

# PROPOSTA E VALIDAÇÃO DE TESTES BOOTSTRAP PARA DETECÇÃO DE ANISOTROPIA EM FENÔMENOS ESPACIAIS CONTÍNUOS

Diogo Francisco Rossoni<sup>1</sup>, Renato Ribeiro de Lima<sup>2</sup>, Marcelo Silva de Oliveira<sup>2</sup>

**Resumo:** *A anisotropia é uma característica em que dados espacialmente dependentes apresentam comportamentos diferenciados em determinadas direções. Quando o comportamento da variável aleatória é similar em todas as direções, dizemos que o fenômeno é isotrópico. Caso não seja detectada a anisotropia e, conseqüentemente, sua correção não seja feita, o fenômeno pode ser interpretado de maneira equivocada. A falta de um teste estatístico consolidado para detecção de anisotropia corrobora com a dificuldade dos pesquisadores em corrigir tal característica do fenômeno. Este trabalho propõe dois testes para detectar a anisotropia espacial: um teste baseado em área e outro teste baseado em distâncias euclidianas. Para verificar a eficácia dos testes, foram analisadas as taxas de erro tipo I e o poder do teste. Em todas as configurações simuladas, o teste baseado em área foi melhor que o teste baseado em distâncias euclidianas.*

**Palavras-chave:** *Geoestatística. Anisotropia. Isotropia.*

**Abstract:** *This work proposes two tests to detect the spatial anisotropy. To verify the efficacy of the tests, Type I error rates and power of the test were analyzed. In all simulated configurations, the test based in area was better than the test based on Euclidean distances.*

**Keywords:** *Geostatistics. Anisotropy. Isotropy*

## 1 Introdução

A anisotropia é uma característica na qual dados espacialmente dependentes apresentam comportamentos diferenciados em determinadas direções. Quando o

---

<sup>1</sup> DES - UEM. e-mail: dfrossoni@uem.br

<sup>2</sup> DEX – UFLA.

comportamento da variável aleatória é similar em todas as direções, dizemos que o fenômeno é isotrópico.

De uma forma geral, a anisotropia é tratada em segundo plano nas análises geoestatísticas. Sistemas de busca de periódicos, como o Google Acadêmico e o Portal Periódico Capes, mostram uma relação de menos de 10% dos trabalhos que tratam de anisotropia, isso no contexto de Geoestatística.

Logo, supõe-se que os autores pressupõe que a variável é isotrópica e procedem com a modelagem do fenômeno – e posterior predição – sem efetuarem a devida correção da anisotropia.

Rossoni e Lima (2012) apresentam resultados que comprovam a influência da anisotropia na predição de um fenômeno contínuo. Em todas as configurações anisotrópicas simuladas no trabalho, os modelos que utilizaram a correção da anisotropia foram mais precisos do que os modelos que não corrigiram a anisotropia. Logo, caso a correção não seja feita, o fenômeno pode ser interpretado de maneira equivocada.

A falta de um teste estatístico consolidado para detecção de anisotropia corrobora a dificuldade dos pesquisadores em corrigir tal característica do fenômeno. A literatura lista alguns testes para detecção de anisotropia ou isotropia: Guan (2004) propõe um teste não paramétrico para testar isotropia espacial, através de sub-amostras; Chorti e Hristopulos (2008) utilizam uma abordagem de amostras bases, estimadas através de derivadas espaciais, relacionadas diretamente com os parâmetros da anisotropia; Cheng (2004) propõe um modelo para quantificar a escala de anisotropia; Maity e Sherman (2012) apresentam um teste para isotropia utilizando a função de covariância. Todavia, estes teste necessitam de uma gama de pré-requisitos para serem aplicados: dados regularmente espaçados, normalidade dos dados, dados estacionários de segunda ordem.

Logo, o objetivo deste estudo é propor dois testes para a detecção da anisotropia em fenômenos espaciais contínuos. Além disso, pretende-se verificar a eficácia destes testes por meio da avaliação da taxa de erro tipo I e do poder dos testes.

## **2 Material e Métodos**

Neste trabalho serão apresentados dois testes para verificar a existência de anisotropia espacial em fenômenos contínuos.

O primeiro teste é baseado na área formada entre o semivariograma omnidirecional ajustado e os demais semivariogramas direcionais ajustados. O segundo teste é baseado na distância euclidiana entre o semivariograma omnidirecional ajustado e os demais semivariogramas direcionais empíricos.

Duas etapas foram usadas para validar os testes. A primeira etapa consistiu em simulações sob  $H_0$  com intuito de verificar a taxa de erro tipo I dos testes. Logo, para cada configuração da Tabela 1 foram geradas 2000 amostras de um campo aleatório gaussiano de tamanho  $100 \text{ u.m.} \times 100 \text{ u.m.}$  em um gride regularmente espaçado. Foram analisados 8 ângulos de incidência de anisotropia ( $0^\circ$ ;  $22,5^\circ$ ;  $45^\circ$ ;  $67,5^\circ$ ;  $90^\circ$ ;  $112,5^\circ$ ;  $135^\circ$  e  $157,5^\circ$ ).

