

Teorias axiomáticas: o problema da ampliação da base

Axiomatic theories: the problem of basis expansion

Frank Thomas Sautter
Universidade Federal de Santa Maria/CNPq

Wagner de Campos Sanz
Universidade Federal de Goiás

Resumo

Estabelecemos o problema da ampliação, a logicamente mais fraca possível, da base axiomática de uma teoria, e o solucionamos para o caso da Lógica Proposicional Clássica.

Palavras-chave

entimema, Navalha de Occam, método de tablôs, informação.

Abstract

We settle the problem of the logically weakest expansion of the axiomatic basis of a theory, and solve it for Classical Propositional Logic.

Keywords

enthymeme, Occam's Razor, tableaux method, information.

1. O problema e a sua importância

A Navalha de Occam. Essa maneira prática e conveniente de proceder nos incita a escolher a mais simples dentre duas hipóteses que explicam os dados com igual eficiência.

A arte refinada de detectar mentiras, de Carl Sagan.

Nos livros de lógica encontramos métodos para a determinação da validade ou invalidade de argumentos completos, quer dizer, argumentos em que todas as premissas e a conclusão estão explicitadas. E quanto aos argumentos incompletos? O que fazer com os argumentos nos quais a conclusão não está explicitada, uma ou mais premissas não estão explicitadas, ou ambos? Argumentos incompletos são tão ou mais frequentes, na argumentação cotidiana, do que argumentos completos.

Um tipo particular de argumento incompleto é o entimema, um argumento “válido” ao qual falta a explicitação de uma ou mais premissas. A seguinte condição é necessária, porém insuficiente, para caracterizar um entimema:

Se um entimema tem a coleção de premissas P e a conclusão c , então:

1. c não é consequência lógica de P .
2. $\neg c$ não é consequência lógica de P .

Essas duas cláusulas juntas implicam a independência de c em relação a P . Além disso, essa independência implica a consistência de P .

3. Existe uma coleção de proposições Q tal que:

- 3.1 c é consequência lógica de PUQ .
- 3.2 $\neg c$ não é consequência lógica de PUQ .

Essa subcláusula implica que $\neg c$ não é consequência lógica de Q e implica a consistência de Q .

3.3 c não é consequência lógica de Q .

Essas duas últimas subcláusulas implicam a independência de c em relação a Q . Além disso, essa última subcláusula impede a solução trivial

$Q = \{c\}$ e, mais importante do que isso, exige a contribuição de P para a derivação de c.

Q é o conjunto das premissas tácitas do entimema.

As cláusulas acima são necessárias, mas insuficientes, para caracterizar um entimema, porque elas se aplicam igualmente a argumentos completos, mas inválidos. A distinção entre um argumento incompleto mas válido, e um argumento completo mas inválido não pode ser plenamente capturada pelo formalismo. Além disso, as premissas tácitas de um entimema não são proposições quaisquer que satisfazem a terceira cláusula acima; elas são, antes de tudo, proposições logicamente contingentes compartilhadas pelas partes de um debate e que, *além disso*, satisfazem a terceira cláusula acima. Na maioria dos casos há mais de uma coleção de proposições que satisfaz a terceira cláusula acima; a escolha adequada ou um subconjunto adequado de escolhas também não pode ser plenamente determinado pelo formalismo.

Neste trabalho propomos um tratamento para uma situação assemelhada à da presença de um entimema em um debate: um debatedor sustenta um conjunto de proposições B que constitui a base axiomática de sua teoria T; esse debatedor sustenta uma *nova* proposição t, quer dizer, uma proposição independente de B e, portanto, de T. Como podemos ampliar minimamente a base axiomática B, e, portanto, a teoria T, de modo que t seja consequência lógica da nova base axiomática e, portanto, seja parte da nova teoria? Qual axioma, o logicamente mais fraco possível, deve ser acrescentado à base axiomática existente?

Alegamos que esse problema tem uma considerável importância teórica, porque a solução para ele opera como uma Navalha de Occam, no sentido da epígrafe a este trabalho. Este problema também está relacionado à aplicação de diretivas éticas à argumentação, sob a forma de uma realização parcial do Princípio de Caridade, porque solicita a ampliação logicamente mais fraca da base axiomática de nosso oponente, ou seja, a ampliação mais caridosa para com o nosso oponente¹.

A seção seguinte é reservada a uma caracterização formal do problema em relação à Lógica Proposicional Clássica, de sua solução e da prova da correção dessa solução. Supomos que o leitor esteja familiarizado com o método de tablôs marcados para a Lógica Proposicional Clássica; caso contrário, o leitor poderá consultar Mortari (2001, p. 194-225).

