RESOLUÇÕES DE EQUAÇÃO DO 2º GRAU: MÉTODO DO PASSADO COM TECNOLOGIA DO PRESENTE

Caio César Pereira de Paula[1], Juracélio Ferreira Lopes[2], Davidson Paulo Azevedo Oliveira[3]

Resumo: Neste trabalho estudaremos os métodos de resolução de equações quadráticas de Al-Khowarizmi que apresentava uma resolução retórica com justificava geométrica. As equações foram classificadas em seis tipos e nos restringimos a dois desses tipos, $x^2+bx=c$ e $x^2+c=bx$. O objetivo desse trabalho é construir as justificativas geométricas por meio de recursos dinâmicos do *software* GeoGebra de modo que seja possível resolver várias equações de um mesmo tipo com uma única construção. Além disso, percebemos que este trabalho pode ser utilizado como recurso metodológico de ensino.

Palavras-chave: GeoGebra, História da Matemática, Equações quadráticas.

1 Introdução

O presente trabalho é um recorte de uma pesquisa que está sendo desenvolvida e fomentada pelo Instituto Federal de Minas Gerais através do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica Júnior – PIBIC-Jr em que estudamos as possibilidades de utilização da História das Equações de Segundo Grau como um recurso pedagógico.

Na busca dessas possibilidades nos deparamos com métodos de resolução de equações no decorrer da história em que outros povos e épocas ressaltavam aspectos geométricos. O que usualmente não ocorre no atual ensino deste tema que apresenta uma abordagem simbólica com a utilização de fórmulas. Fato também verificado por Refatti e Bisognin (2005, p. 80) ao afirmarem que “apesar da ênfase no enfoque puramente algébrico e simbólico destacados na solução de uma equação quadrática no ensino atual, suas origens revelam um grande conhecimento de técnicas geométricas”.

Al-Khowarizmi, matemático muçulmano do século VIII d.C., utilizava a técnica de completar quadrado para resolver equações quadráticas. Ele resolvia as equações de forma retórica, mas utilizava o método geométrico para justificar a exatidão de suas regras. Não considerava números negativos como raízes das equações ou como coeficientes. De acordo com Carvalho, Barone, Miorim, Junior e Begiato (2001) em um trabalho de Al-Khowarizmi intitulado *Kitab al-Jabr wa-l-Muqabala* ele apresentou a primeira solução sistemática das equações lineares e quadráticas e as classificou em seis tipos: (1) quadrados iguais a raízes; (2) quadrados iguais a números; (3) raízes iguais a números; (4) quadrados mais raízes iguais a números; (5) quadrado mais números iguais a raízes; (6) raízes mais números iguais a quadrado.

1Instituto Federal de Minas Gerais. Bolsista. *caiocesarbq@hotmail.com*
2CODAMAT – Instituto Federal de Minas Gerais. *lopes.juracelio@ifmg.edu.br*
3CODAMAT – Instituto Federal de Minas Gerais. *davidson.oliveira@ifmg.edu.br*

A fim de traduzirmos esses casos para a notação moderna devemos ter em mente que para Al-Khowarizmi, “quadrados” representa em linguagem atual o quadrado da incógnita, “raízes” representa a incógnita de primeiro grau, e números são os números em nosso sistema atual. Al-Khowarizmi recorria a construções geométricas para justificar suas regras na resolução de equações quadráticas e neste trabalho utilizaremos o software GeoGebra para fazer tais construções de forma que possamos testar diversas equações de mesmo tipo numa mesma construção. Trabalharemos apenas com os tipos (4) e (5) que na linguagem atual são, respectivamente, equações do tipo $x^2+bx=c$ e $x^2+c=bx$.

GeoGebra é um software de matemática que reúne geometria, álgebra e cálculo. Foi criado, em 2002, pelo o professor Markus Hohenwarter da Universidade de Salzburgo na Áustria. Este software é gratuito e seu download pode ser feito através do site: http/www. Geogebra.org/cms/pt_BR

2 Objetivo

Estudar alguns métodos utilizados por Al-Khowarizmi para resolver equações quadráticas por meio de construções geométricas e utilizar o *software* GeoGebra para efetuar tais construções de forma que elas permitam resolver várias equações de um mesmo tipo através de uma única construção.

3 Metodologia

Fizemos uma pesquisa bibliográfica em livros de História da Matemática e periódicos que tratassem do tema. Em seguida, selecionamos os que abordavam os casos de resolução de equações do segundo grau de Al-Khowarizi para compreender este método e realizar as construções de um modo dinâmico.

