Algumas considerações sobre o Paradoxo de Curry

Some remarks on Curry's Paradox

André Nascimento Pontes
Universidade Federal do Amazonas

Resumo

O presente artigo tem por objetivo realizar uma breve discussão sobre o paradoxo de Curry e sua propriedade de ser livre da negação (*negation-free*). Além disso, discorro também sobre a correlação do paradoxo em questão com importantes tópicos da filosofia da lógica, tais como os conceitos de consistência e verdade.

Palavras-chave

Curry. Paradoxo. Negação.

Abstract

The purpose of this paper is to hold a short discussion about Curry's paradox and its property of being negation-free. In addition, I also go into the correlation of the paradox at hand with important topics on the philosophy of logic, such as the concepts of consistency and truth.

Key-words

Curry. Paradox. Negation.

Introdução

De um ponto de vista estritamente formal, um paradoxo é caracterizado como um argumento válido contendo premissas amplamente aceitas como verdadeiras, mas dotado de uma conclusão falsa. Os paradoxos produzem grande desconforto na medida em que, sendo argumentos válidos, eles deveriam ser capazes de preservar verdade. Afinal, nosso entendimento padrão de validade nos diz que um argumento é válido quando a pura forma lógica do argumento garante que, caso as premissas sejam verdadeiras, a conclusão também será. No entanto, de maneira desconcertante, partindo de sentenças aceitas como verdadeiras, as conclusões obtidas em argumentos paradoxais são falsas. Essas conclusões falsas podem figurar de três modos básicos. Elas podem ser:

> (i) Uma contradição explícita, ou seja, uma sentença do tipo $p \wedge \neg p$;
>
> (ii) Uma contradição implícita, ou seja, uma sentença que não é *per si* uma contradição, mas que, no contexto da teoria em que ela está inserida, possui uma carga inferencial contraditória;

ou ainda;

> (iii) Uma sentença cuja suposta verdade seria fortemente contraintuitiva.

Exemplos de paradoxos que ilustram as conclusões dos tipos (*i*), (*ii*) e (*iii*) são, respectivamente, os paradoxos de Russell, de Curry e a classe de paradoxos conhecida como *Sorites*.

Costumeiramente, os chamados paradoxos lógicos são dotados de conclusões do tipo (*i*) e, portanto, envolvem a noção clássica de negação. Mas isso nem sempre é o caso. Publicado em 1942 pelo lógico e matemático estadunidense Haskell B. Curry, o chamado *paradoxo de Curry* é mais um dos resultados que compõem a classe dos chamados paradoxos da auto-referência, ou paradoxos da circularidade – tais como o paradoxo de Russell, o paradoxo do mentiroso, o paradoxo de Grelling-Nelson, dentre tantos outros –, mas que, ao contrário dos paradoxos mencionados, dispensa o uso de negação (*negation-free*).

Alguns autores, tais com Haack (2002: p.190), sustentam uma distinção entre uma *solução formal* e uma *solução filosófica* aos argumentos paradoxais. A solução formal consiste em indicar quais premissas ou princípios aparentemente verdadeiros e utilizados no argumento são, na verdade, problemáticos e que, por isso, devem ser eliminados. Já uma solução filosófica, em princípio, deveria oferecer uma razão extra lógica que fundamente a rejeição de alguma premissa ou princípio do argumento em questão. Essa razão é dita *extra lógica*, pois ela deve ter um caráter independente do simples fato de que a premissa ou princípio esteja envolvido em um argumento paradoxal.

Se realmente levarmos em consideração a possibilidade de que haja uma solução única que evite o surgimento de paradoxos, seja de que tipo eles forem, devemos também assumir a necessidade de que tal solução satisfaça a dois critérios básicos: (i) ela não pode ser demasiadamente forte para desabilitar não só os argumentos paradoxais, mas também argumentos não paradoxais; (ii) ela não pode ser demasiadamente fraca ao ponto de que haja algum paradoxo que escape incólume às restrições impostas pela solução. Em resumo, uma solução única pressuposta por uma teoria geral de paradoxos deve satisfazer ao lema *in medio stat virtus*; ela deve ser um remédio administrado na justa medida.

