O que é um conjunto?

Whar is a set?

Décio Krause
Newton C. A. da Costa
Universidade Federal de Santa Catarina

Resumo

Neste artigo, discutimos a noção de conjunto, desde sua concepção intuitiva de uma coleção qualquer de objetos, os elementos desse conjunto, até a forma como essa noção é capturada nas diferentes teorias. Enfatiza-se que não há uma só teoria de conjuntos, mas (potencialmente) uma infinidade delas, muitas entre si não equivalentes. O que resulta é que não há um conceito *absoluto* de conjunto, um que coincida de alguma forma em todas essas teorias: o que é ou deixa de ser um conjunto depende da teoria considerada.

Palavras-chave

Conjunto. Noção de conjunto. Teorias de conjuntos. Relatividade da noção de conjunto.

Abstract

In this paper we discuss the notion of set, since its intuitive meaning, as a collection of objects whatever, the elements of the set, until the way this notion is captured in the different set theories. We emphasize that there is no just one set theory, but (potentially) infinitely many, most of them not equivalent one each other. It results that there is no an absolute *concept of set, one that can be said to be the same in all theories: what is or not a set depends on the considered theory.*

Keywords

Set. Notion of set. Set theories. Relativity of the notion of set.

Introdução

A noção intuitiva de conjunto é clara e simples: trata-se de uma coleção de objetos, que são os elementos do conjunto. De acordo com Cantor, o criador da teoria (ver abaixo), "por um 'conjunto' [*Menge*] entendemos qualquer coleção, reunida em uma totalidade M, de objetos m definidos e distintos (os quais são chamados de 'elementos' de M) de nossa intuição ou pensamento." (ver Krause 2002, p.73) Ou seja, *qualquer* coleção pode, em princípio, ser considerada como um conjunto. Sinônimos são *coleção, agregado, classe*.

Dizemos que os elementos de um conjunto a ele pertencem, ou que são seus membros. Se um a objeto a pertence a um conjunto x, escrevemos $a \in x$, e escrevemos $a \notin x$ em caso contrário. Resulta da lógica clássica, que subjaz à teoria, que para quaisquer a e x, sempre temos um dos casos: $a \in x$ ou $a \notin x$ (Princípio do Terceiro Excluído), e não se pode ter ambos (Princípio da Contradição). A natureza dos objetos é também bastante geral, não havendo, em princípio, qualquer restrição relativamente ao que possam ser os elementos de um conjunto. Em princípio, nada impede que um dos elementos de um conjunto possa ser ele mesmo, assim, podemos ter, para um certo x, que $x \in x$ ou então, que $x \notin x$, tudo dependendo dos axiomas que adotemos.

Assim, de um ponto de vista intuitivo, podemos ter conjuntos cujos elementos são anjos, cadeiras, números irracionais, triângulos, o que quer que seja. Um conjunto pode ter inclusive uma infinidade de elementos. O conjunto dos números naturais, por exemplo, que usualmente denominamos de N, tem como elementos os números naturais 0,1,2,3, etc.

(muitas vezes, 0 não é considerado um número natural ---isso depende dos interesses do matemático). O conjunto R dos números reais também tem infinitos elementos, os quais podem ser identificados com os pontos de uma reta.

A noção informal de conjunto sempre esteve presente não só na matemática, mas na ciência em geral, e até o final do século XIX, não houve (aparentemente) necessidade de se refletir detalhadamente sobre esse conceito. A situação começou a se alterar depois de Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918). Motivado por problemas em uma parte da matemática denominada de Análise Matemática, desenvolveu uma teoria desses conjuntos, e impôs apenas uma restrição para o que sejam os elementos de um conjunto: eles devem ser distintos uns dos outros, como vimos na sua 'definição' acima. Cantor criou uma teoria verdadeiramente genial, mostrando que há diversos tipos de conjuntos com infinitos elementos; há o conjunto dos números naturais (uma quantidade 'enumerável'), cuja quantidade de elementos, ou (mais precisamente) *cardinal*, denotava por ℵ0 (alefe-zero, sendo alefe a primeira letra do alfabeto hebraico). Há o conjunto dos números reais, cujo cardinal é denotado por "c" (para indicar o 'contínuo'), e muitos outros conjuntos aos quais se associam cardinais. Além de nos apresentar infinitos de diversas ordens, Cantor ainda criou uma álgebra de tais cardinais que tem propriedades distintas das da aritmética comum (só coincide com essa no caso de cardinais finitos, que são exatamente os números naturais); por exemplo, resulta que ℵ0+ℵ0=ℵ0, o que contraria a álgebra dos números que conhecemos.

