^{\aleph_0} \neq \aleph_1$ também como um predicado matemático e aceitar que a seguinte outra fórmula seja igualmente verdadeira:

$$\mathbf{II.}\ \diamond(\exists x)\ (Mx \land x = 2 \land x^{\aleph_0} \neq \aleph_1)$$

Consideremos então aquilo que parece ser a formalização mais adequada da tese da plenitude, a saber:

$$\mathbf{III.}\ \forall Y\ [\ TY \land \diamond(\exists x)\ (Mx \land Yx) \rightarrow (\exists x)\ (Mx \land Yx)]$$

Através da eliminação do quantificador universal em (III) podemos obter a seguinte fórmula:

$$\mathbf{IV.}\ \diamond(\exists x)\ (Mx \land x = 2 \land x^{\aleph_0} = \aleph_1) \rightarrow (\exists x)\ (Mx \land x = 2 \land x^{\aleph_0} = \aleph_1)$$

De (**IV**) e (**I**) segue-se, por *modus ponens*, que:

V. $(\exists x)\ (Mx \wedge x = 2 \wedge x^{\aleph_0} = \aleph_1)$

De (**V**) segue-se que:

VI. $2^{\aleph_0} = \aleph_1$

A mesma estratégia de dedução poderá ser aplicada para obter a negação da hipótese do contínuo, a saber, $2^{\aleph_0} \neq \aleph_1$. Se em (III) eliminarmos o quantificador universal de segunda ordem não com o predicado matemático $x = 2 \wedge x^{\aleph_0} = \aleph_1$, mas sim com a negação desse predicado — a saber, $x = 2 \wedge x^{\aleph_0} \neq \aleph_1$ —, obteremos a seguinte fórmula:

VIII. $\Diamond(\exists x)\ (Mx \wedge x = 2 \wedge x^{\aleph_0} \neq \aleph_1) \rightarrow (\exists x)\ (Mx \wedge x = 2 \wedge x^{\aleph_0} \neq \aleph_1)$

De (**VIII**) e (**II**) segue-se, por *modus pones,* que:

IX. $(\exists x)\ (Mx \wedge x = 2 \wedge x^{\aleph_0} \neq \aleph_1)$

De (**IX**) segue-se que:

(**X**) $2^{\aleph_0} \neq \aleph_1$

Assim, a conclusão a ser traçada é a de que aquilo que parece ser a formalização mais adequada da tese da plenitude implica uma contradição, pois tanto é possível derivar a HC, como é possível derivar a negação da HC partindo da forma lógica atribuída à tese da plenitude. Logo, nenhum defensor do platonismo da plenitude poderá aceitar a idéia de que o princípio da plenitude possa ser formalizado com em ρ'.

Balaguer, entretanto, considera uma objeção semelhante a esta[33]. Neste sentido, tal como a HCé uma afirmação logicamente indecidível, também é logicamente indecidível a afirmação composta pela conjunção dos axiomas da teoria de conjuntos de Z*ermelo-Fraenkel* com o axioma da escolha. Não há uma prova nem para ZFE (teoria de conjuntos de *Zermelo-Fraenkel* em conjunção com o axioma da escolha), nem para ZFC + ¬E (teoria de conjuntos de *Zermelo-Fraenkel* em conjunção com a negação do axioma da escolha).

A réplica de Balaguer a esta objeção por ele mesmo formulada[34] consiste em dizer que ZFE e ZF + ¬E não representam contradições genuínas, visto que descrevem conjuntos de universos distintos. Deste ponto de vista, o modelo no qual ZFE é verdadeiro descreve um universo de conjuntos diferente daquele descrito por ZFC + ¬E, e tal distinção pode ser expressa se dissermos que ZFE descreve o *universo de conjuntos*$_{E}$, ao passo que ZF + ¬E descreve o *universo de conjuntos*$_{\neg E}$.

Este aspecto da resposta de Balaguer à acusação de que a tese da plenitude implica a existência contradições matemáticas verdadeiras resulta, na verdade, de uma postura mais ampla quanto à natureza das verdades matemáticas, mais especificamente quanto à natureza afirmações de teoria dos conjuntos. A idéia central aqui presente é a de que dada uma teoria dos conjuntos qualquer, se esta for uma teoria consistente, então há pelo menos um modelo no qual é verdadeira, e tal modelo descreve verdadeiramente parte da realidade matemática, mais especificamente, descreve verdadeiramente a existência de um universo de conjuntos. Assim, tal como é verdade que tanto a teoria dos conjuntos de Zermelo-Fraenkel em conjunção com o axioma da escolha (ZFE) como a teoria dos conjuntos de Zermelo-Fraenkel em conjunção com a negação do axioma da escolha (ZF + ¬E) descrevem ambas universos de conjuntos, também é verdade que ambas ZFE + HC (teoria dos conjuntos de Zermelo-Fraenkel em conjunção com o axioma da escolha e com a hipótese do contínuo) e ZFE + ¬HC (teoria dos conjuntos em conjunção com o axioma da escolha e com a negação da hipótese do contínuo) descrevem verdadeiramente universos distintos de conjuntos. Deste ponto de vista, a consistência de uma teoria dos conjuntos é condição suficiente para que possamos postular a existência de um universo de conjuntos que satisfaça tal teoria. Esta parece ser uma das idéias centrais de Balaguer:

> "É importante notar que de acordo com os defensores do platonismo da plenitude, a teoria dos conjuntos de Zermelo-Fraenkel em conjunção com o

33 - Cf. Balaguer (1988, pp. 58-59)

34 - *Ibid*.

axioma da escolha (ZFE) não descreve um universo *unívoco* de conjuntos$_E$; descreve muitos universo de conjuntos$_E$. Descreve, por exemplo, alguns universos nos quais a hipótese do contínuo (HC) é verdadeira e descreve outros no qual não é verdadeira. Isto simplesmente porque ZFE + HC e ZFE + ¬HC são ambas consistentes e, portanto, ambas descrevem verdadeiramente partes do reino matemático. De modo geral, a questão aqui é que se o platonismo da plenitude for verdadeiro, há tantos tipos diferentes de conjuntos quanto há teorias dos conjuntos consistentes." (Balaguer, 1998, p. 59)

Deste modo, a objeção formulada por Restall segundo a qual a tese da plenitude, formalmente interpretada, implica contradições (se considerarmos questões matemáticas logicamente indecidíveis, como a hipótese do contínuo) poderá ser dissolvida se aceitarmos a idéia de que todos os modelos matemáticos descrevem verdadeiramente uma parte da realidade matemática. Contudo, será esta uma idéia plausível?

A consistência de uma dada teoria matemática não parece ser condição suficiente para que tal teoria seja verdadeira. Evidentemente, se uma teoria (matemática ou não) é consistente, então há pelo menos um modelo no qual é verdadeira, porém a verdade de uma dada teoria em algum modelo não implica que tal teoria seja verdadeira *simpliciter*. Assim, uma forma bastante promissora de recusar a resposta de Balaguer à acusação de que a tese da plenitude implica contradições matemáticas consiste em dizer que tal réplica baseia-se na idéia falsa de que consistência é suficiente para verdade. Tal idéia não só é falsa como também viola as nossas intuições e práticas matemáticas; embora consistência seja condição necessária para aceitar uma teoria matemática não é, evidentemente, condição suficiente.

Entretanto, do ponto de vista de Balaguer, afirmar que se há um modelo no qual uma dada teoria matemática é verdadeira, então tal teoria descreve verdadeiramente uma parte da realidade matemática não viola o modo como as teorias matemáticas são aceitas. Tipicamente, quando afirmamos que uma dada teoria matemática T é verdadeira, aquilo que realmente queremos expressar é que T é verdadeira nos *modelos matemáticos padrões*. Assim, uma teoria matemática pode ser verdadeira, no sentido em que há pelo menos um modelo no qual é verdadeira, mas não ser *verdadeira nos modelos matemáticos padrões*. O problema de saber em virtude do quê um modelo matemático é padrão não é relevante. Balaguer procura defender a idéia de que não há qualquer *privilégio metafísico* relativamente a qualquer modelo matemático. Os modelos matemáticos são encarados como padrões quando descrevem adequadamente as nossas intuições relativamente a uma dada área da matemática, quando são suficientemente expressivos — isto é, quando permitem-nos expressar tudo o que se pretende expressar —

ou quando são adequadamente inclusivos. Assim, por exemplo, um modelo de teoria dos conjuntos deve ser encarado como padrão se estiver em consonância com a *nossa noção de conjunto*, tal como um modelo da aritmética deve considerado como padrão quando está de acordo com a *nossa concepção de número natural*[35].

Questões matematicamente indecidíveis — como a hipótese do contínuo e outras — não representam, portanto, qualquer problema para o platonismo da plenitude, pois devem ser encaradas como expressando afirmações não-conflitantes que descrevem diferentes partes da realidade matemática. Nesta perspectiva, HC e ¬HC não são realmente contradições, dado que descrevem diferentes partes da realidade matemática; o universo de conjuntos acerca do qual a HC é difere do universo de conjuntos acerca do qual ¬HC é. Ambas são, portanto, verdadeiras, embora não seja o caso que ambas sejam verdadeiras *nos modelos matemáticos padrões*. Assim, consistência é condição suficiente para a verdade de uma asserção matemática, porém não é condição suficiente para a verdade de uma asserção matemática *nos modelos matemáticos padrões*.