No presente artigo não pretendo dar conta de uma teoria geral de paradoxos. Meu ponto é mais modesto. No que segue, meu objetivo será o de realizar uma apresentação do paradoxo de Curry, bem como de alguns desdobramentos lógicos e filosóficos que podem ser levantados a partir dele. O resultado obtido por Curry pode ser, *mutatis mutandis*, apresentado em duas versões. Uma versão é demonstrada com base em operações da teoria dos conjuntos (*set-theoretic*) e outra estabelecida dentro da teoria da verdade (*truth-theoretic*). Com isso, na primeira seção, tento reconstruir a demonstração do resultado obtido por Curry em contraste com o famigerado paradoxo de Russell. Nesta mesma seção, mostro como o paradoxo de Curry dispensa o apelo ao operador de negação. Essa apresentação do paradoxo de Curry é realizada no seio da teoria ingênua dos conjuntos. Na segunda seção, apresento a relação do resultado de Curry com a concepção ingênua de verdade. Neste contexto, há uma estreita relação entre o resultado de Curry e o tão celebrado paradoxo do mentiroso na medida em que ambos revelam que uma linguagem que contenha seu próprio predicado de verdade – o que Tarski chamou de *linguagem semanticamente fechada* – é uma linguagem inconsistente.

1. Russell e Curry: dois resultados em torno do princípio ingênuo da compreensão

Juntamente com o paradoxo de Russell, o resultado obtido por Curry é recorrentemente compreendido como prova da inconsistência da teoria ingênua dos conjuntos. No entanto, o paradoxo de Russell é certamente mais famoso na medida em que ele foi obtido num contexto mais amplo de prova da inconsistência do programa logicista fregeano. Nas duas próximas seções apresento os traços gerais dos dois resultados e tento destacar semelhanças e diferença entre eles.

1.1. O paradoxo de Russell

Há basicamente duas formas de apresentar um conjunto, a saber, uma *extensional* e outra *intesional*. Quando apresentamos um conjunto através de uma lista exaustiva de todos os elementos que pertencem a ele, apresentamos uma definição extensional do conjunto em questão. Por outro lado, se expressamos o conjunto através de uma propriedade ou condição comum compartilhada por todos os elementos do conjunto em questão, estamos oferecendo uma definição intensional do conjunto. Por exemplo, o conjunto C de seleções campeãs mundiais de futebol pode ser expresso extensionalmente por:

B={Brasil, Uruguai, Argentina, Alemanha, Itália, França, Espanha, Inglaterra} ou intensionalmente por

B={x|x é uma seleção campeã mundial de futebol}

(Lê-se: "B é o conjunto de elementos *x*, tal que *x* satisfaz a condição *ser seleção campeã mundial de futebol*" ou simplesmente, "B é o conjunto de elementos *x*, tal que *x* é uma seleção campeã mundial de futebol")

No caso de conjuntos apresentados extensionalmente, a ordem em que os elementos ocorrem na lista não importa e repetições são permitidas. Sendo assim, os três conjuntos abaixo são exatamente o mesmo conjunto.

A = {1, 2, 3, 4}

A' = {2, 4, 3, 1}

A'' = {1, 2, 3, 4, 2}

Quanto ao modo intensional, ele é costumeiramente expresso em livros texto de lógica e matemática básica quando conjuntos são introduzidos como uma coleção ou agregado de objetos distintos selecionados por uma lei.

Na origem histórica da teoria dos conjuntos, um importante princípio foi proposto de modo a correlacionar intensões e extensões. Amplamente conhecido como *princípio ingênuo da compreensão*, ele foi formulado em uma versão ainda não axiomatizada da teoria e, posteriormente, se mostrou inconsistente, pois por intermédio dele é possível derivar uma contradição (veja abaixo a demonstração do *paradoxo de Russell*). A ideia básica expressa no princípio em questão é a de que para toda propriedade ou condição φ, há um conjunto β que possui como elementos apenas os objetos que satisfazem φ. Em termos formais temos:

Princípio Ingênuo da Compreensão

$$\forall x \forall \varphi \exists \beta (x \in \beta \leftrightarrow \varphi(x))$$

Em outras palavras, toda propriedade ou condição φ – sendo aqui φ uma intensão – determina um conjunto β formado pelos objetos que exemplificam φ. É precisamente a esse conjunto β que chamamos de extensão de φ.