A segunda etapa consistiu em avaliar o poder dos testes. O erro tipo II é cometido em um teste quando a hipótese nula não é rejeitada, sendo esta falsa. Assim, procedeu-se com simulações sob  $H_1$ . O único tipo de anisotropia que permite uma quantificação é a anisotropia geométrica, em que essa quantificação é denotada pela razão de anisotropia ( $a_{\max} / a_{\min}$ ). Logo, para cada configuração da Tabela 1 foram geradas 2000 amostras de um campo aleatório gaussiano de tamanho  $100 \text{ u.m.} \times 100 \text{ u.m.}$  em um gride regularmente espaçado, assumindo seis razões de anisotropia: 1,5; 2; 2,5; 3; 6 e 10. Foram analisados 8 ângulos de incidência de anisotropia ( $0^\circ$ ;  $22,5^\circ$ ;  $45^\circ$ ;  $67,5^\circ$ ;  $90^\circ$ ;  $112,5^\circ$ ;  $135^\circ$  e  $157,5^\circ$ ).

Todas as simulações foram feitas no software R (R DEVELOPMENT CORE TEAM, 2012) com a utilização dos pacotes geoR (RIBEIRO JR; DIGGLE, 2001) e RandonField (SCHLATHER, 2012).

Tabela 1 Configurações da simulação

<b>Nomenclatura</b>	<b>Modelo</b>	<b>Efeito Pepita</b>	<b>Patamar</b>	<b>Alcance</b>	<b>Grau de dependência espacial</b>
Sph(10/100/30)	Esférico	10	100	30	Forte
Sph(10/100/60)	Esférico	10	100	60	Forte
Sph(50/100/30)	Esférico	50	100	30	Moderada
Sph(50/100/60)	Esférico	50	100	60	Moderada
Sph(90/100/30)	Esférico	90	100	30	Fraca
Sph(90/100/60)	Esférico	90	100	60	Fraca
Gaus(10/100/30)	Gaussiano	10	100	30	Forte
Gaus(10/100/60)	Gaussiano	10	100	60	Forte
Gaus(50/100/30)	Gaussiano	50	100	30	Moderada
Gaus(50/100/60)	Gaussiano	50	100	60	Moderada
Gaus(90/100/30)	Gaussiano	90	100	30	Fraca
Gaus(90/100/60)	Gaussiano	90	100	60	Fraca

### 3 Resultados e discussões

Os testes propostos serão apresentados na seção “Resultados metodológicos”. A validação dos testes será apresentada na seção “Validação”.

## Resultados metodológicos

Um fenômeno é isotrópico se seu comportamento é idêntico em todas as direções. Isso, na Geoestatística, acarreta em semivariogramas com comportamento idêntico em todas as direções.

$$\gamma(h_{0^\circ}) = \gamma(h_{1^\circ}) = \dots = \gamma(h_{\alpha^\circ}); \quad \text{para } \alpha = 1^\circ, 2^\circ, \dots, 360^\circ$$

Todavia, cada um desses semivariogramas apresenta um erro aleatório inerente a amostra da qual foi tomada, pois são estimativas do processo estocástico. Logo, temos um comportamento semelhante em cada uma das direções, ou seja,

$$\hat{\gamma}(h_{0^\circ}) \cong \hat{\gamma}(h_{1^\circ}) \cong \dots \cong \hat{\gamma}(h_{\alpha^\circ}); \quad \text{para } \alpha = 1^\circ, 2^\circ, \dots, 360^\circ.$$

Na Figura 1 apresentam-se semivariogramas direcionais para três direções distintas ( $0^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $70^\circ$ ). O comportamento é similar, mas fica evidente que existem pequenas diferenças entre os semivariogramas. Como podemos quantificar essas pequenas diferenças?

Uma ideia seria comparar cada um dos semivariogramas direcionais com o semivariograma omnidirecional, pois o mesmo representa o comportamento médio das semivariância ( Figura 2 )

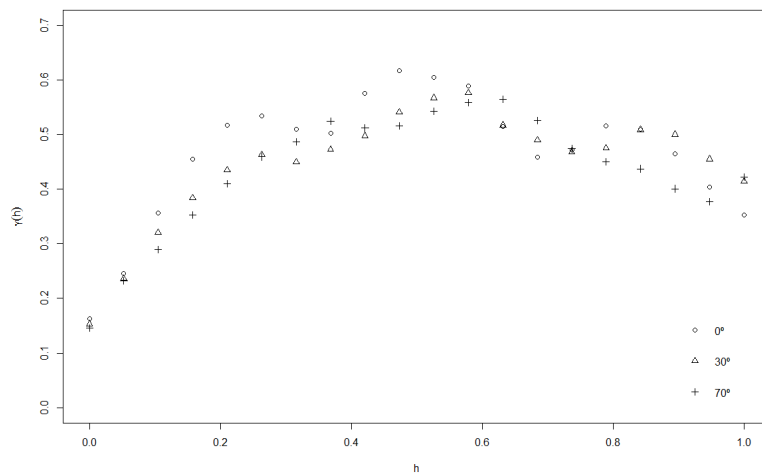


Figura 1 Semivariogramas empíricos estimados nas direções de  $0^\circ$ ,  $30^\circ$  e  $70^\circ$