Todavia, a idéia de atribuir representatividade a todas as teorias matemáticas para as quais haja algum modelo — afirmando que todos os modelos matemáticos representam alguma parte do reino matemático, dado que todos são *metafisicamente significativos* — parece excluir a possibilidade de uma questão matemática ser *objetivamente* decidida. Isto porque se todas as questões matemáticas em aberto (as quais consistem em afirmações matemáticas cujos valores de verdade são desconhecidos) não expressam, na realidade, afirmações matemáticas conflitantes — tratando-se apenas de asserções que descrevem diferentes partes da realidade matemática, como no caso da HC —, nada há para ser disputado ou decido. Deste modo, se os defensores do platonismo da plenitude estão comprometidos com a tese de que todos os modelos matemáticos descrevem verdadeiramente alguma parte da realidade matemática, também estão comprometidos com a tese de que não há objetividade na prática matemática — isto é, estão comprometidos com a tese de que não há quaisquer problemas matemáticos a serem objetivamente resolvidos, posto não haver quaisquer problemas matemáticos a serem resolvidos de todo em todo. Qualquer afirmação matemática será verdadeira em alguns modelos e falsa noutros, por isso os valores de verdade em matemática serão sempre relativos a algum modelo. Tal consequência é, no entanto, bastante implausível.

A resposta de Balaguer a esta objeção[36] consiste em dizer que o platonismo da plenitude não sacrifica a objetividade da prática matemática. Do seu ponto de vista, a defesa da tese da plenitude é perfeitamente compatível com a idéia de que há questões matemáticas em

35 - Cf. Balaguer (1998, p. 60)

36 - Cf. Balaguer (1998, pp. 62-64) aberto que podem ser objetivamente respondidas. Assim, ao perguntar qual é o valor de verdade de uma asserção matemática cuja negação (nem afirmação) é demostrada — tal como a HC —, perguntamos na verdade qual é o valor de verdade desta asserção *no modelo padrão*. Que tal asserção seja verdadeira em algum modelo será algo trivial (do ponto de vista do platonista da plenitude), caso seja uma asserção logicamente consistente (no sentido amplo). Portanto, a tese segundo a qual qualquer afirmação matemática que seja logicamente consistente descreve verdadeiramente uma parte da realidade matemática — e, por conseguinte, todos os modelos matemáticos são representações fidedignas da realidade matemática — não implica a inexistência de objetividade na prática matemática.

Deste ponto de vista, por exemplo, aquilo que está em questão no problema lógico-matemático de saber se a HC é verdadeira é saber se HC é verdadeira nos *modelos matemáticos padrões*. Mais especificamente, os matemáticos estão a procura de algum axioma que seja verdadeiro na *teoria dos conjuntos padrão*, a partir do qual possamos formular uma prova para HC. Esta é exatamente a perspectiva de Balaguer:

> "Considere-se, por exemplo, os argumentos acerca da verdade ou falsidade da HC. Quando as pessoas discutem sobre se algum candidato a axioma que supostamente resolve a questão da hipótese do contínuo é verdadeiro, aquilo acerca do quê estão realmente discutindo é se o candidato a axioma é inerente à *nossa noção de conjunto*. Noutras palavras, estão discutindo sobre se o candidato a axioma é verdadeiro no modelo padrão (ou classe de modelos) da teoria dos conjuntos. Os defensores do platonismo da plenitude afirmam, portanto, que ambas HC e ¬HC são verdadeiras em várias hierarquias de teoria dos conjuntos e que os argumentos acerca da verdade de HC são argumentos acerca da verdade de HC na hierarquia contemplada (ou hierarquias)." (Balaguer, 1998. p. 62)

Outro exemplo para o qual Balaguer chama-nos a atenção — no intuito de mostrar como as disputas acerca da verdade de uma asserção matemática é quase sempre uma disputa acerca da verdade de tal asserção nos modelos matemáticos padrões, sendo o *estar de acordo com as nossas intenções e intuições* aquilo que torna um modelo matemático em um *modelo matemático padrão* — é a disputa acerca da verdade de muitas das asserções da geometria euclidiana[37]. Tal como não há uma prova nem para a HC, nem para a negação da HC, também não há uma prova para aquilo que é conhecido como *o quinto postulado de Euclides*.

37 - Cf. Balaguer (1998, p. 64).