Utilizamos, então, as ferramentas do *software* GeoGebra para realizar essas construções de uma forma geral, de modo que podemos encontrar as soluções de equações do segundo grau com o movimento de seletores que representam os coeficientes das equações quadráticas.

4 Resultados e Discussões

4.1 Método de Al-Khowarizmi

Al-Khowarizmi ilustrou equações do caso (4) por meio do seguinte problema: Um quadrado mais dez raízes do mesmo é igual a trinta e nove. Qual é o valor do lado do quadrado?

Na linguagem atual, este problema pode ser traduzido em encontrar as raízes da equação:

$$X^2+10x=39 \qquad (1)$$

Na tabela 1 a seguir pode-se observar a solução da equação (1) de forma retórica.

Tabela 1: Solução retórica de Al-Khowarizmi

Forma retórica de Al-Khowarizmi	Em notação atual
Tome a metade do número de raízes	$10 \div 2 = 5$
Esse número deve ser multiplicado por ele mesmo	$5 \times 5 = 25$
Some trinta e nove a este produto	$25 + 39 = 64$
Extraia a raiz quadrada	$\sqrt{64} = 8$
Retire a metade do número de raízes	$8 - 10 \div 2 = 3$
Resultado	3

A justificativa geométrica apresentada por Al-Khowarizmi para resolução da equação (1) pode ser verificada na figura 1 a seguir:

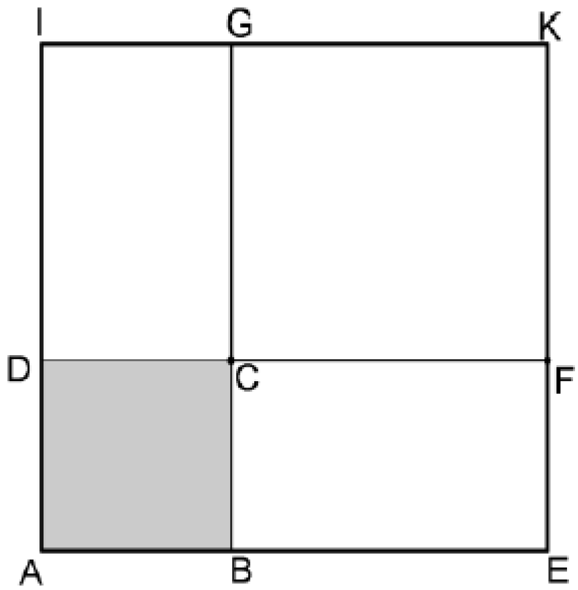

Figura 1: Solução geométrica da equação $x^2 + 10x = 39$.

Nessa figura o segmento AB representa o valor da incógnita x, o segmento BE tem a metade da medida do valor do parâmetro b que é o coeficiente da incógnita de primeiro grau, nomeado por ele de raiz. Dessa forma o polígono AEFCGI tem área igual 39, pois representa x^2+10x que é a equação inicial. O quadrado CFKG tem área igual a 25. Portanto, o quadrado AEKI tem área igual a 39+25=64, logo tem lado igual a 8. Temos, então, que AE=8, porém como AE=AB+BE e BE=5 e, portanto, AB=x=3.

Para o caso (5), quadrados mais números iguais a raízes, pode ser ilustrado através do exemplo $x^2+15=8x$. A construção geométrica é dada pela figura (2).