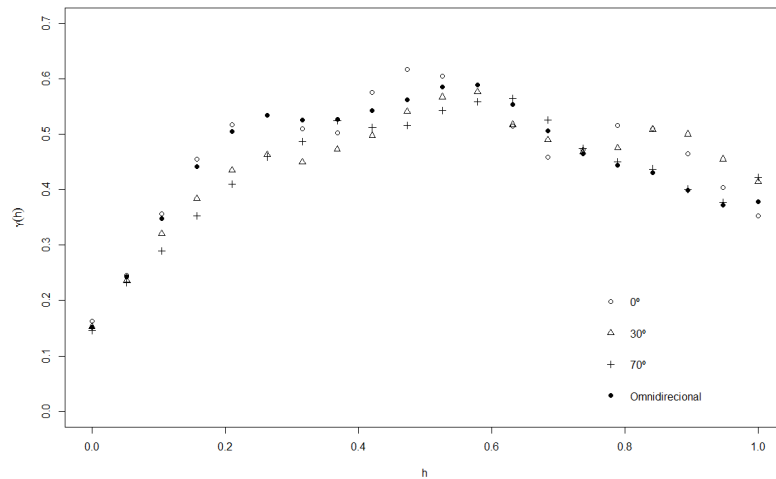


Figura 2 Semivariogramas empíricos estimados nas direções de  $0^\circ$ ,  $30^\circ$  e  $70^\circ$  comparados com o semivariograma omnidirecional

Mas devemos comparar toda a extensão do semivariograma? Pela definição dos parâmetros do semivariograma, considera-se que existe independência espacial após o semivariograma atingir o alcance  $a$ . Logo parece interessante proceder uma comparação apenas até o alcance do semivariograma omnidirecional. Para isso é necessário ajustar um semivariograma teórico ao semivariograma empírico.

Para quantificar o erro existente entre a estimativa média e a estimativa omnidirecional podemos trabalhar com a área formada entre as duas curvas teóricas: o modelo teórico do semivariograma omnidirecional e o modelo teórico do semivariograma direcional. Um exemplo é apresentado na Figura 3.

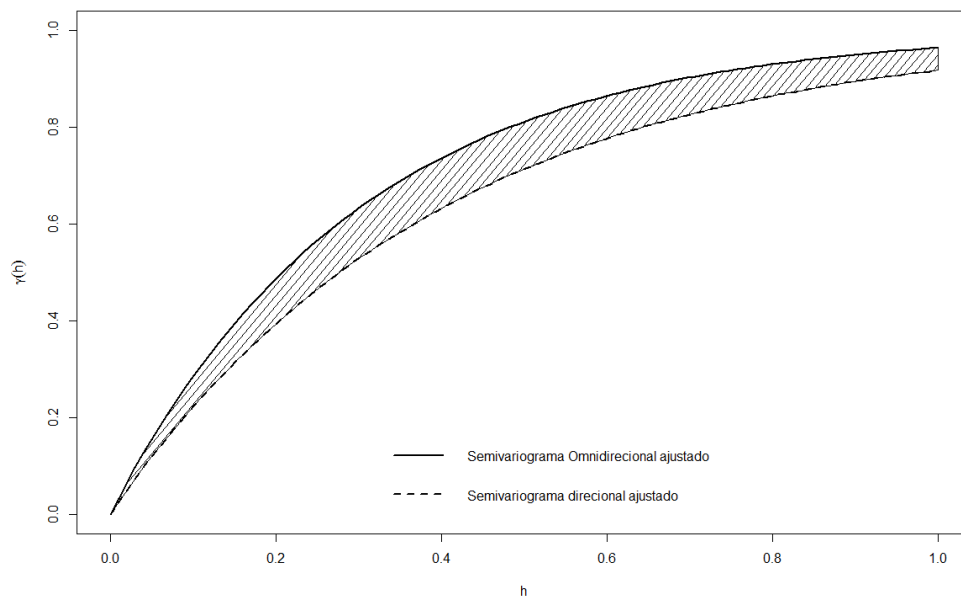


Figura 3 Área formada entre o semivariograma omnidirecional ajustado e um semivariograma direcional ajustado

Dessa maneira, poderíamos quantificar o erro de estimação com relação ao semivariograma omnidirecional para cada uma das direções de interesse, tendo assim uma distribuição empírica das áreas entre as curvas. Como a área entre as curvas possui valor mínimo de zero (curvas sobrepostas), os valores dessa distribuição estariam no intervalo  $[0, \infty_+)$ .

Como poderíamos definir se a variabilidade das áreas formadas entre as curvas é devida apenas ao acaso ou é influenciada por outro fator?

O processo estocástico  $Z(x)$  possui parâmetros desconhecidos. Todavia, podemos estimar os parâmetros do processo estocástico através do ajuste de semivariogramas a uma realização desse processo, isto é, através de uma amostra, podemos inferir sobre o processo estocástico  $Z(x)$ .

Tendo obtido essas informações (efeito pepita, patamar, alcance, modelo de dispersão espacial), podemos, através da técnica de bootstrap paramétrico, replicar  $N$  realizações do processo estocástico  $Z(x)$  e obter novas estimativas. Assim, temos um semivariograma omnidirecional da amostra inicial mais  $N$  semivariogramas omnidirecionais das novas realizações do processo estocástico. Obtendo as áreas entre cada um dos novos semivariogramas (seguindo o mesmo raciocínio dos semivariogramas direcionais) com o semivariograma omnidirecional da amostra (semivariograma original), teremos uma distribuição das áreas com característica aleatória.

