

# OS DIFERENTES TIPOS DE DEMONSTRAÇÕES: UMA REFLEXÃO PARA OS CURSOS DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

---

Marcos Coutinho Mota<sup>1</sup>, Marcos Pavani de Carvalho<sup>2</sup>

**Resumo:** O presente trabalho é parte dos estudos realizados em um projeto de Iniciação Científica financiado pela FAPEMIG. Ele traz uma reflexão e exposição sobre os principais métodos de demonstração. Por meio de uma revisão bibliográfica e seguindo uma sequência lógica, demonstraremos algumas proposições básicas em Matemática, objetivando informar e, sobretudo deixar bem claro as principais diferenças entre os tipos de demonstrações. Tendo em vista que durante o Ensino Fundamental e Médio a Matemática é apresentada aos alunos de uma maneira simbólica e cheia de fórmulas mágicas, sem que essas sejam explicadas ou justificadas. Os alunos não têm a necessidade de uma maior reflexão sobre o que se está fazendo, tornando uma das principais causas dos problemas que eles encontram, nos cursos superiores, com as demonstrações. Espera-se com este trabalho, promover uma facilitação nas demonstrações dos alunos dos cursos de Licenciatura em Matemática.

**Palavras-chave:** Matemática, Lógica, Demonstrações.

## 1 Introdução

“Enunciar e demonstrar teoremas é uma das ocupações centrais de todo professor ou estudioso da matemática; e não é admissível que tal pessoa sinta-se deficiente em demonstrações” (ÁVILA, 2006, pref.). Além do fato de que quando o aluno faz uma demonstração, ele está desenvolvendo sua expressão oral, escrita e gráfica, pois uma demonstração exige certo domínio de argumentação, algo que, como futuro professor, irá lhe ser de grande valor na sala de aula.

## 2. Objetivos

Demonstrar não é fácil, mas é necessário. Durante o Ensino Fundamental e Médio a Matemática é apresentada aos alunos de uma maneira simbólica e cheia de fórmulas mágicas, sem que essas sejam explicadas ou justificadas, os alunos não têm necessidade de uma reflexão mais profunda sobre o que se está fazendo, gerando uma formação estreita e acrítica. (NAGAFUCHI, 2008, p.128). É neste aspecto que se encontra nosso papel, pois iremos informar e deixar bem claro as principais diferenças entre os tipos de demonstrações.

---

*1Licenciatura em Matemática do IF SUDESTE MG - Campus Rio Pomba. Bolsista PROBIC FAPEMIG.  
marcoscm16@yahoo.com.br*

*2Licenciatura em Matemática do IF SUDESTE MG – Campus Rio Pomba, orientador do PROBIC FAPEMIG.  
marcos.pavani@ifsudestemg.edu.br*

### 3. Metodologia

Por meio de uma revisão bibliográfica realizada em estudos de Iniciação Científica e seguindo uma sequência lógica, explicaremos e exemplificaremos os principais métodos de demonstrações.

### 4. Demonstrações

Quando temos que demonstrar é comum nos depararmos com os seguintes termos: **Provar, Explicar, Proposição e Teorema (Hipótese e Tese)**. É fundamental que se saiba o significado e aplicação de cada um deles:

**4.1 Provar:** é utilizar uma argumentação precisa que convença o leitor de que certa proposição anteriormente enunciada está correta. É algo essencial para o estabelecimento da verdade matemática. Pode ser realizada direta ou indiretamente. A prova direta é estimada pelos matemáticos, ao passo que ela explica, por meio dos axiomas e resultados já provados, a razão da validade da afirmação que está sendo provada. Ela é direta, pois não usa de artifícios. Nela assumimos a hipótese como verdadeira e através da utilização de uma série de argumentos verdadeiros e deduções lógicas, concluímos a veracidade da tese.

Exemplo de prova direta: Seja  $n$  um número ímpar. Então  $n^2$  também é um número ímpar.

**Prova:** Assumindo que  $n$  é um número natural ímpar, então existe um número natural  $k$  tal que  $n = 2k + 1$ . Consequentemente,  $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ , o que implica que  $n^2$  é um número ímpar. ■

Vale ressaltar que se um teorema é contraposto a outro, logo são equivalentes: Para provar o teorema: “o quadrado de um número par também é par”, basta observar que ele é contraposto ao acima provado, portanto, são equivalentes.