A relação entre intensão e extensão pode ser expressa no seguinte esquema:

$$\varphi(x) \mapsto \{x \mid \varphi(x)\}$$

onde do lado esquerdo temos uma dada propriedade φ e do lado direito o conjunto de objetos de que satisfaz a propriedade em questão. Por exemplo, parece facilmente aceitável que se escolhermos arbitrariamente uma propriedade, por exemplo, *ser azul*, associado a ela temos um conjunto de todos os objetos azuis. Isso valeria também para propriedades que não são satisfeitas por nada. Por exemplo, a propriedade de *ser o maior número primo* possui uma extensão nula e, portanto, a ela está associado o conjunto vazio.

Embora bastante intuitivo, o princípio ingênuo da compreensão foi irremediavelmente abalado por um resultado obtido por Bertand Russell. Na prática, o que Russell mostrou foi que o princípio em questão não é universalmente aplicável. Nem toda intensão corresponde a uma extensão. Para isso, Russell tomou uma propriedade ou condição definida dentro da própria teoria dos conjuntos, a saber, *conjunto que não pertence a si mesmo* e mostrou, por redução ao absurdo, que não existe uma extensão ou conjunto associado a ela. Desse modo, Russell mostrou que o princípio ingênuo da compreensão leva à inconsistência a teoria dos conjuntos que o contém, pois podemos obter uma contradição a partir de tal princípio. Uma pequena reconstrução da demonstração pode ser dada como segue.

Definição: $R = \{x \mid x \notin x\}$

(1) $\forall x \forall \varphi \exists \beta (x \in \beta \leftrightarrow \varphi(x))$ [princípio ingênuo da compreensão]

(2) $\forall x (x \in R \leftrightarrow x \notin x))$ [instanciação universal e existencial de (1) para o caso R]

(3) $R \in R \leftrightarrow R \notin R$ ■ [instanciação universal de (2) para o caso R]

A definição introduz um conjunto R [de Russell] que contém todos os conjuntos que não são membros de si mesmo ($x \notin x$). Esse parece ser um conjunto perfeitamente legítimo, uma vez que todo conjunto ou é ou não é membro de si mesmo. Por exemplo, o conjunto B de *seleções campeãs mundiais de futebol*, não é membro de si mesmo, pois ele não satisfaz a condição que o determina; afinal, B é um conjunto e não uma seleção de futebol. Já o *conjunto de todos os conjuntos com mais de três elementos* é membro de si mesmo, uma vez que ele satisfaz a condição que o determina; ele possui certamente mais de três elementos.

Com base no princípio ingênuo da compreensão, a intensão ou condição *não ser membro de si mesmo* ($x \notin x$) deveria determinar uma extensão definida aqui como o conjunto R. No entanto, dado que R, ele próprio, é um conjunto, podemos perguntar: R é ou não um membro de si mesmo? A passagem de (2) a (3) revela que essa questão leva a uma contradição e que, portanto, não há nenhum conjunto R associado à condição *não ser membro de si mesmo*. Em (3) temos claramente uma contradição! (3) é uma contradição explícita e isso fica evidente uma vez que ela é equivalente a

(3*) $R \in R \wedge R \notin R$

Logo, o resultado de Russell revela que o princípio ingênuo da compreensão não pode ser consistentemente endossado. Caso contrário, ele traria para dentro da teoria dos conjuntos que o admitisse uma contradição e, por conseguinte, a inconsistência e o trivialismo dedutivo da teoria em questão. Mais adiante irei retomar esse ponto do trivialismo dedutivo de teorias inconsistentes.

Vale destacar ainda que o resultado obtido por Russell depende fundamentalmente do operador lógico da negação em pelo menos dois aspectos: (i) a condição de partida do paradoxo é a propriedade ($x \notin x$) que nada mais é que a negação da relação de pertença, ou seja, $\neg(x \in x)$; (ii) a conclusão do argumento, na medida em que ela é uma contradição explícita, também envolve uma negação.

(3**) $R \in R \wedge \neg(R \in R)$

E isso é o básico que precisamos saber sobre o paradoxo de Russell para os objetivos do presente artigo.