Como definir se as áreas direcionais calculadas são estatisticamente iguais a distribuição das áreas com característica aleatória?

Para essa verificação devemos construir um teste de hipótese baseado em uma estatística. Em nosso caso particular, a área mínima, teoricamente, já é conhecida e seu valor é zero. Isto é, há sobreposição entre o semivariograma original e algum dos  $N$  semivariogramas aleatórios.

Para nossa hipótese utilizaremos a área máxima dos semivariogramas direcionais como sendo a estatística do teste. Se a área máxima pertencer a distribuição aleatória das áreas, todas as demais áreas direcionais também pertencerão, pois são menores.

Considera-se  $A_{\max}$  como a área máxima entre os semivariogramas direcionais e o semivariograma omnidirecional, logo, o valor-p de um teste bootstrap paramétrico baseado nas áreas pode ser definido por

$$\text{valor} - p = \frac{\sum_{i=1}^n I(A_i \geq A_{\max})}{N}.$$

Sendo que a hipótese testada é:

$H_0$  : As áreas direcionais são estatisticamente iguais as áreas aleatórias

$H_1$  : Pelo menos uma área direcional é estatisticamente diferente das áreas aleatórias

Para facilitar as referências futuras, o teste proposto terá a denominação de *TArea* . Na

Figura 4 está apresentado um esquema do procedimento do teste.

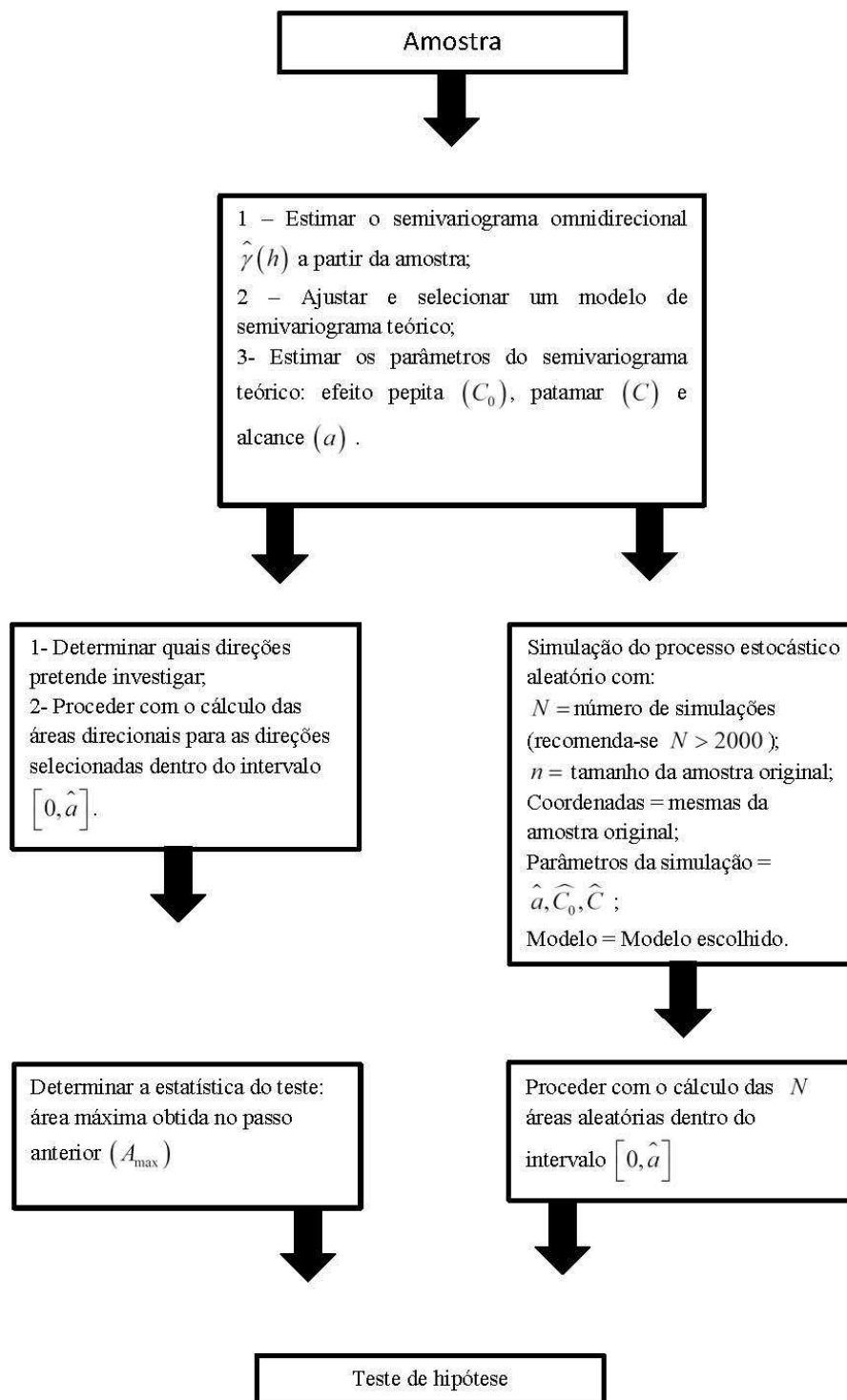


Figura 4 Esquema representativo do procedimento do teste *TArea*

Um problema que pode ocorrer com o  $TArea$  é a falta de ajuste de um semivariograma teórico para cada semivariograma direcional. Dependendo da natureza dos dados, o comportamento, ou até mesmo a existência de um semivariograma para cada direção, pode ser um empecilho para a execução do teste.