1- A proposta é caridosa com o oponente porque quanto mais forte a ampliação tanto maior é o risco do nosso oponente futuramente cair em contradição.

2. A solução proposicional clássica ao problema

Seja T uma teoria proposicional clássica, ou seja, cuja lógica subjacente é a Lógica Proposicional Clássica, e B uma base axiomática finita para T , ou seja, para todo $x \in T$, x é consequência tautológica de B . Que se utilize, daqui por diante, apenas B , e não T , é possível devido ao Teorema da Compacidade da Lógica Proposicional Clássica.

Seja t uma tese tal que t é independente de B , ou seja, t não é consequência tautológica de B e a negação de t não é consequência tautológica de B .

Proposição 1: B é consistente.

Demonstração: Se B fosse inconsistente, t e a negação de t seriam ambas consequência tautológica de B .

Proposição 2: t é uma contingência.

Demonstração: Se t fosse uma tautologia, t seria consequência tautológica de B . Se t fosse uma contradição, a negação de t seria consequência tautológica de B .

Nosso problema tem a seguinte formulação:

Encontre um k tal que:

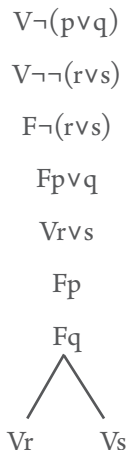
1. t é consequência tautológica de $B \cup \{k\}$.
2. não existe v tal que:
 - a. t é consequência tautológica de $B \cup \{v\}$.
 - b. v é consequência tautológica de k .
 - c. k não é consequência tautológica de v .

A solução do problema é a seguinte:

Construa o tablô marcado completo para $B \cup \{\neg t\}$, ou seja, a raiz do tablô é composta por todas as fórmulas de B e por $\neg t$ marcadas como verdadeiras. Além disso, para facilitar a prova

de resultados, mais adiante, adote a seguinte boa diretiva de construção do tablô: aplique, antes, as regras de expansão do tablô que não ramificam, e, só depois, as que ramificam.

Exemplo: Se $B = \{\neg(p \vee q)\}$ e t é $\neg(r \vee s)$. Nesse caso, o tablô marcado completo para $B \cup \{t\}$, com a boa diretiva de construção, é o seguinte:



Os dois ramos do tablô estão abertos.

Defina a contraditória de uma fórmula marcada da seguinte forma: $\neg x$ é a contraditória de Vx , e x é a contraditória de Fx .

Para cada ramo aberto, obtenha a disjunção das contraditórias das fórmulas atômicas marcadas do ramo. Essa é a solução para o ramo aberto.

Exemplo: No tablô acima, $p \vee q \vee \neg r$ é a solução para o ramo da esquerda e $p \vee q \vee \neg s$ é a solução para o ramo da direita.

k é a conjunção das soluções para os ramos abertos.

Exemplo: No tablô acima, k é $(p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee q \vee \neg s)$.

Lema 1: k atende a primeira cláusula do problema.

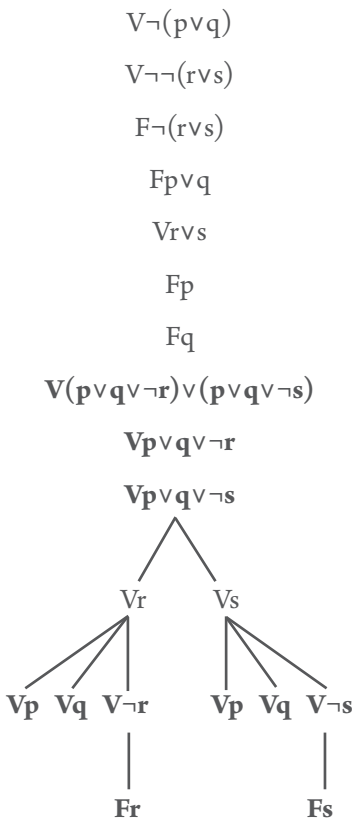
Demonstração:

Denomine “tronco” a parte inicial não-ramificada do tablô e “copa” o restante do tablô, ou seja, a parte final ramificada do tablô.

Fato 1: O “tronco” pertence a todos os ramos do tablô.

Acrescente V_k ao tablô, no final do tronco, e expanda V_k . k é uma conjunção, logo V_k não ramifica e cada um dos conjuntivos V_{k_1}, \dots, V_{k_n} resultantes da expansão de V_k pertencem ao tronco. Essa operação não afetou o número de ramos do tablô. Também não alterou, até o momento, a situação dos ramos, pois ramos abertos continuam abertos. Considere, agora, um ramo aberto qualquer. Há, agora, uma disjunção V_{k_i} resultante da expansão de V_k , pertencente ao ramo (Fato 1), obtida das contraditórias das fórmulas atômicas marcadas do ramo original. Expandir o ramo utilizando V_{k_i} . Esse ramo se subdividirá em tantos subramos quantos são os disjuntivos de k_i . Se necessário, expanda a folha desse ramo (Essa operação não ramifica o subramo, pois a fórmula marcada expandida é $V\neg x$ ou $F\neg x$, onde x é uma fórmula atômica). Cada um desses subramos está, agora, fechado, pois sua folha é a contraditória de alguma outra fórmula do subramo. Q.E.D.