1.2. O Paradoxo de Curry

Antes de apresentar o paradoxo de Curry, vale introduzir o leitor iniciante em uma bastante útil ferramenta da lógica clássica conhecida como *Lei de Contração*:[1]

Lei da Contração

$$(\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$$

Ela afirma basicamente que se uma sentença α implica uma sentença do tipo $\alpha \rightarrow \beta$ – onde α é, ela mesma, o antecedente –, então α implica o consequente dessa mesma implicação, ou seja, $\alpha \rightarrow \beta$. Esse é um dos mecanismos disponíveis em lógica clássica que simplificam o raciocínio apresentando uma sentença mais elementar como equivale a uma sentença mais complexa. Voltemos agora nossa atenção para a interessante descoberta de Curry.

O resultado apresentado por Curry tem a interessante característica de ser obtido por intermédio da substituição da condição que Russell propôs ($x \notin x$), pela condição $x \in x \rightarrow B$, onde não há ocorrência do operador de negação e B figura como uma sentença arbitrária. Desse modo, dado o esquema geral:[2]

$$(4)\ \exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow Fx)$$

Vale aqui destacar que (4) expressa uma forma concisa do princípio da compreensão apresentado anteriormente. Ao substituir em (4) a variável predicativa Fx pela condição $x \in x \rightarrow B$ obtemos a seguinte sentença:

1 - Uma demonstração de que a Lei de Contração é de fato uma verdade lógica – ou seja, uma tautologia – pode ser obtida ao se construir a tabela de verdade para a sentença que a expressa, ou ainda, pela construção de uma árvore semântica desta mesma sentença.

2 - A presente demonstração do paradoxo de Curry reproduz, em linhas gerais, a demonstração contida em Da Costa *et. al.* (1998). Uma versão bastante didática do paradoxo de Curry foi apresentada por Prior (1955).

(5) $\exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow x \in x \rightarrow B)$

Assumindo c como o conjunto postulado pela variável *y* em (4), segue-se:

(6)$\forall x(x \in c \leftrightarrow x \in x \rightarrow B)$

Em seguida, ao instanciarmos a quantificação universal em (6) para o caso c, obtemos:

(7) $c \in c \leftrightarrow (c \in c \rightarrow B)$

Por eliminação do bicondicional em (7):

(8) $c \in c \rightarrow (c \in c \rightarrow B)$

e

(9) $(c \in c \rightarrow B) \rightarrow c \in c$

Por intermédio da Lei de Contração aplicada a (8) obtemos:

(10) $c \in c \rightarrow B$

e por *modus ponens* de (9) e (10):

(11) $c \in c$

e, por *modus ponens* de (10) e (11):

(12) B ∎

Sendo B uma sentença arbitrária, como foi assumido acima, o paradoxo de Curry revela que toda teoria dos conjuntos que inclua o princípio da compreensão é trivialmente dedutiva, uma vez que ela pode obter uma derivação de toda sentença do sistema. Em outras palavras, toda sentença do sistema é também um teorema do sistema! Em termos clássicos, esse trivialismo dedutivo implica em inconsistência formal, uma vez que dada uma sentença p de um sistema formal S trivialmente dedutivo, ambas p e ¬p seriam derivadas em S. Desse modo, o paradoxo de Curry funciona como uma prova da inconsistência do sistema onde ele foi obtido, pois mostra que podemos provar sentenças contraditórias no sistema em questão.

Um importante princípio clássico revela também um caminho inverso ao apresentado acima. O raciocínio descrito anteriormente mostra que, do ponto de vista clássico no qual o resultado de Curry foi obtido, se eu posso derivar toda sentença do sistema, então eu posso derivar sentenças contraditórias. O chamado princípio da explosão afirma que, caso haja uma sentença contraditória como um axioma ou teorema do meu sistema, então eu posso derivar toda sentença do sistema em questão; o que equivale ao trivialismo dedutivo do sistema.

Princípio da Explosão	
Sendo $\alpha\wedge\neg\alpha$ um axioma de um dado sistema S, segue-se que: $\alpha\wedge\neg\alpha \vdash_S \beta$	Sendo α e $\neg\alpha$ sentenças de um dado sistema formal S, Γ um conjunto de sentenças e β uma sentença arbitrária do mesmo sistema S, segue-se que: $$\frac{\Gamma \vdash_S \alpha \quad \Gamma \vdash_S \neg\alpha}{\Gamma \vdash_S \beta}$$