Além disso, caso existam poucos pontos amostrais em determinada direção, isso acarretará em poucos pontos para o semivariograma experimental. Dessa forma, um ajuste de um semivariograma teórico pode não ser possível.

Pensando nisso, propomos o  $TDe$ , um outro teste para verificação da hipótese de isotropia. A sua idéia original é similar ao  $TArea$ , todavia, ao invés de utilizarmos a área formada entre o semivariograma omnidirecional e o semivariograma direcional (ambos com ajuste de um modelo teórico), vamos utilizar a distância euclidiana entre cada ponto do semivariograma direcional empírico e o semivariograma omnidirecional ajustado.

Podemos pensar no  $TDe$  como o erro ou falta de ajuste de uma regressão. A distância euclidiana mostrará quão distante ou perto estamos do semivariograma de referência, que no nosso caso é o omnidirecional ajustado.

Considera-se  $DE_{\max}$  como a distância euclidiana máxima entre os semivariogramas direcionais e o semivariograma omnidirecional, logo, o valor-p de um teste bootstrap paramétrico baseado nas distâncias pode ser definido por

$$valor - p = \frac{\sum_{i=1}^n I(DE_i \geq DE_{\max})}{N}$$

em que  $DE_i$  é a distância euclidiana aleatória de cada realização do processo estocástico, calculada entre o semivariograma omnidirecional e os semivariogramas omnidirecionais aleatórios.

Na Figura 5 temos um semivariograma omnidirecional ajustado (linha cheia). Os pontos são as semivariâncias nas distâncias  $h$  para uma direção qualquer. As linhas verticais são as distâncias euclidianas com relação ao semivariograma omnidirecional, nas distâncias  $h$  definidas.



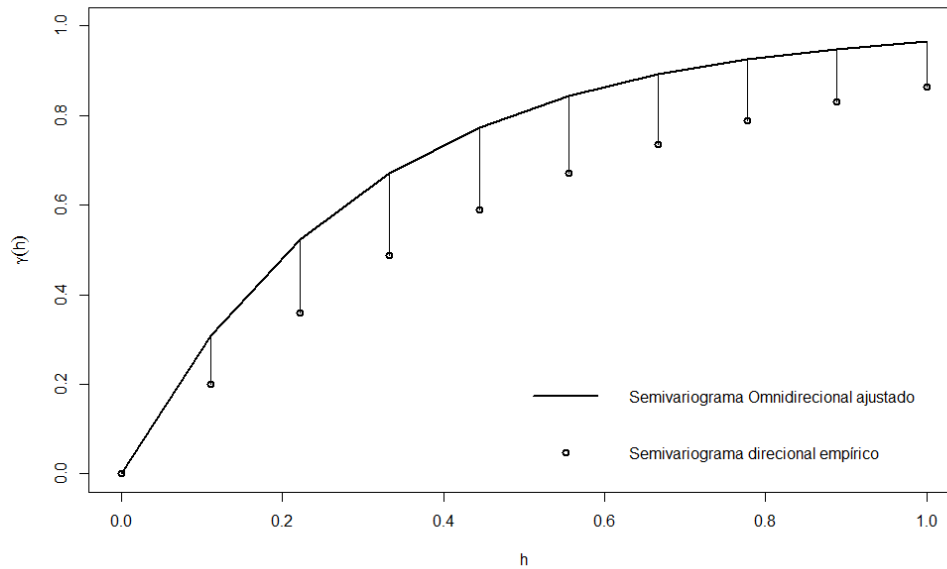


Figura 5 Distância euclidiana entre o semivariograma omnidirecional ajustado e as semivariâncias direcionais

Logo, para o *TDe*, temos a seguinte hipótese

$H_0$  : As DE's direcionais são estatisticamente iguais as DE's aleatórias

$H_1$  : Pelo menos uma DE direcional é estatisticamente diferente das DE's aleatórias

De forma análoga ao *TArea* o que estamos dizendo é: se as DE's direcionais são fruto apenas do acaso, logo possuirão as mesmas características das  $N$  realizações do processo estocástico. Logo, o fenômeno em estudo pode ser considerado isotrópico, do contrário, o fenômeno é anisotrópico.

Para facilitar as referências futuras, o teste proposto terá a denominação de *TDe* . Na Figura 6 está apresentado um esquema do procedimento do teste.