Observação: Uma observação digna de nota é a seguinte. Usualmente, encontramos nos livros de iniciação a afirmativa de que a relação de pertinência é primitiva, "indefinível". A rigor, isso não é certo. O que pode ou não ser definido depende do sistema axiomático que se está utilizando. Se a pertinência for adotada como conceito primitivo, então ela de fato não é definida *nessa abordagem*. Mas podemos escolher outra; por exemplo, tome-se o *conjunto unitário* (ver mais abaixo) como primitivo, ou seja, tomamos $\{x\}$ como primitivo, para x qualquer. Assim, definimos a pertinência pondo $a \in x$ se e somente se $x = \{a\}$.

A teoria de Cantor

Na teoria de Cantor, dois conjuntos têm o mesmo número cardinal se existe uma correspondência um a um (que os matemáticos chamam de bijeção) entre eles. Todos os conjuntos que admitem uma bijeção com o conjunto N dos números naturais são ditos *enumeráveis*, e têm cardinal ℵ0, o que não acontece com o conjunto R dos números reais, como mostrou o próprio Cantor. Um conjunto é *contável* se for finito ou enumerável.

Exemplos de conjuntos enumeráveis são o conjunto dos números naturais pares, o dos números naturais ímpares, o dos números inteiros, o dos números racionais (frações) e muitos outros. Note que a intuição vai sendo deixada de lado: afinal, o conjunto dos números pares não é um subconjunto do conjunto dos números naturais? Então, como podem ter 'o mesmo número de elementos'? O problema é a noção intuitiva de 'mesmo número de elementos', que para conjuntos infinitos perde seu sentido, motivo pelo qual fala-se em *número cardinal*. Assim, se A e B são dois conjuntos enumeráveis, como os conjuntos dos números pares e o dos números ímpares, a soma desses cardinais é o mesmo número cardinal de cada um deles, a saber, ℵ0 (a definição de adição de cardinais, com efeito, tem que ser dada adequadamente).

Para saber se um certo objeto pertence ou não a um conjunto, há duas alternativas básicas: podemos simplesmente verificar se o referido objeto é um dos elementos, como quando o conjunto tem poucos elementos e eles são descritos explicitamente. A outra alternativa é verificar se o objeto satisfaz alguma propriedade característica dos elementos do conjunto; por exemplo, podemos definir um conjunto contendo como elementos os números naturais maiores do que 10. Assim, um certo objeto pertence a este conjunto se e somente se for um número natural maior do que 10. A teoria de Cantor nos diz como operamos com conjuntos, fazendo uniões, interseções, diferenças, produtos cartesianos e outras operações, e por meio desses conceitos e operações, podemos exprimir praticamente todos os conceitos utilizados na matemática e na ciência padrões.

Um dos princípios básicos dessa teoria, que está implícito na teoria informal (não axiomatizada), denomina-se de Princípio da Compreensão, ou da Abstração: dada uma propriedade P qualquer, existe o conjunto dos objetos x que têm a tal propriedade; escrevemos isso assim: $\{x : \mathrm{P}(x)\}$, os dois pontos ":" significando "tal que" (ou "tais que"). Por exemplo, seja P a propriedade, ou condição, que diz que "x é carioca". De imediato, somos levados ao conjunto dos cariocas, que chamaremos de C, ou seja, à coleção (conjunto) cujos elementos são aquelas pessoas e somente aquelas pessoas, denominadas de "cariocas".