2. O paradoxo de Curry e as linguagens semanticamente fechadas

O paradoxo de Curry é também responsável por lançar um importante desafio à compreensão ingênua do conceito de verdade. Nessa abordagem do resultado de Curry, é possível perceber que uma concepção teórica que não imponha restrições ao uso do predicado de verdade – especialmente, àqueles usos que associam tal predicado a procedimentos envolvendo circularidade ou auto-referência – torna inconsistente a linguagem que comporta tal predicado. Vejamos de maneira bastante direta como isso ocorre.[3]

Se uma determinada abordagem da noção de verdade pode ser capturada pelo esquema-T do seguinte tipo

(esquema-T) $T[p] \leftrightarrow p$

onde o operador T[...] expressa uma atribuição de verdade a uma dada sentença e p é uma sentença arbitrária da linguagem para qual estamos definindo o conceito de verdade, segue-se que, caso não estabeleçamos nenhum tipo de restrição a aplicações circulares ou auto-referenciais do esquema-T, a concepção de verdade para a linguagem em questão será inconsistente. Essa conclusão pode ser demonstrada em um número relativamente pequeno de passos da seguinte maneira. Assuma a sentença auto-referencial L de uma dada linguagem $\mathcal{L}$ semanticamente fechada que afirma de si mesma que se ela é verdadeira, então é o caso que toda sentença S de $\mathcal{L}$ é verdadeira. Ou seja,

(L) $T[L] \rightarrow S$

Curiosamente, sendo$(T[L] \rightarrow S)$ uma sentença de $\mathcal{L}$, podemos tomá-la como uma instância substitutiva do esquema-T acima apresentado e obter:

(13) $T[L] \leftrightarrow (T[L] \rightarrow S)$

Por eliminação do bicondicional de (13) temos:

3 - A presente versão do paradoxo de Curry aplicado ao conceito de verdade é uma reconstrução da versão apresentada por Beall (2008).

(14) $T[L] \rightarrow (T[L] \rightarrow S)$

e

(15) $(T[L] \rightarrow S) \rightarrow T[L]$

Aplicando a *Lei de Contração* – cf. subseção 1.2. – a (14), segue-se que:

(16) $T[L] \rightarrow S$

Por *modus ponens* de (15) e (16):

(17) $T[L]$

Finalmente, por *modus ponens* de (L) e (17) segue-se que:

(18) $S \quad \blacksquare$

E novamente o paradoxo de Curry insiste em conduzir nossas teorias ao trivialismo dedutivo!

Nesse contexto, a principal estratégia de enfrentamento ao problema encontra-se na obra de Tarski.[4] A célebre distinção de níveis de linguagem estabelecida por Tarski (1933; 1944) tem como uma de suas principais finalidades evitar a derivação de paradoxos obtidos quando usamos o esquema-T de forma irrestrita, a exemplo do que ocorre no caso dos paradoxos do mentiroso e de Curry em sua versão *truth-theoretic*. Tarski chamava de *semanticamente fechadas* as linguagens que permitem o uso irrestrito do esquema-T de modo que elas contêm o predicado de verdade que elas aplicam às suas próprias sentenças.

4 - Outras abordagens podem ser encontradas em Parsons (1974), Kripke (1975), Gupta-Belnap(1993) e Glanzberg (2001).

De modo contrário, as linguagens que restringem o uso do esquema-T baseado em uma hierarquia de sistemas linguísticos impondo a aplicação do predicado de verdade apenas às sentenças de uma linguagem hierarquicamente inferior eram chamadas por Tarski de *semanticamente abertas*. O que está por trás da hierarquia tarskiana de linguagens é, dentre outras coisas, bloquear o uso de circularidades como a presente na sentença (L) acima.