Aparentemente, esta também é uma questão matemática em aberto. A idéia de Balaguer é que relativamente ao problema de saber se o quinto postulado de Euclides é verdadeiro, não há qualquer disputa matemática a ser resolvida; tudo o que há para estabelecer é se o quinto postulado de Euclides é verdadeiro nos modelos matemáticos padrões, e isto dependerá exclusivamente da questão de saber se o espaço que satisfaz as nossas intuições físicas é o *espaço euclidiano* ou não. Saber qual o tipo de espaço melhor adequa-se às nossa intuições não é, contudo, uma problema matemático, mas sim empírico.

Outra objeção mais lateral que podemos formular contra o platonismo da plenitude consiste em dizer que, embora os defensores desta visão tenham recursos para dissolver os argumentos epistêmicos contra o platonismo matemático até agora apresentados, há uma única versão que não podemos responder apelando ao princípio da plenitude, qual seja, a versão que se baseia na impossibilidade de referência acarretada pela semântica platonista.

4. A resposta abstracionista fregiana de Hale e Wright ao desafio benacerrafiniano

Hale e Wright (2002) chamam a atenção para a idéia de que embora os argumentos epistêmicos contra a idéia de que possa haver conhecimento de entidades abstratas sejam, em sua maioria, motivados por teorias causais do conhecimento — bem como por concepções relacionadas à confiabilidade das nossas crenças matemáticas e por ideologias naturalistas —, dois outros fatores contribuem para a existência de posturas filosóficas hostis à razoabilidade epistêmica das entidades abstratas.

O primeiro fator consiste em entender o conceito de entidade abstrata em termos puramente negativos. As entidades abstratas são tipicamentecaracterizadas como itens que existem fora do espaço e do tempo. Entretanto, tal caracterização deve ser entendida metaforicamente, posto que não faz qualquer sentido dizer de uma entidade abstrata que tal entidade existe "fora do espaço e do tempo".

Hale e Wright sugerem, ao invés, que, no intuito de compreender genuinamente a noção de entidade abstrata, assim como de dar inteligibilidade à idéia de que tais entidades são perfeitamente cognoscíveis, devemos focar-nos naquilo que uma entidade abstrata é, naquilo que se pode dizer acerca de uma entidade abstrata e não apenas naquilo que não se pode dizer acerca de uma entidade deste tipo. Deste modo, acerca de uma entidade abstrata, não faz sentido perguntar onde está tal entidade, ou quando tal entidade começou a existir, ou ainda quando irá perecer.

O segundo fator consiste na aceitação do pressuposto segundo o qual não há conhecimento de verdades que sejam acerca de objetos (abstratos ou não) se não houver uma interação ou engajamento "prévio" entre tais objetos e o agente cognitivo conhecedor. Contudo, se a idéia subjacente a tal pressuposto for interpretada de uma maneira ampla, significando apenas que temos de saber de antemão quais são os objetos dos quais as verdades por nós conhecidas são acerca, então este pressuposto será trivialmente verdadeiro, posto que se trata apenas de afirmar que condição necessária para *S* saber que *P* — sendo *P* uma proposição acerca de objetos — é *S* saber quais são os objetos dos quais *P* é acerca. Por outro lado, se o pressuposto em causa for interpretado de um modo menos trivial, a sua plausibilidade será no mínimo diminuta, pois implicará a tese bastante controversa segundo a qual a suposta interação entre agentes cognitivos e objetos conhecidos deve ser anterior ao conhecimento da proposição que é acerca destes objetos.

Assim, se aceitamos este último pressuposto, não apenas a idéia de que podemos obter conhecimento acerca de objetos matemáticos abstratos torna-se ininteligível — dado que somos entidades espaciotemporalmente localizadas e entidades matemáticas não o são —, mas também a idéia de que tais objetos são passíveis de serempensados por nós. A interação entre agentes conhecedores e os objetos matemáticos — que supostamente têm de existir previamente ao nosso conhecimento de proposições matemáticas — ocorre através do direcionamento da nossa atenção para estes objetos, direcionamento o qual é condição necessária à possibilidade de pensamento acerca deles[38].

Assim, se não somos capazes de explicar como é possível direcionar a nossa atenção para objetos que não existem no espaço e no tempo, então não seremos capazes de explicar como é possível que tais objetos sejam pensados por nós. Mas se não somos capazes de explicar como estes objetos podem ser por nós pensados, não seremos capazes de explicar como podemos apreender o significado de muitas expressões matemáticas, tais como numerais. Mas se não somos capazes de apreender o significado de tais expressões, então não seremos capazes de explicar como a referência aos objetos que tais expressões designam é possível. Assim, o problema do acesso a objetos matemáticos abstratos torna-se linguístico além de epistêmico: trata-se não apenas de saber como o conhecimento de tais objetos é sequer possível, mas também de saber como a referência a tais objetos é possível.