É fácil entender que o próprio conjunto dos cariocas não é carioca (pois é o conjunto dos cariocas), logo, constatamos que C não pertence a C. Ou seja, há conjuntos que não pertencem a eles mesmos, e há os que pertencem, como o chamado "conjunto universal", o conjunto que contém todos os conjuntos (que, por conter todos os conjuntos, contém a si próprio). Bertrand Russell (1872-1970) percebeu que se chamarmos de U ao conjunto de todos os conjuntos que não pertencem a si mesmos (como o conjunto C dos cariocas), acontece o seguinte: por um dos princípios básicos da lógica clássica (que ainda está informalmente sendo suposta), chamado de Princípio do Terceiro Excluído, U pertence a U ou U não pertence a U. Se U pertence a U, possui a propriedade característica de seus elementos, ou seja, não pertence a si mesmo; logo U não pertence a U. Por outro lado, se U não pertence a U, possui a referida propriedade; logo pertence a U. Disso se deriva que U pertence a U e que não pertence a U, uma contradição.

Outros "paradoxos" foram obtidos, mostrando-se que a teoria de Cantor é inconsistente, ou seja, permite que nela se derivem proposições contraditórias (uma sendo a negação da outra). Alguns matemáticos, que não gostavam da teoria de conjuntos, vibraram. Outros, notando a extrema capacidade redutora da teoria, permitindo que os conceitos matemáticos fossem adequadamente definidos, preferiam seguir Hilbert, que sustentava o caráter duradouro da teoria de conjuntos, alegando que "ninguém nos expulsará do paraíso criado por Cantor". Os motivos para tais desacordos eram diversos; alguns, como Kronecker (1823-1891) (que havia sido professor e orientador de doutorado de Cantor) e Poincaré (1854-1912), achavam que não se podia retroceder, nos fundamentos da matemática, para aquém dos números naturais. A frase célebre de Kronecker, "Deus nos deu os números naturais; todo o resto é obra do homem" é bem conhecida. Ou seja, a matemática deveria partir dos números naturais, mas a teoria de Cantor permitia que eles fossem definidos em termos de conjuntos, apresentando assim uma fundamentação ainda mais primária.

Zermelo e Zermelo-Fraenkel

O que fazer para contornar o problema dos paradoxos e para mostrar que a matemática podia ser fundamentada em bases sólidas? Russell propôs a Teoria dos Tipos em 1908, que alicerça seu monumental *Principia Mathematica*, escrito em parceria com A. N. Whitehead (1861-1947), e publicado em três volumes (1910, 1912 e 1913). Outra solução foi estabelecer uma fundamentação axiomática para a própria teoria de conjuntos, o que foi feito por Ernst Zermelo (1971-1953) em 1908. Zermelo apresentou a primeira versão axiomática da teoria de conjuntos, na qual se evitam os paradoxos conhecidos, como o presentado por Russell, visto acima.

O problema é que a teoria de Zermelo não era suficientemente rigorosa, como se constatou em seguida.[1] A teoria original de Zermelo comportava duas espécies de

1 - O conceito de *rigor* varia de época para época. O patamar de rigor que temos hoje na matemática foi alcançado a partir do final do século XIX, com o desenvolvimento da lógica matemática e dos estudos fundacionistas da matemática. Ver (da Costa 1980, p.232).

entidades, os conjuntos e os átomos (ele se referia a eles como Urelemente). Ur-elementos, ou "elementos básicos", como os denominamos, não são conjuntos, mas podem ser elementos de conjuntos. Na teoria de Zermelo, conjuntos, portanto, podem ter átomos ou outros conjuntos como elementos. Como se constatou depois, na teoria de Zermelo não há qualquer restrição a que um conjunto pertença a ele mesmo, ou que haja cadeias de conjuntos pertencendo uns aos outros. Para se evitar isso, necessita-se de um postulado, conhecido como Axioma da Regularidade (ou da Fundação), originalmente introduzido por J. von Neumann (1903-1957). Se não tivermos tal axioma, nada impede que um conjunto pertença a ele próprio.

A teoria de Zermelo foi incrementada por A. A. Fraenkel (1891-1965) e por T. Skolem (1887-1963) nas duas primeiras décadas do século XX, resultando na teoria conhecida como Zermelo-Fraenkel, simbolizada por ZF (mas deveria comportar ainda o nome de Skolem), e é talvez a mais conhecida e utilizada quando se necessita fazer referência a uma teoria de conjuntos. Por exemplo, em ZF não há átomos; todos os objetos tratados pela teoria são conjuntos. Os axiomas de ZF são os seguintes:

- (Extensionalidade) Dois conjuntos que contêm os mesmos elementos são iguais.