Exemplo: Em relação ao nosso exemplo inicial, a aplicação do procedimento recomendado no Lema 1 resulta no seguinte tablô fechado (as fórmulas marcadas inseridas por meio do procedimento encontram-se destacadas):



Lema 2: k atende a segunda cláusula do problema, ou seja, k é minimal.

Demonstração:

Suponha que k não é minimal, ou seja, existe l , logicamente mais fraco do que k , tal que t é consequência tautológica de $BU\{l\}$. Seja m a forma normal conjuntiva de l . m é conjunção de alguns, mas não todos, conjuntivos de k . Além disso, t é consequência tautológica de $BU\{l\}$ se e somente se t é consequência tautológica de $BU\{m\}$. Aplique um procedimento

semelhante ao do Lema 1: acrescente V_m no final do tronco de $BU\{\neg t\}$ e expanda V_m . m é uma conjunção, logo V_m não ramifica e cada um dos conjuntivos V_{m_1}, \dots, V_{m_o} resultantes da expansão de V_m pertencem ao tronco. A expansão ulterior que aplicamos à copa do tablô agora não surte o mesmo efeito, pois há menos conjuntivos do que os necessários para fechar todos os ramos. Portanto, t não é consequência tautológica de $BU\{m\}$ e t não é consequência tautológica de $BU\{1\}$. Absurdo. Logo, k é minimal. Q.E.D.

Lema 3: k é a única solução do problema.

Demonstração:

Suponha que exista uma outra solução l , logicamente incomparável com k , ou seja, t é consequência tautológica de $BU\{1\}$. Seja m a forma normal conjuntiva de l . t é consequência tautológica de $BU\{1\}$ se e somente se t é consequência tautológica de $BU\{m\}$. Haverá ao menos um conjuntivo de k que não é conjuntivo de m , e ao menos um conjuntivo de m que não é conjuntivo de k . Seja r um ramo aberto de $BU\{\neg t\}$ tal que r é fechado, segundo o procedimento do Lema 1, por um conjuntivo k_i de k que não é conjuntivo de m . Seja l_j um conjuntivo de l que fecha o ramo r segundo o procedimento do Lema 1. l_j difere de k_i em pelo menos um disjuntivo. Seja s um disjuntivo de l_j que não é disjuntivo de k_i . Utilizando o procedimento do Lema 1 para a expansão da copa, o subramo que contém s não fecha. Portanto, t não é consequência tautológica de $BU\{m\}$ e t não é consequência tautológica de $BU\{1\}$. Absurdo. Logo, k é a única solução do problema. Q.E.D.

Acerca da conformação da solução k , convém observar o seguinte: se C é o conjunto das proposições atômicas componentes de proposições da base axiomática B , D é o conjunto das proposições atômicas componentes da proposição t que é acrescida à teoria original, e a interseção de C e D é vazia, então a solução procurada é $\wedge B \rightarrow t$, em que $\wedge B$ é a conjunção das proposições de B . Por exemplo, dadas as proposições atômicas p , q , e t , se $B = \{p, q\}$ e t é acrescida à teoria original, então $(p \vee q) \rightarrow t$ é a solução procurada. Observe que $(p \vee q) \rightarrow t$ é mais fraca tanto em relação a $p \rightarrow t$ como em relação a $q \rightarrow t$. No caso em que a interseção de C e D não é vazia, será útil ter em conta que tanto $r \rightarrow u$ como $r \rightarrow v$ são mais fracas do que $r \rightarrow (u \wedge v)$.

Para concluir, ainda é possível demonstrar que a solução k tem a seguinte característica desejável:

Lema 4: $\neg t$ não é consequência tautológica de $BU\{k\}$.

Demonstração:

Suponha que $\neg t$ é consequência tautológica de $BU\{k\}$. Pelo Lema 1, t é consequência tautológica de $BU\{k\}$. Portanto, $BU\{k\}$ é inconsistente. Por hipótese, t é independente de B , logo $BU\{t\}$ é consistente e k não é logicamente equivalente a t . Consideremos as outras possibilidades quanto à comparabilidade lógica de k e de t :

- a) k é logicamente mais fraco do que t : nesse caso, por $BU\{k\}$ ser inconsistente, $BU\{t\}$ também seria inconsistente. Absurdo.
- b) k é logicamente mais forte do que t : pelo Lema 2, esse caso é impossível.
- c) k e t são logicamente incomparáveis: t é consequência tautológica de $BU\{t\}$. Logo, pelo Lema 3, k e t são logicamente comparáveis.