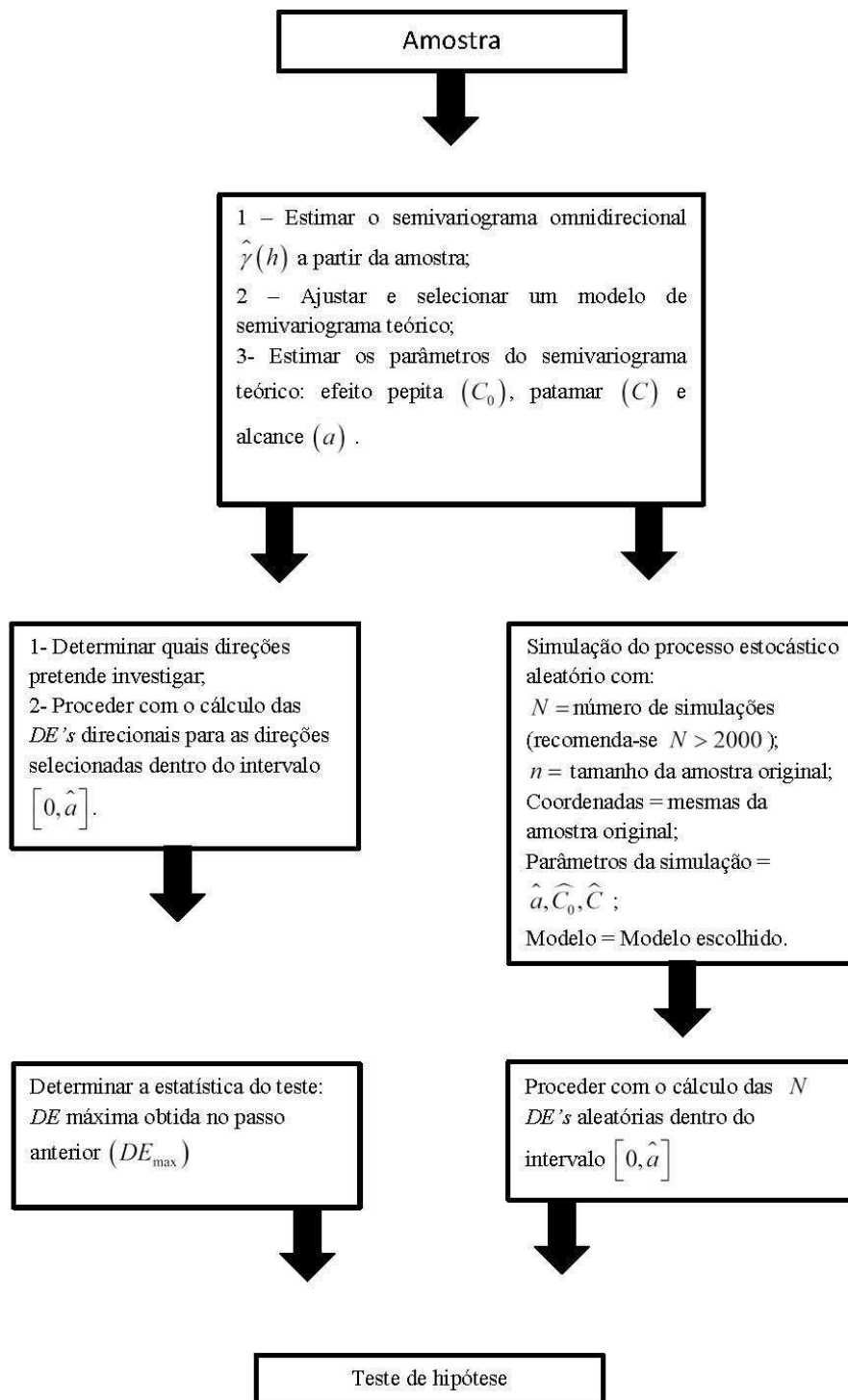


Figura 6 Esquema representativo do procedimento do teste *TDe*

### Validação

Os resultados obtidos para os dois testes propostos estão apresentados na Tabela 2. Ambos os testes obtiveram taxas de erro tipo I próximas dos níveis nominais de significância, isto é, de um modo geral, os dois testes apresentaram um controle adequado do erro tipo I.

Tabela 2 Taxas de erro tipo 1 dos testes de anisotropia *TDe* e *TArea* para os níveis nominais de 10%, 5% e 1% em função das configurações de dependência espacial da Tabela 1

Configuração	$\alpha = 0,10$		$\alpha = 0,05$		$\alpha = 0,01$	
	<i>TDe</i>	<i>TArea</i>	<i>TDe</i>	<i>TArea</i>	<i>TDe</i>	<i>TArea</i>
Sph(10/100/30)	0,084	0,094	0,047	0,045	0,008	0,010
Sph(10/100/60)	0,087	0,085	0,051	0,050	0,008	0,009
Sph(50/100/30)	0,082	0,091	0,048	0,048	0,010	0,007
Sph(50/100/60)	0,091	0,098	0,051	0,049	0,009	0,010
Sph(90/100/30)	0,084	0,104	0,049	0,049	0,010	0,007
Sph(90/100/60)	0,102	0,087	0,050	0,047	0,007	0,007
Gaus(10/100/30)	0,098	0,096	0,049	0,050	0,010	0,008
Gaus(10/100/60)	0,103	0,087	0,051	0,048	0,009	0,007
Gaus(50/100/30)	0,084	0,102	0,049	0,047	0,008	0,008
Gaus(50/100/60)	0,100	0,086	0,050	0,045	0,008	0,009
Gaus(90/100/30)	0,087	0,084	0,049	0,051	0,008	0,008
Gaus(90/100/60)	0,091	0,099	0,046	0,049	0,009	0,007

Os resultados referentes ao poder dos testes considerando-se as simulações baseadas no modelo esférico, estão apresentados nas Figura 7 a Figura 12.