- (Par) Dados dois objetos quaisquer a e b, existe o conjunto (par não ordenado) que os contém e somente a eles, denotado por $\{a, b\}$. Em particular, se $a = b$, obtemos o conjunto cujo único elemento é a, dito *unitário* de a, e denotado por $\{a\}$.

- (Separação) Dados um conjunto z e uma propriedade ou condição $P(x)$, existe o subconjunto daqueles elementos de z que cumprem a condição P, denotado por $\{x \in z : P(x)\}$. Assim de um conjunto dado z qualquer, mediante a propriedade $P(x)$ definida por $x \neq x$, obtemos o conjunto que não tem elementos (pois é um fato da lógica que todo objeto x é tal que $x = x$), que se prova ser único. Tal conjunto é o *conjunto vazio*, denotado por $\emptyset$.

- (Conjunto das Partes) Dado um conjunto qualquer, existe o conjunto cujos elementos são os subconjuntos do conjunto dado, dito *conjunto das partes* do conjunto original.

- (Conjunto união) Dado um conjunto qualquer x, existe o conjunto cujos elementos são os elementos dos elementos de x, dito *conjunto união* de x.

- (Infinito) Existe um conjunto que contém o conjunto vazio e que contém o 'sucessor conjuntista' de qualquer de seus elementos. O sucessor conjuntista de um conjunto x é o conjunto união de x com o seu conjunto unitário, $\{x\}$.

- (Substituição) Introduzido por Fraenkel, generaliza o axioma da separação, permitindo, dentre outras coisas, que este seja dele derivado.

O axioma da separação impede que surjam paradoxos como o de Russell e outros conhecidos, pois para formarmos o conjunto dos objetos que têm uma certa propriedade, devemos ter um conjunto previamente formado do qual os elementos são 'separados'. No caso do conjunto de Russell, não há nada previamente especificado pela teoria de onde possamos 'separar' os conjuntos que não são elementos de si mesmos. Isso salva a teoria não só do paradoxo de Russell, como de todos os demais paradoxos conhecidos. O problema de saber se pode-se ou não derivar contradições em uma teoria como ZF é de difícil resposta. Dito de modo breve, não se pode demonstrar tal fato, mas este assunto foge aos objetivos destas notas. No entanto, o leitor pode confortar-se sabendo que, se houver tal possibilidade, a 'real' derivação de uma contradição será muito difícil de ser alcançada, devida a um teorema genial de Feferman (ver Corrada 1990).

Hoje, podemos reintroduzir ur-elementos em ZF sem problemas, obtendo uma teoria denominada de ZFU (Zermelo-Fraenkel com *Urelemente*), a qual parece ser mais apropriada para aplicações em ciência, onde trabalha-se com objetos que não são, em princípio, conjuntos. As duas teorias são *equiconsistentes*: uma delas leva a uma contradição se e somente se a outra também faz isso.

Outras teorias

Houve outros desenvolvimentos posteriores. von Neumann, na década de 20, desenvolveu uma teoria, posteriormente modificada por P. Bernays (1888-1977) e K. Gödel (1906-1978), que ficou conhecida como teoria de Von Neumann, Bernays e Gödel (NBG) (Krause 2002, §5.3). Em NBG, há *classes* e *conjuntos*, e estas duas palavras não são mais sinônimas; todos os conjuntos são classes, mas nem toda classe é um conjunto. Conjuntos são classes que pertencem a outras classes; aquelas classes que não pertencem a outras classes são chamadas de *classes próprias*. Os conjuntos de NBG de certo modo coincidem com os de ZF. Em qualquer dessas teorias, podemos provar que não há conjunto universal, desde que essas teorias sejam consistentes.[2] A prova é simples. Seja A um conjunto qualquer e seja B um subconjunto de A definido assim: os elementos de B são aqueles elementos de A que não pertencem a si mesmos. Então B pertence a B se e somente se pertence a A e não pertence a si mesmo. Desse modo, se B pertence a A, deduzimos que B pertence a B se e somente se B não pertence a B, e obtemos uma contradição nos moldes vistos acima. A única saída é assumir que B não pertence a A. Ora, isso mostra que, dado qualquer A, podemos sempre encontrar um conjunto que não pertença a ele, logo, não há conjunto que contenha todos os conjuntos.