3. Algumas considerações finais

Dado o exposto acima, fica patente a estreita relação entre o paradoxo de Curry e uma vasta gama de tópicos de profundo interesse em lógica e filosofia, tais como a consistência de sistemas formais, a natureza da negação, a semântica do predicado de verdade, etc. Uma avaliação do resultado obtido por Curry tem certamente muito a revelar. Um exemplo paradigmático é dado pela consequência derivada do resultado de Curry de que não só a ocorrência de contradições explícitas não é necessária para o surgimento de paradoxos, como também não é necessário o operador clássico de negação. Nesse aspecto, é destacável o interesse de lógicos não clássicos com relação ao paradoxo de Curry. Tanto a lógica paraconsistente quanto a lógica paracompleta possuem abordagens do resultado de Curry que buscam evitar suas consequências mais radicais. Para compreensão do iniciante, a lógica paraconsistente busca, ao rejeitar algumas regras clássicas de inferência, barrar o princípio de explosão. Com isso, lógicas paraconsistentes se caracterizam por ser inconsistente, porém não dedutivamente triviais; algo que, do ponto de vista clássico, é inconcebível. Já a lógica paracompleta rejeita o princípio clássico do terceiro excluído, ou seja, a verdade da disjunção entre uma sentença P qualquer e sua negação. Ela sustenta que há sentenças P^*, tal que ela e sua negação sejam ambas falsas; o que tornaria falso $P^* \vee \neg P^*$.

Outra característica que durante muitos anos foi considerada por filósofos, lógicos e matemáticos como um constituinte fundamental dos paradoxos foi a circularidade/impredicatividade. Russell e Poincaré fizeram defesas bastante enfáticas de que nossas teorias deveriam evitar procedimentos que envolvessem circularidade e definições impredicativas se quisessem evitar o surgimento de paradoxos. No entanto, mesmo essa proposta mostrou-se posteriormente insuficiente. O chamado paradoxo linear de Yablo (1993) revelou que circularidade e impredicatividade não são propriedades necessárias de paradoxos.

Desse modo, penso que, juntamente com o paradoxo linear de Yablo, o resultado obtido por Curry representou o calcanhar de Aquiles das principais propostas de teoria geral de paradoxos que pretendiam eliminar argumentos paradoxais focando no caráter contraditório e na circularidade presentes em tais argumentos.

A despeito de suas particularidades, o paradoxo de Curry cumpre o mesmo fundamental papel da ampla lista de resultados obtidos no que se convencionou chamar de *crise dos paradoxos*, a saber, revelar as entranhas da nossa ingênua e problemática compreensão de conceitos fundamentais para as ciências formais e para a racionalidade em geral. Falo aqui de conceitos tais como o de conjunto, verdade, propriedade, etc.

Referências

Barwise, J. &Etchemendy, J.(1984)*The Liar*. New York:Oxford University Press.

Beall, Jc (2008) "Curry'sParadox". In Stanford EncyclopediaofPhilosophy. Online em: http://plato.stanford.edu/entries/curry-paradox/, último acesso: 02/03/2017.

Boolos, George. (1998) *Logic, Logic and Logic*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Curry, Haskell.(1942). "The inconsistencyofcertain formal logics", *JournalofSymbolicLogic*7, pp. 115-117.

Da Costa, N &Bezieau, J-Y & Bueno, O. (1998) *Elementos de teoria paraconsistente dos conjuntos*. Coleção CLE, vol. 23. Campinas: UNICAMP.

Glanzberg, Michael(2001). "The liar in context", *PhilosophicalStudies* 103:217-251.

Gupta, A. &Belnap, N. (1993).*The Revision Theory of Truth*. Cambridge, MA: MIT Press.

Haack, Susan (2002) *Filosofia das Lógicas*. São Paulo: UNESP.

Kripke, Saul(1975). "Outline of a theory of truth", *Journal of Philosophy* 72:690-716.

Parsons, Charles(1974). "The Liar Paradox", *Journal of Philosophical Logic* 3: 381-412.

Potter, Michael. (2004) *Set theory and its philosophy*.Oxford; Oxford University Press.

Prior, Arthur N. (1955) "Curry's Paradox and 3-Valued Logic", *Australasian Journal of Philosophy* 33:177-82.

Russell, Bertrand. (1902) "Letter to Frege".*in* van Heijenoort (1967), pp. 124-5.

Sainsbury, R. M. (2009) *Paradoxes*. Cambridge: Cambridge University Press.

Tarski, Alfred. (1933) "The Concept of Truth in Formalized Languages", in Tarski(1983).

______. (1944) "The Semantic Conception of Truth and the Foundations of Semantics", in *Philosophy and Phenomenological Research*, 4: 341–376.

______. (1983) *Logic, Semantics, Metamathematics*. Indiana: Hacket Publishing Company.

vanHeijenoort, J. (ed.) (1967) *From Frege to Gödel*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Yablo, Stephen. (1993). "Paradox without self-reference". *Analysis* 53: 251–52.