Verifica-se na Figura 7 que os teste *TDe* e o *TArea* apresentaram basicamente o mesmo poder de teste. O crescimento do poder de ambos foi bom, todavia até a razão 10 apenas o *TArea* atingiu o valor assintótico de 1. Nota-se um crescimento rápido e acentuado para configuração Sph(10/100/30). Ou seja, os testes possuem grande poder para situações de forte dependência espacial.

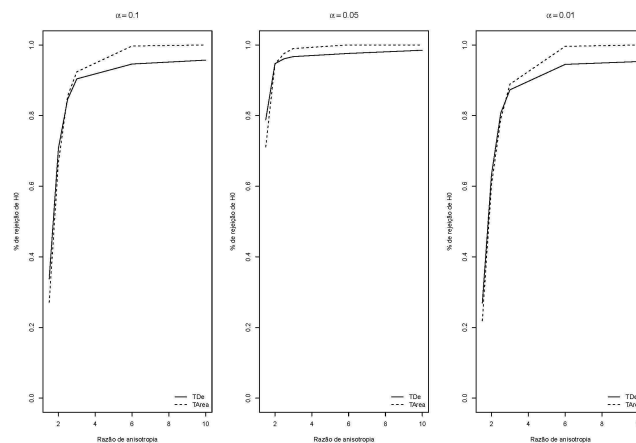


Figura 7 Poder dos testes para os níveis nominais de significância de 10%, 5% e 1% relativo a configuração Sph(10/100/30)

A Figura 8 apresenta um resultado deveras interessante. Enquanto o poder do teste para o *TArea* logo atingiu o valor assintótico de 1, o *TDe* não se aproximou do valor assintótico de 1, ficando próximo do valor 0,8. A única diferença de configuração dos

resultados apresentados na Figura 7 e Figura 8, com relação a simulação, foi o parâmetro alcance. O *TDe* foi severamente afetado pelo incremento do alcance. Embora, pela definição de grau de dependência, as duas simulações apresentem o mesmo grau de dependência espacial (forte), o resultado do poder diferiu consideravelmente. Podemos conjecturar que as distâncias euclidianas sofreram forte impacto com o aumento do alcance, enquanto que a área da figura permaneceu menos inconstante.

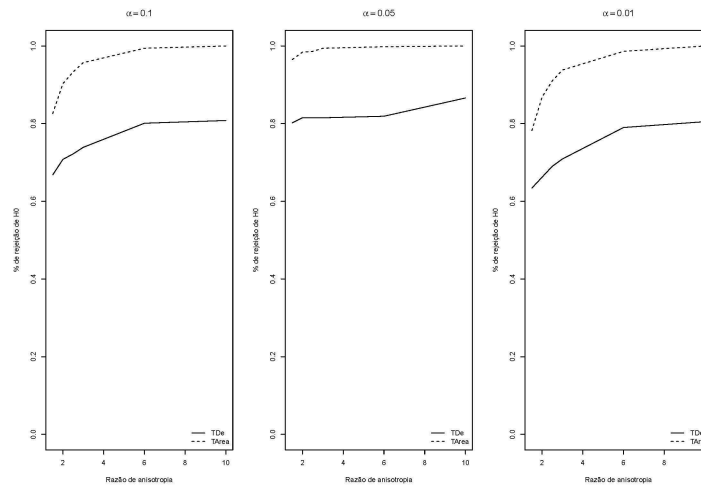


Figura 8 Poder dos testes para os níveis nominais de significância de 10%, 5% e 1% relativo a configuração Sph(10/100/60)

Para as configurações com moderada dependência espacial, o comportamento foi similar ao apresentado na Figura 7. Quando o alcance foi de 30, ambos os testes foram similares. O crescimento do poder foi um pouco mais lento do que nas configurações de forte dependência espacial. Mesmo assim, o *TArea* novamente atingiu o valor assintótico de 1 na Figura 9. O *TDe* teve um desempenho um pouco inferior.

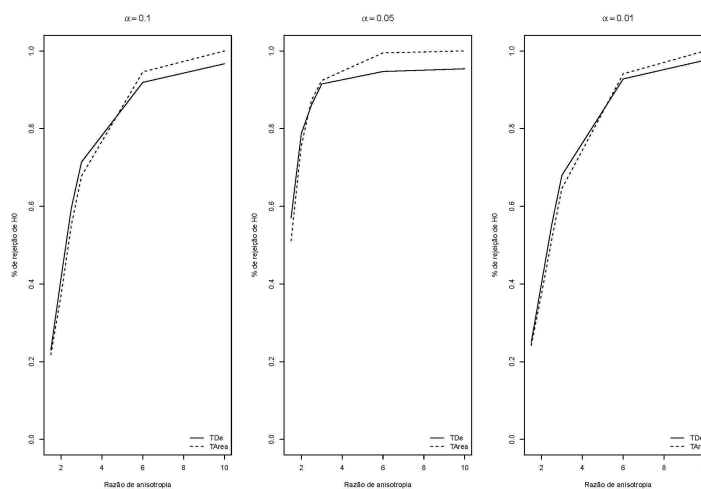


Figura 9 Poder dos testes para os níveis nominais de significância de 10%, 5% e 1% relativo a configuração Sph(50/100/30)