O modo como Hale e Wright procuram responder a este desafio consiste em mostrar primeiramente como a referência a objetos matemáticos abstratos é possível. A estratégia por eles utilizada remonta à explicação fregiana acerca de como os objetos da aritmética

38 - Cf. Hale e Wright (2002, pp. 110-111) elementar — nomeadamente, números — nos são dados. Tal explicação depende fundamentalmente daquilo a que chamamos *princípio do contexto*, segundo o qual uma palavra tem significado apenas no contexto de uma frase. De acordo com este princípio, expressões numéricas tais como numerais só têm algum significado quando consideradas como parte constituinte de uma asserção matemática. Deste ponto de vista, portanto, os números nos são dados via a especificação do sentido das frases nas quais ocorram numerais.

Dado que frases de identidade são bastante frequentes na linguagem matemática, as frases cujos sentidos têm de ser explicados são aquelas frases de identidade entre dois termos singulares que referem números. Trata-se, portanto, de especificar o sentido defrases do tipo "O número de Fs = O número de Gs"; mais especificamente, de estabelecer as condições de verdade para proposições desta espécie[39].

Tais condições de identidade são estabelecidas através daquilo a que chamamos *princípio de Hume*. Este princípio é formulado por Hale e Wright do seguinte modo:

> "*Princípio de Hume*: O número de *Fs* = número de *Gs* ↔ há uma correspondência um-a-um entre os *Fs* e os *Gs*" (Hale e Wright, 2002, p. 122)

No intuito de explicar como números nos são dados (como se dá a referência a números) via princípio de Hume, podemos fazer uma analogia como o conceito de direção[40]. Tal conceito nos é dado atravésdo seguinte *princípio de equivalência de direção*:

> "*Equivalência de direção*: a direção da linha a =direção da linha b ↔ a // b" (Hale e Wright, 2002, p. 122)

Considerando apenas o princípio de equivalência de direções, será correto afirmar que proposições que sejam acerca da identidade entre direções e proposições que sejam acerca de paralelismo entre linhas terãoas mesmas condições de verdade. Assim, se algo é suficiente para a verdade de uma proposição que seja acerca de direções de linhas, então será também suficiente para a verdade de outra proposição que seja acerca do paralelismo entre estas mesmas linhas.

39 - Este problema é tratado por Frege (1884, cap. IV)

40 - Cf. Frege (1884, cap. IV)

A frase de identidade entre as direções das linhas *a* e *b* deve ser encarada literalmente — isto é, respeitando-se a sua sintaxe superficial. Será evidente, portanto, que os termos "a direção da linha *a*" e "a direção da linha *b*" são termos singulares, visto que a proposição expressa pela frase "A direção da linha *a* é idêntica à direção da linha *b*" é claramente uma proposição de identidade. De igual modo, será também evidente que tal proposição envolve a existência de uma função de linhas em certos tipos de objetos, nomeadamente, as suas direções, posto que os termos "*a*" e "*b*" denotam linhas particulares, e a cada linha corresponde uma e apenas uma direção.

Assim, qualquer agente cognitivo, quando confrontado com este princípio de equivalência de direções entre linhas, estará epistemicamente autorizado a concluir que estes objetos (que compõem o contradomínio da função existente entre linhas e direções de linhas) são tais que o paralelismo entre as linhas*a* e *b* é condição necessária e suficiente para a identidade entre eles. Estarão autorizados a concluir, noutras palavras, que os referentes dos termos singulares "A direção da linha *a*" e "A direção da linha *b*" são idênticos se, e somente, a relação*ser paralelo a* obtém-se entre as linhas *a* e *b*.

A descoberta de quais são as condições de identidade para referentes de termos singulares tais como "A direção da linha *a*" é aquilo que nos permite captar o conceito de direção — ou seja, é aquilo através do qual este conceito nos é dado.

Os estados de coisas que tornam uma proposição do tipo *Fab* verdadeira (onde *a* e *b* são nomes para linhas e *F* é substituído pelo predicado "ser paralelo a") são os mesmo estados de coisas que tornam verdadeiras aquelas proposições que são acerca das direções destas mesmas linhas. O paralelismo entre as linhas*a* e *b* constitui, portanto, as condições de identidade entre dois outros objetos, quais sejam, a direção da linha *a* e a direção da linha *b*.

Assim, tal como o paralelismo entre as linhas *a* e *b* fornece as condições de identidade entre as direções (que estão sendo encaradas como *objetos*) de *a* e *b*,a existência de equinumerocidade entre dois conceitos fornece as condições de identidade entre números.