O filósofo Willard Quine (1906-2000) criou duas teorias, conhecidas como NF (porque foi publicada em um artigo que iniciava com as palavras "New Foundations") e ML (porque apareceu em seu livro *Mathematical Logic*), que diferem substancialmente de ZF e de NBG. NF foi corrigida posteriormente por B. Rosser (1907-1989) e ML por H. Wang (1921-1995). Em NF, há o conjunto universal, contrariamente a ZF (supostamente consistente). ML é obtida acrescentando-se classes próprias a NF, de modo similar ao que se faz em ZF para obter NBG. Essas duas teorias têm propriedades distintas daquelas de ZF e de NBG.

Apenas um exemplo: em NF, o célebre *Axioma da Escolha* é falso, mas em ML ele vale para conjuntos, e ninguém sabe se o axioma se aplica a classes próprias. O axioma da escolha é *independente* dos axiomas de ZF e de NBG, se estes forem consistentes, ou seja, não pode ser demonstrado e nem refutado nessas teorias.

Apesar de mais famosas, essas teorias não são as únicas: há muitas outras teorias de conjuntos. Em cada uma delas um conceito de conjunto é delineado, e pode diferir daquele conceito que é delineado em outras teorias. Ou seja: *o que é conjunto em uma teoria pode não coincidir com o que é conjunto em outra*. Por exemplo, mudando-se a lógica subjacente, mudamos de teoria, e utilizando uma lógica conveniente, podemos elaborar *teorias paraconsistentes de conjuntos* nas quais o conjunto dos conjuntos que não pertencem

---

2 - Uma teoria é *consistente* se nela não se pode derivar duas *proposições contraditórias*, uma sendo a negação da outra. Caso contrário, é *inconsistente*. Em uma teoria inconsistente, se baseada na lógica clássica (ou na maioria dos sistemas lógicos conhecidos), pode-se demonstrar qualquer proposição expressa por sua linguagem. Uma outra forma de provar que uma teoria é consistente é mostrar que ela admite um *modelo,* uma "realização" ou interpretação que confirme seus axiomas. No entanto, isso exige que esse modelo seja provado existir em alguma outra teoria (devido a um teorema célebre de Kurt Gödel, uma teoria consistente e adequadamente formulada, como podemos assumir são as teorias sendo comentadas, não pode provar sua própria consistência), cuja consistência fica agora em suspenso, necessitando de uma outra teoria ainda, e assim *ad infinitum*.

a si mesmos, por exemplo, têm existência estabelecida sem os problemas usuais (de uma contradição acarretar que todas as proposições formuladas na linguagem da teoria possam ser derivadas como teoremas).

Cabe aqui uma observação importante. Do ponto de vista formal, podemos desenvolver uma teoria de conjuntos sem nos referirmos em nenhum momento à palavra "conjunto". Tal teoria seria abstrata, sem qualquer compromisso para com este conceito, ainda que pudesse ser interpretada como dizendo respeito a conjuntos, mas não os conteria em sua origem abstrata. Em outras palavras, o conceito de conjunto não é absoluto, mas relativo à particular teoria considerada.

Multiconjuntos e quase-conjuntos

Vimos que em sua caracterização informal do conceito de conjunto, Cantor requereu que os elementos de um conjunto devem ser *distintos* uns dos outros. Seria isso necessário? A resposta é negativa. Na teoria de *multiconjuntos* (Blizard 1989), um mesmo elemento pode figurar mais de uma vez em um conjunto. Nas teorias anteriores, os conjuntos $\{1,1,2,3,3\}$ e $\{1,2,3\}$ são iguais devido ao Axioma da Extensionalidade, pois têm os mesmos elementos, e seu cardinal é 3, pois tem três elementos. Mas na teoria de multiconjuntos eles são diferentes; o primeiro tem cardinal 5, e o segundo tem cardinal 3. Assim, um *conjunto* na teoria de multiconjuntos (que muito apropriadamente chamamos de *multiconjunto*), os elementos não precisam ser distintos, podendo ser inclusive *iguais*.