**4.2 Explicar:** Encontra-se no nível do sujeito locutor com a finalidade de comunicar ao outro o caráter de verdade de um determinado enunciado matemático. Por exemplo: quando um professor explica uma matéria a uma turma, ela pode ser reconhecida como convincente por aquele grupo de pessoas, constituindo-se para eles uma prova, seja ela verdadeira ou não.

**4.3 Proposições:** Também chamadas de sentenças, são frases afirmativas em forma de oração, com sujeito, verbo e predicado, podendo ser verdadeira ou falsa, não admitindo uma terceira opção (princípio lógico do terceiro excluído).

**Exemplo:** Sejam as proposições: A: A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é  $180^\circ$ . B: Marte é um planeta. C: Todo brasileiro é alagoano.

Todas estas proposições se enquadram no conceito que citamos acima. Quando classificadas, as proposições A e B são verdadeiras, e a proposição C é falsa, pois o conhecido jogador de futebol Pelé (Edson Arantes do Nascimento), nasceu em Três Corações, Minas Gerais. Para negar uma proposição, basta apresentar um contra-exemplo.

**4.4 Teoremas:** São proposições verdadeiras que pode ser verificadas mediante uma demonstração. Podem ser validados partindo-se da hipótese (o que possuímos como verdade), objetivando chegar à tese (o que queremos demonstrar).

São geralmente apresentados: “ $A \Rightarrow B$ ” ou “ $A$  implica  $B$ ”. Sendo denominadas assim as proposições:

$A$ : **Hipótese** ou condição suficiente para a validação de  $B$ .

$B$ : **Tese** ou condição necessária para a validação de  $A$ .

Seguindo esta relação, se vale  $A$ , vale  $B$ .

**Exemplo:** Sejam as proposições:  $D$ :  $n$  é um número que pode ser escrito na forma  $2k$ , com  $k \in \mathbb{N}$ .  $E$ :  $n$  é um número par.

Pelo exposto, temos:  $D$  é condição suficiente de  $E$ , ou seja, basta a hipótese  $D$  ser verdadeira para que tese  $E$  também seja. A tese, por sua vez é uma condição necessária da hipótese. Se  $D$  for verdadeira,  $E$  será necessariamente verdadeira. A recíproca de um teorema  $A \Rightarrow B$  é a proposição  $B \Rightarrow A$  ou  $A \Leftarrow B$ . Ela pode ou não ser verdadeira. Um exemplo em que ela não seja verdadeira: A recíproca do teorema “todo número primo maior que dois é ímpar” é “todo número ímpar é primo e maior do que dois”. Isto é falso, porque nem todo número ímpar é primo. Caso a recíproca do teorema seja verdadeira, ele pode ser representado por:  $A \Leftrightarrow B$  (A se, e somente se, B). Neste caso, qualquer uma das proposições é ao mesmo tempo condição necessária e suficiente para a validade da outra.

Vale ressaltar que geralmente no final de uma demonstração pode aparecer “C.Q.D.”, para “Como Queríamos Demonstrar”. Ou um pequeno quadrado preenchido ou não: ■, □ com a mesma equivalência. Para a realização de uma demonstração não existe um único caminho. Existem problemas em que é necessária a utilização de métodos diferentes. A seguir, expomos e exemplificamos os principais métodos de demonstração:

**4.5 Demonstrações por Contraposição:** É um método muito utilizado em demonstrações. Sua característica principal é a negação da tese, não é a tese que se deseja provar, e sim a negação da hipótese.

**Exemplo:** Se  $x^2 - 6x + 5$  é par, então  $x$  é ímpar. Ao negarmos nossa tese, afirmamos que  $x$  é par. Sendo par, pode ser escrito na forma  $x = 2k$ , com  $k \in \mathbb{N}$ .

Assim,

$$\begin{aligned}x^2 - 6x + 5 &= (2k)^2 - 6(2k) + 5 = 4k^2 - 12k + 5 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2(2k^2 - 6k + 2) + 1 = 2m + 1, \text{ com } m \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Ou seja, concluímos que  $x^2 - 6x + 5$  é ímpar. O que contradiz a hipótese. ■

**4.6 Demonstrações por Redução ao Absurdo:** Este método é considerado uma das ferramentas mais poderosas da matemática. De um modo geral, o roteiro que segue uma demonstração por redução ao absurdo é o seguinte: Assumimos a validade da hipótese e supomos que a nossa tese é falsa. Usando as duas informações anteriores, concluímos um “absurdo”, ao chegar a uma proposição que contradiz uma suposição levantada anteriormente.