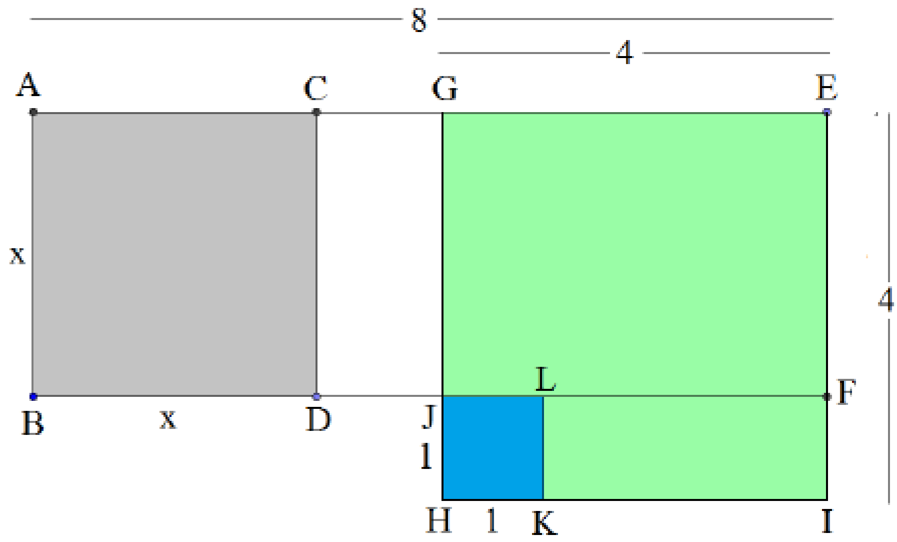

Figura 2: Solução geométrica da equação $x^2 + 15 = 8x$

Na figura 2 a equação é representada pelo quadrado ABDC de lado x, pelo retângulo CDFE de área 15, logo o segmento AE=8. Para resolver a equação tome o ponto G na metade do segmento AE e faça um quadrado de lado IE medindo 4 unidades. Os retângulos CDJG e KIFL têm a mesma área, pois FI=CG=4–x e KI=GJ=x. Como o quadrado GEIH tem área 16 unidades quadradas e o polígono KIEGJL tem área 15 unidades quadradas concluímos que o quadrado HKLJ tem área uma unidade quadrada e, portanto, lado igual a uma unidade. Então x=3 será uma raiz. Para a outra raiz Al-Khowarizmi sugere que é possível encontrá-la por meio da soma de EG e GC, isto é, 4+1=5.

4.2 Construção no GeoGebra

Através da construção feita no GeoGebra é possível encontrar as raízes positivas de diversas equações do tipo (4) apenas variando os parâmetros b e x. Observe a figura 3:

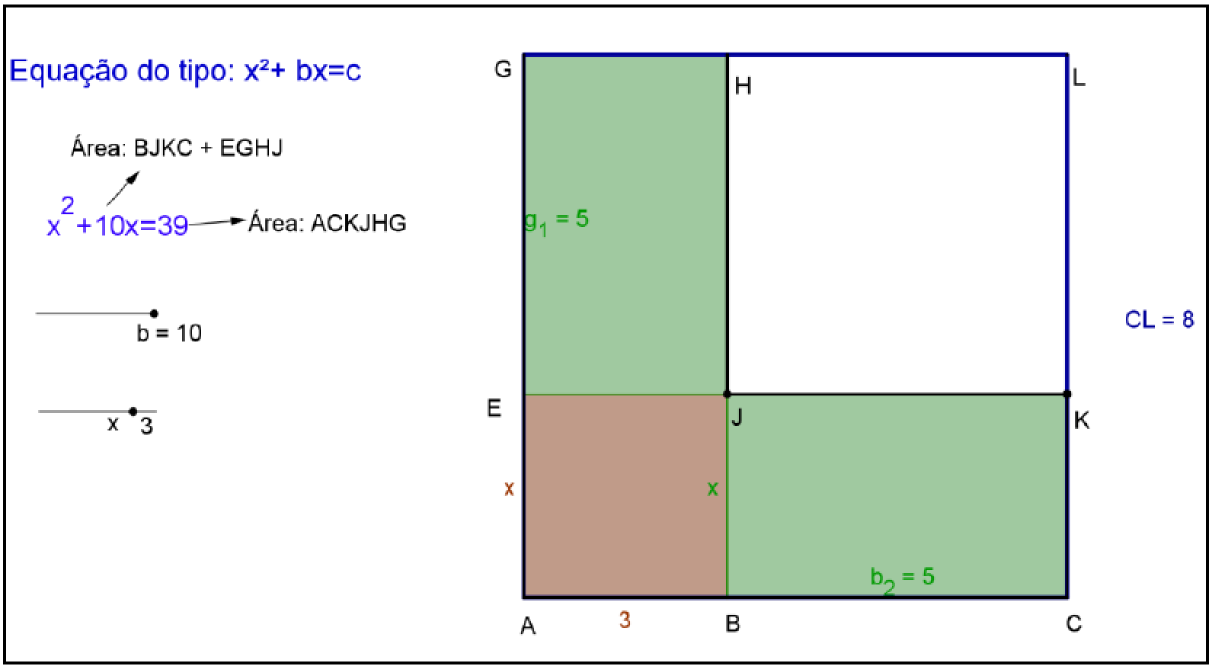

Figura 3: Solução geométrica para equações do tipo $x^2 + bx = c$

Por exemplo, para a equação $x^2+10x=39$, conhecemos o valor do parâmetro b=10 e precisamos encontrar o valor de x para que a área do polígono ACKJG seja igual a 39. Através desta construção podemos variar parâmetro b arrastando a bolinha do seletor b = 10 . Em seguida variamos o parâmetro x até que a área do polígono ACKJG seja igual a 39 arrastando a bolinha do seletor x 3 O valor de x que satisfaça esta condição é a raiz positiva da $x^2+10x=39$.