Hale e Wright (2002, p. 111) chamam a atenção para a fato de que, do ponto de vista de Frege (1884, §64 e §104-105), estes dois princípios — o princípio de Hume e o princípio de equivalência entre direções de linhas — são instâncias de um princípio de abstração mais geral, o qual pode ser formulado do seguinte modo:

$$\text{(Abs)} \quad \forall\alpha\forall\beta\,(\,\Re(\alpha) = \Re(\beta) \leftrightarrow \alpha \approx \beta)$$

O símbolo "≈" representa qualquer relação de equivalência entre entidades que possam ser substitutos para "α" e "β " e 𝔑 representa uma função de entidades deste tipo em objetos. Parece razoável pensar que este é um princípio de abstração através do qual podemos definir implicitamente certos tipos de conceitos (como o conceito de número e de de direção de uma linha), sendo isto aquilo que explica a possibilidade de referência a entidades abstratas. Esta parece ser a idéiade Hale e Wright:

> "Dada qualquer relação de equivalência adequada, podemos abstrair tal relação para introduzir um conceitocategorial abstrato — um conceito sob o qual caem objetos abstratos de um certo tipo, dos quais a identidade e a distintividade (*distinctness*)são constituídas pela obtenção desta relação de equivalência entre entidades neste campo." (Hale and Wright, 2002, p. 113)

Deste modo, considerando o princípio de equivalência entre direções de linhas como uma instância adequada do princípio de abstração acima formulado, podemos explicar como os termos singulares "A direção da linha *a*" e "A direção da linha *b*" são bem-sucedidos em referir um e o mesmo objeto abstrato. Dado que a proposição da antecedente da bicondicional expressa pela frase de identidade entre as direções das linhas *a* e *b* tem exatamente as mesmas condições de verdade da proposição da consequente expressa pela frase de paralelismo entre as linhas *a* e *b* (como já mencionado anteriormente), a abstração da relação de paralelismo entre as linhas *a* e *b* é aquilo que nos permite introduzir o conceito de direção, sob o qual caem certos tipos de *objetos abstratos*, a saber, *direções de linhas*.

Analogamente, o princípio de Hume permite-nos captar o conceito de número via abstração da relação de correspondência um-a-um (relação de biunivocidade) existente entre extensões de conceitos. As condições de verdade da proposição expressa pela frase "O número de planetas do sistema solar é idêntico ao número de pessoas nesta sala" são exatamente as mesmas da proposição expressa pela seguinte outra frase "Há uma correspondência uma-a-um entre as pessoas que estão nesta sala e os planetas do sistema solar". A abstração desta relação de biunivocidade existente entre os planetas do sistema solar e as pessoas que se encontram num dada sala (com 9 pessoas) é, portanto, aquilo que nos permite introduzir o conceito de número, sob o qual *números entendidos como objetos abstratos* caem.

Esta explicação acerca do modo como a referência a objetos matemáticos abstratos é possível contém elementos que nos permitem dissolver o problema do acesso epistêmico a estes objetos. Neste sentido, a solução proposta por Hale e Wright (*ibid*., p. 112) consiste apenas em dizer que, dado que o conhecimento da proposição expressa pela frase "A linha *a* é paralela à linha *b*" não parece minimamente enigmático, o conhecimento da proposição expressa pela frase "A direção da linha *a* é idêntica à direção da linha *b*" também não será obscuro ou enigmático, pois ambas as proposições têm exatamente as mesmas condições de verdade[41]. Mas se as condições de verdade destas duas proposições são as mesmas, então se uma delas for acerca de entidades abstratas, a outra também o será. Que a proposição expressa pela frase "A direção da linha *a* é idêntica à direção da linha *b*" seja acerca de objetos abstratos é inegável, visto que os termos singulares "A direção da linha *a*" e "A direção da linha *b*" são inequivocamente termos singulares. Logo, a proposição expressa pela frase "A linha *a* é paralela à linha *b*" também será acerca de objetos abstratos. O conhecimento de proposições matemáticas que são acerca de objetos abstratos é, deste modo, perfeitamente explicável.

Segundo Balaguer (1998, p. 36), o objetivo do abstracionismo fregiano é mostrar que a descoberta de que a proposição expressa pela frase "A linha *a* é paralela à linha *b*" é acerca de entidades abstratas — dado que a proposição expressa pela frase "A direção da linha *a* é idêntica à direção da linha *b*" também o é, e ambas têm as mesmas condições de verdade — mostra não que o conhecimento de proposições que sejam acerca de entidades abstratas é problemático, mas sim que o conhecimento de proposições deste tipo é por vezes não-problemático.