**Exemplo:** Para provar a irracionalidade de  $\sqrt{2}$  utilizamos o método de redução ao absurdo.

**Demonstração:** Se  $\sqrt{2}$  fosse racional, (negamos a tese) então haveria dois inteiros positivos  $p$  e  $q$  tais que  $\sqrt{2} = p/q$ , sendo  $p/q$  uma fração irredutível, isto é,  $p$  e  $q$  primos entre si. Temos:  $\sqrt{2} = p/q$ .

Elevando esta igualdade ao quadrado, encontramos:

$$(\sqrt{2})^2 = (p/q)^2 \Rightarrow 2 = p^2/q^2 \Rightarrow p^2 = 2q^2$$

Isso nos mostra que  $p^2$  é par. Como provamos acima, se  $p^2$  é par, então  $p$  também é par. Assumindo  $p = 2r$ , com  $r \in \mathbb{N}$ , temos:

$$p^2 = 2q^2 \Rightarrow (2r)^2 = 2q^2 \Leftrightarrow 4r^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2r^2$$

A partir daí, conclui-se que  $q$  também é par. Isto é absurdo, pois se  $p$  e  $q$  são ambos pares, consequentemente são ambos divisíveis por 2 e a fração  $p/q$  não é irredutível. O absurdo a que chegamos é consequência da hipótese que fizemos inicialmente, de que  $\sqrt{2}$  fosse racional. Somos, assim, forçados a afastar essa hipótese e concluir que  $\sqrt{2}$  é irracional. ■

**4.7 Demonstrações por Indução Finita:** A indução matemática ou indução finita serve para provar que uma sequência de proposições denotadas por  $P(1), P(2), \dots, P(n)$  é verdadeira, sem a necessidade de realizar a prova para cada uma delas. O princípio é mostrar que  $P(1)$  é verdadeira, e supondo verdade uma quantidade  $P(K)$ , mostrar que  $P(K+1)$  é verdadeira.  $P(K)$  é denominada Hipótese de Indução (H.I.).

**Exemplo:** Provar se a sequência  $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = n(n+1)/2$  é verdadeira para todo número natural  $n$ . Prova:

(i) Mostrar que  $P(1)$  é verdadeira:  $P(1): 1 = 1(1+1)/2 = 1$ .

Portanto,  $P(1)$  é verdadeira.

(ii) Supondo válida para uma quantidade  $k$ , mostrar que é verdade para uma quantidade  $(k+1)$ , isto é,  $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ .

$$P(k): 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + k = k(k+1)/2 \text{ (H.I.)}$$

Logo,

$$\begin{aligned} P(k+1): 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + k + (k+1) &= [k(k+1)]/2 + (k+1) = \\ &= [k(k+1) + 2(k+1)]/2 = [(k+1)(k+2)]/2 = \\ &= (k+1)[(k+1) + 1]/2 \end{aligned}$$

Portanto, ao assumir  $P(k)$ , conseguimos provar  $P(k+1)$ , concluindo a demonstração. ■

## 5 Conclusões

Existem vários métodos de se provar uma sentença, cabendo ao professor escolher a mais apropriada ao que se pretende demonstrar, pois:

*O desenvolvimento cognitivo dos estudantes deve ser levado em conta tal que a prova seja apresentada em formas que sejam para eles potencialmente significativas. Isto requer que os educadores e os matemáticos repensem a natureza da prova matemática e considerem o uso de diferentes tipos de prova de acordo com o desenvolvimento cognitivo do indivíduo. (BALACHEFF, 2008, p. 506).*

Além do exposto acima, tão importante quanto saber os principais métodos de demonstrações, é: Ler bem o enunciado do problema e utilizar todas as informações disponíveis; Buscar de imediato identificar hipótese e tese; Fazer casos particulares ou casos mais simples de problemas similares, para adquirir familiaridade; Mudar sua representação, transformando-o em um problema equivalente; Usar a imaginação pesquisando caminhos alternativos. Extrapolar os limites!

## Referências

- [1] ÁVILA, G. S. S. *Análise Matemática para Licenciatura*. 3. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2006.
- [2] BALACHEFF, N. *The role of the researcher's epistemology in mathematics education: an essay on the case of proof*. ZDM Mathematics Education, p.506. V.40. 2008.
- [3] NAGAFUCHI, T. *Um estudo histórico-filosófico acerca do papel demonstrações em cursos de Bacharelado em Matemática*. 150fs. Dissertação (Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina. 2008.
- [4] OLIVEIRA, K. I. M.; FERNANDÉZ, J. C. *Iniciação à Matemática: Um curso com problemas e soluções*. Rio de Janeiro: SBM, 2010.