Os *quase-conjuntos*, por outro lado, que são os 'conjuntos' na *teoria de quase-conjuntos*, têm motivação em uma interpretação da mecânica quântica que entende as entidades básicas (que aqui denominaremos de *partículas*) como destituídas de condições de identidade. 'Ter identidade' significa poder ser identificado em um contexto e em outros como sendo *o mesmo indivíduo*. *Indivíduos* são objetos que têm identidade nesse sentido.

Tome agora uma reação química simples, a combustão do metano, na qual um átomo de gás metano se mistura com dois átomos de oxigênio, fornecendo uma molécula de dióxido de carbono e duas moléculas de água; em termos químicos,

$$CH_4 + 2O_2 \rightarrow CO_2 + 2H_2O.$$

Consideremos os quatro átomos de hidrogênio que há entre os reagentes e os quatro átomos de oxigênio também entre os reagentes (fixaremos os átomos de oxigênio, mas o raciocínio se aplica também para os átomos de hidrogênio, assim como para qualquer átomo, elétron, próton, etc.). Após a reação, há dois átomos de oxigênio na molécula de dióxido de carbono e mais dois, um em cada molécula de água. Quais dos quatro que havia entre os reagentes estão em cada caso entre os resultantes? É impossível dizer. Não é nem mesmo possível dizer que se tratam *dos mesmos* átomos que havia entre os reagentes. O conceito de identidade, como expresso acima, não pode fazer sentido para essas entidades. O interessante é que não se trata de uma falta de capacidade nossa ou de nossos laboratórios de identificar *quais* átomos foram para qual lugar. É um pressuposto da teoria que não pode haver identificação (veja mais detalhes em Schinaider e Krause 2014).

A teoria de quase-conjuntos trata de coleções de objetos que podem ser indiscerníveis sem que com isso resultem colapsar *no mesmo* indivíduo, como seria requisitado pela matemática usual, na qual não há entidades indiscerníveis que não sejam a mesma entidade[3]. O assunto é interessante mas extrapola os objetivos dessas notas.

Conclusões

É comum encontrarmos livros elementares, muitos adotados em nossas escolas, que consideram como um conjunto uma coleção de objetos, como bolas de futebol ou pessoas. É preciso cuidado aqui. Podemos por exemplo fotografar bolas e pessoas, mas não podemos fotografar um conjunto. Enquanto bolas e pessoas supostamente são 'reais', um conjunto é uma entidade abstrata. Pelo menos os professores de matemática deveriam conhecer essa distinção fundamental, ainda que possam continuar a utilizar a noção informal com seus alunos em classes elementares. No entanto, a aplicação desses conceitos ao mundo em que vivemos requer cuidado e muito preparo.

Ainda que o conceito de conjunto seja importante e razoavelmente fácil de manusear, não constitui o único modo de se fundamentar a matemática. Com efeito, a quase totalidade dos conceitos matemáticos que usamos podem ser obtidos na Teoria dos Tipos de Russell, ou na chamada Teoria de Categorias. Em tais teorias, não há conjuntos.

3 - Na matemática usual, só se pode considerar indiscernibilidade relativamente a algumas propriedades, mas não relativamente a *todas*.

Referências

Blizard, W. D, 1988. "Multiset theory". *Notre Dame Journal of Formal Logic* 3 (1): 36-66.

Corrada, M. (1990), On the lenght of proofs of set theoretical statements in Zermelo-Fraenkel set theory and Kelley-Morse theory of classes. *The Journal of Non-Classical Logic* 7 (1/2): 139-143.

Da Costa, N. C. A. (1980), *Ensaio sobre os Fundamentos da Lógica*. São Paulo,

Hucitec-EdUSP.

Krause, D. (2002), *Introdução aos Fundamentos Axiomáticos da Ciência*. São Paulo, EPU.

Schinaider, J. e Krause, D. (2014), Indiscernibilidade e identidade em química:

aspectos filosóficos e formais. *Manuscrito* 37 (1): 113-160.