Na figura 4 está representada a construção para solução de equações do tipo (5) que possuem duas raízes positivas. Por exemplo, para equação $x^2+15=8x$, basta posicionar o parâmetro b no número 8 e variar o parâmetro x até que a área do retângulo BEGF seja igual a 15. O comprimento dos segmentos DE e EG serão as raízes desta equação, segundo o método de Al-Khowarizmi.

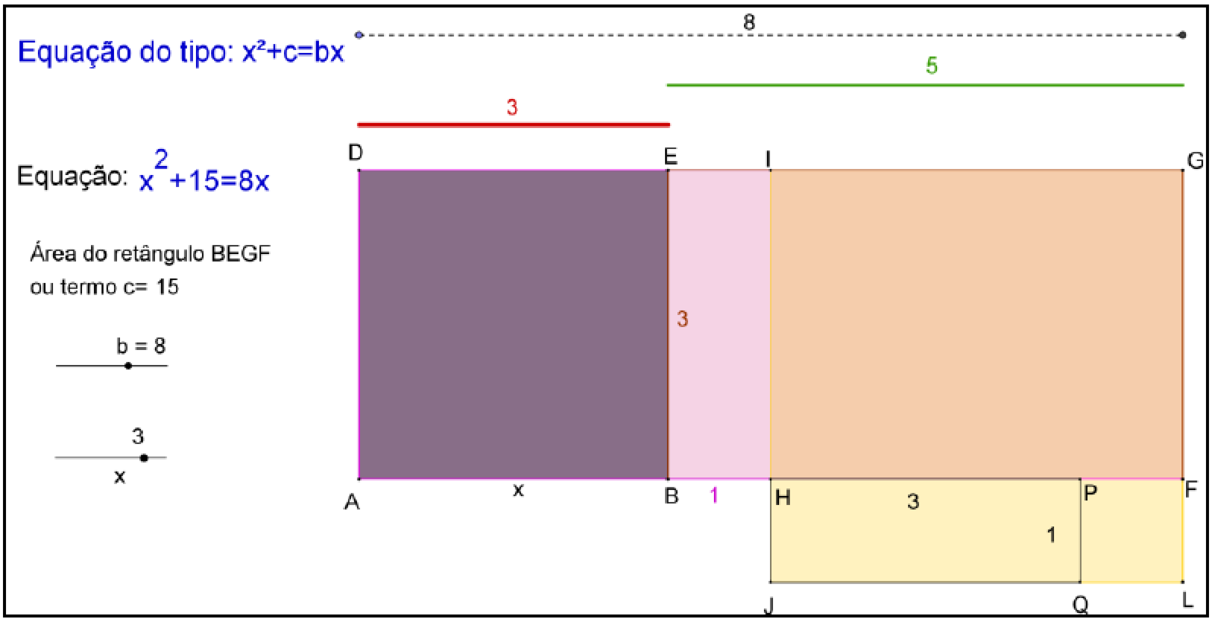

Figura 4: Solução geométrica para equações do tipo $x^2+c=bx$

5 Conclusões

Devido a uma interface simples e aos recursos dinâmicos, o GeoGebra permitiu a construção e a manipulação de soluções geométricas de Al-Khowarizmi utilizadas na resolução de equações do segundo grau de forma geral. Isto foi possível por meio da ferramenta **Seletor** que permitiu uma variação de parâmetros da equação envolvida na construção geométrica. Percebemos que este trabalho podem ser utilizados como recurso metodológico para o ensino de equações quadráticas, propiciando ao discente a percepção de que a Matemática é uma ciência que vem sendo historicamente construída.

Referências

[1] REFATTI, L. R.; BISOGNIN, E. *Aspectos Históricos e Geométricos da Equação Quadrática*. Disc. Scientia. Série: Ciências Naturais e Tecnológicas. Santa Maria, v.6. n.1, p.79-95, 2005.

[2] CARVALHO, F.; MIORIM, M. A.; BARONE, J. ; MUNSIGATTI, J. M.; BEGINATO, R. G. *Por que Bhaskara?* História & Educação Matemática, Rio Claro, v. 2, n. 1, p. 119-166, 2001.