Logo, $\neg t$ não é consequência tautológica de $BU\{k\}$. Q.E.D.

3. Provas por inspeção visual

Ao longo das demonstrações, utilizamos intensivamente a forma normal conjuntiva das fórmulas proposicionais. Na comparabilidade lógica das fórmulas proposicionais, fomos guiados pela seguinte intuição: cada conjuntivo da forma normal conjuntiva de uma fórmula proposicional é uma unidade de informação e a informação total veiculada pela fórmula proposicional é o agregado das informações dos conjuntivos de sua forma normal conjuntiva. Uma teoria da informação proposicional, que sistematizasse essa correlação entre unidade de informação e conjuntivo de forma normal conjuntiva, poderia traduzir os resultados aqui alcançados em termos puramente informacionais.

No restante deste trabalho, desenvolvemos o esboço de um tal tratamento puramente informacional da Lógica Proposicional Clássica. Um tratamento mais detalhado dessa questão é apresentado por Sautter (2013).

Considere a seguinte definição recursiva da relação “a informação veiculada pela proposição x é uma parcela da informação veiculada pela proposição y ”, em símbolos $I x y$:

- i) a informação veiculada pela proposição x é uma parcela (imprópria) da informação veiculada pela proposição x ;
- ii) a informação veiculada pela proposição x é uma parcela da informação veiculada pela proposição $x \wedge y$
- iii) a informação veiculada pela proposição $x \wedge y$ é uma parcela (imprópria) da informação veiculada pela proposição $y \wedge x$;
- iv) a informação veiculada pela proposição $x \wedge (y \wedge z)$ é uma parcela (imprópria) da informação veiculada pela proposição $(x \wedge y) \wedge z$;
- v) se a informação veiculada pela proposição x é uma parcela da informação veiculada pela proposição y e a informação veiculada pela proposição y é uma parcela da informação veiculada pela proposição z , então a informação veiculada pela proposição x é uma parcela da informação veiculada pela proposição z .

Fato 2: A relação Ixy é uma relação mereológica entre x e y , ou seja, ela é reflexiva, transitiva e antissimétrica.

Por trabalharmos com as formas normais conjuntivas completas das proposições, e não com as próprias proposições, não precisamos nos preocupar em definir a relação Ixy para outras operações lógicas, nem mesmo para a negação, embora a conjunção, sozinha, não seja funcionalmente completa. As provas por inspeção visual serão exclusivamente aquelas que resultam da comparação dos conjuntivos, considerados como unidades não analisáveis, das formas normais conjuntivas completas das proposições. Além disso, não estamos, aqui, preocupados com o problema mais fundamental de assentar a Lógica Proposicional Clássica em uma semântica governada pela noção de informação, caso contrário, não poderíamos assumir que toda proposição não tautológica pode ser colocada em forma normal conjuntiva completa, mas teríamos de demonstrá-lo.

O seguinte resultado não é difícil de ser demonstrado:

Teorema 1: Seja um argumento **A** cujas proposições componentes não são tautológicas (tautologias não têm forma normal conjuntiva completa). **A** é válido se e somente se cada parcela da informação veiculada pela conclusão de **A** também é uma parcela da informação veiculada pela conjunção das premissas de **A**.

Definição: Uma proposição p é parcela de um conjunto de proposições C quando p é consequência lógica de C .

Os seguintes resultados também não são difíceis de ser demonstrados:

Teorema 2: Seja um conjunto **C** de proposições não-tautológicas e p uma proposição contraditória. **C** é consistente se e somente se não é o caso que cada parcela da informação veiculada por p também é uma parcela da informação veiculada por uma proposição de **C**.

Teorema 3: Seja um argumento entimemático **A**. Se a conjunção das parcelas da informação veiculada pela conclusão de **A** que não são parcelas da informação veiculada por ao menos uma premissa de **A** for acrescentada às premissas de **A**, o argumento resultante é válido.

Referências bibliográficas

MORTARI, C. A. *Introdução à lógica*. São Paulo: Editora UNESP, 2001.

SAUTTER, F. T. “Un tema de Hilbert y Ackermann: formas normales para la prueba de validez”. In: ESQUISABEL, O. M. & SAUTTER, F. T. (Editores). *Conocimiento simbólico y conocimiento gráfico. História y teoría*. Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Academia Nacional de Ciencias de Buenos Aires, 2013. p. 71-80.