Contudo, Balaguer (1998,pp. 36-37) considera que esta não é uma proposta satisfatória para responder ao desafio benacerrafiniano de explicar como podemos obter conhecimento de proposições matemáticas que sejam acerca de objetos abstratos[42]. Do seu ponto de vista, tal alternativa apenas pressupõe que o conhecimento da proposição expressa pela frase "A linha *a* é paralela à linha *b*" é simultaneamente *conhecimentode objetos abstratos* e *conhecimento não-problemático*. Tão logo se admita que tal proposição é realmente acerca de entidades abstratas, o defensor do ataque benacerrafiniano colocará em disputa a idéia de que o conhecimento desta proposição possa realmente não ser enigmático. Assim, esta proposta não nos permite refutar a idéia de que o conhecimento de proposições que sejam acerca de objetos abstratos é algo bastante controverso e obscuro. Esta parece ser a tese expressa na seguinte passagem:

41 - Podemos ignorar, para efeitos de discussão, o problema Júlio César segundo o qual não é óbvio que o princípio de Hume e o princípio de equivalência de direção de linhas possa servir para fixar a referência de termos singulares. Para uma discussão pormenorizada acerca deste problema veja-se Greimann (2003)

42 - As objeções de Balaguer (*idem*) direcionam-se à Wright (1983, seção xi). Entretanto, as explicações acerca de como a utilização de princípios de abstração fregianos (tais como o princípio de equivalência entre direções de linhas e o princípio de Hume) permitem-nos dissolver o problema do acesso epistêmico a objetos matemáticos abstratos — explicações as quais são alvo das objeções de Balaguer — encontram-se também em Hale e Wright (*op.cit.*)

> "Parece-me, portanto, que Wright disse absolutamente nada para responder ao desafio benacerrafiniano: apenas asseriu o truísmo de que o conhecimento de linhas é não-problemático, quando aquilo que ele tem de fazer é explicar *como pode ser* que o conhecimento não-problemático que temos aqui poderia ser conhecimento de objetos não-espaciotemporais." (Balaguer, 1998, p. 36)

Outra objeção enfrentada pelos abstracionistas fregianos[43] consiste em dizer que, embora tenham mostrado como proposições que envolvem identidade entre termos singulares que referem objetos matemáticos abstratos possam ser conhecidas, há inúmeros outros tipos de proposições matemáticas, as quais não envolvem qualquer tipo de identidade entre termos numéricos (por exemplo, a proposição matemática elementar expressa pela frase "2 é par").[44]

Assim, embora possa ser o caso que Hale e Wright tenham conseguido fornecer uma explicação adequada do modo como termos singulares presentes na linguagem matemática conseguem referir objetos matemáticos abstratos, é controverso que tenham dissolvido o desafio benacerrafiniano de todo em todo.

5. Conclusões

• A objeção de Balaguer à estratégia de tentar explicar como é possível obter conhecimento de proposições que são acerca de objetos abstratos com base na existência da intuição matemática não é bem-sucedida, dado que a exigência de uma explicação acerca da confiabilidade dos processos de formação de crenças verdadeiras gerados pela intuição matemática pode ser estendida também à percepção.

• A tentativa de responder ao desafio benacerrafiniano apelando à tese de que as proposições da matemática são verdades necessárias também não é promissora, visto que pressupõe a falsidade de algumas tesesessencialistas.

• O platonismo da plenitude proposto por Balaguer não parece ser uma alternativa plausível, visto que não nos permite responder ao problema de explicar a referência dos termos singulares da linguagem matemática, os quais supostamente referem entidades abstratas. Não obstante, a objeção segundo a qual tal proposta implicaria que

43 - Terminologia utilizada por Hale e Wright (*ibid*., p. 113) para designar os defensores da tese de que podemos usar os princípios de abstração fregeanos para responder ao desafio benacerrafiniano

44 - Esta objeção é considerada por Hale e Wright (*ibid*., nota 39, p. 124) o conhecimento da tese da plenitude seria condição necessária ao conhecimento de toda e qualquer proposição matemática não é promissora, se adotarmos uma explicação externalista do conhecimento matemático.

• A estratégia abstracionista fregiana proposta por Hale e Wright é, em princípio, a mais promissora, pois lida com o aspecto mais central do desafio benacerrafiniano, a saber, a possibilidade de referência aparentemente incompatível com uma semântica platonista para a linguagem matemática.

6. Referências bibliográficas

BALAGUER,M., 1998. *Platonism and Anti-Platonism in Mathematics*, Oxford: Oxford University Press.

BALAGUER, M., 1996. "A Fictionalist Account of the Indispensable Applications of Mathematics," *Philosophical Studies*, 83: 291–314.

BALAGUER, M., 2009. "Fictionalism, Theft, and the Story of Mathematics," *Philosophia Mathematica*, 17: 131–62.

BENACERRAF, Paul, 1965, "What numbers could not be", *Philosophical Review*, 74: 47–73.

BENACERRAF, Paul, 1973, "Mathematical Truth", *Journal of Philosophy*, 70(19): 661–679.

BENACERRAF, P. & PUTNAM, H. (orgs.), 1983. *Philosophy of Mathematics*: Selected Readings, Cambridge: Cambridge University Press, 2.a edição.

BROUWER. L.E.J., 1981, *Brouwer's Cambridge lectures on intuitionism*, D. van Dalen (ed.), Cambridge: Cambridge University Press,Cambridge.

BUENO, O., 2009, "Mathematical Fictionalism," in *New Waves in Philosophy of Mathematics*, O. Bueno and Ø. Linnebo (eds.), Hampshire: Palgrave Macmillan, pp. 59–79.

CHIHARA, C., 1990. *Constructibility and Mathematical Existence*, Oxford: Oxford University Press.

COLYVAN,M., 2001, *The Indispensability of Mathematics*. New York: Oxford University Press.

DUMMETT, Michael, 1978, *Truth and Other Enigmas*, Cambridge, MA: Harvard University Press.

FIELD, H., 1980, *Science Without Numbers*, Princeton, NJ: Princeton University Press.

FIELD, H.,1989, *Realism, Mathematics, and Modality*, New York: Basil Blackwell.

FIELD, H.,1998, “Mathematical Objectivity and Mathematical Objects,” in *Contemporary Readings in the Foundations of Metaphysics*, C. MacDonald and S. Laurence (eds.), Oxford: Basil Blackwell, pp. 387–403.

FREGE, G., 1884. *Der Grundlagen die Arithmetik*. Translated by J.L. Austin as The Foundations of Arithmetic, Oxford: Basil Blackwell, 1953.

FORBES, G., 1986, *The Metaphysics of Modality*, Oxford: Oxford University Press.

GÖDEL, K., 1964. “What is Cantor’s Continuum Problem?”, reprinted in Benacerraf and Putnam (1983), 470–85.

GREIMANN, Dirk. (2003) “What is Frege’s Julius Caesar Problem?”, *Dialectica,* Vol. 57 (3): 261-278.

HALE, R., 1987,*Abstract Objects*, Basil Blackwell, Oxford.

HALE, Bob and WRIGHT, Crispin, 2002, “Benacerraf’s Dilemma Revisited”, *European Journal of Philosophy*, 10(1): 101-129.

HELLMAN, G., 1989. *Mathematics Without Numbers*, Oxford: Clarendon Press.

HEYTING, A., 1956, *Intuitionism: an introduction,* Amsterdam: North-Holland.

IMAGUIRE, G.; BARROSO, C. A. C. . Lógica: Os Jogos da Razão. 1. ed. Fortaleza: Editora da UFC, 2006.

KATZ, J. 1981. *Language and Other Abstract Objects*, Rowmam and Littlefield, Totowa, NJ.

KITCHER, P., 1984. *The Nature of Mathematical Knowledge*, Oxford: Oxford University Press.

LENG, M., 2010.*Mathematics and Reality*, Oxford: Oxford University Press.

LINNEBO, Øystein, “Platonism in the Philosophy of Mathematics”, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2013 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <http://plato.stanford.edu/archives/win2013/entries/platonism-mathematics/>.

MALAMENT, D. (1982) “Untilled book review of Field’s Science Without Numbers”, *Journal of Philosophy*, vol. 79, pp. 523-534.

MELIA, J., 2000, “Weaseling Away the Indispensability Argument,” *Mind*, 109: 455–79.

MILL, J. S., 1843. *A System of Logic*, Longmans, Green and Company, London.

PARSONS, C. 1980. "Mathematical Intuition", *Proceedings of the Aristotelian Society*, Vol. 84, pp. 145-168.

PARSONS, C. 1994."Intuition and Number," in A. George (ed.), *Mathematics and Mind,* Oxford University Press, Oxford, pp. 141-157.

RAATIKAINEN,Panu, "Gödel's Incompleteness Theorems", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Spring 2015 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <http://plato.stanford.edu/archives/spr2015/entries/goedel-incompleteness/>.

RENSNIK, M., 1980. *Frege and the Philosophy of Mathematics*, Cornell University Press, Ithaca, NY.

RESTALL, Greg., 2003, "Just what Is full-blooded platonism?", *Philosophia Mathematica*, 11(1): 82–91.

ROSEN, G., 2001, "Nominalism, Naturalism, Epistemic Relativism," in *Philosophical Topics*, 15: 60–91.

STEINER, M. (1975) *Mathematical Knowledge,* Cornell University Press, Ithaca, NY.

SHAPIRO, S., 1997. *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology*, Oxford: Oxford University Press.