Com o incremento do alcance para 60, novamente, o *TDe* apresentou menor poder se comparado com o *TArea* (Figura 10)

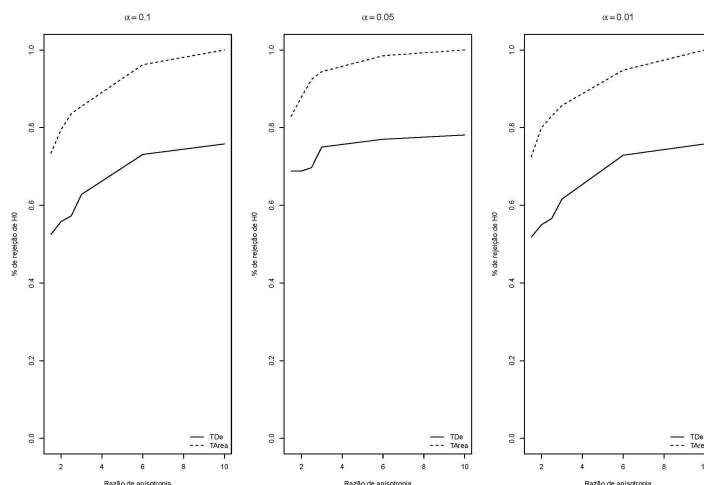


Figura 10 Poder dos testes para os níveis nominais de significância de 10%, 5% e 1% relativo a configuração Sph(50/100/60)

Considerando as configurações com fraca dependência espacial, quando o alcance foi de 30, ambos os testes foram similares (Figura 11). O crescimento do poder foi um pouco mais lento do que nas configurações com moderada e forte dependência espacial. Conclui-se que o grau de dependência espacial influi diretamente no poder do teste.

Mesmo assim, o *TArea* novamente atingiu o valor assintótico de 1 (Figura 11). O *TDe* teve um desempenho um pouco inferior.

Todavia, quando ocorre o incremento da distância, novamente o *TDe* apresenta menor poder se comparado com o *TArea* (Figura 12).

Portanto, para simulações baseadas no modelo esférico, o *TArea* apresentou em todas as configurações maior poder do teste se comparado ao *TDe*. Essa diferença ficou acentuada quando modificou-se o valor do alcance.

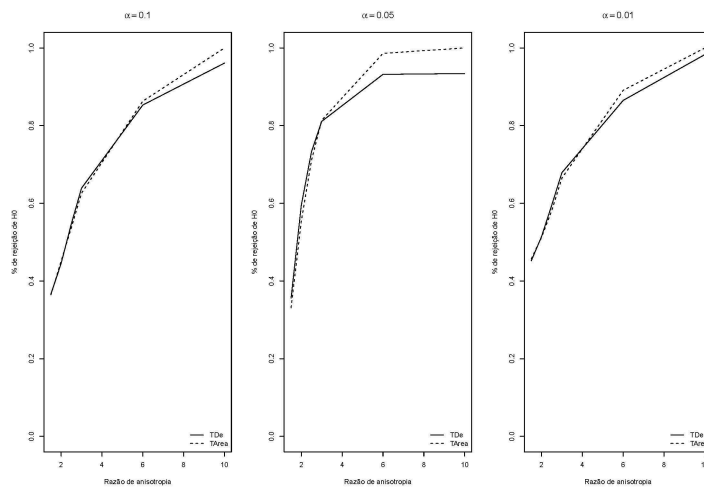


Figura 11 Poder dos testes para os níveis nominais de significância de 10%, 5% e 1% relativo a configuração Sph(90/100/30)

Os resultados referentes ao poder dos testes considerando-se as simulações baseadas no modelo gaussiano, estão apresentados nas Figura 13 a Figura 18.

Na Figura 13 observa-se que os testes *TDe* e o *TArea* apresentaram o mesmo comportamento em relação ao poder. Ambos atingiram o valor assintótico de 1 com uma razão de anisotropia próxima de 3. Portanto, verifica-se um alto poder dos mesmos.

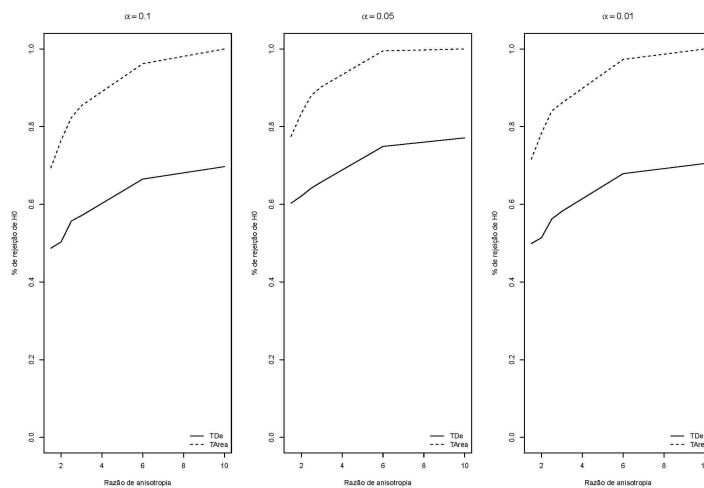


Figura 12 Poder dos testes para os níveis nominais de significância de 10%, 5% e 1% relativo a configuração Sph(90/100/60)

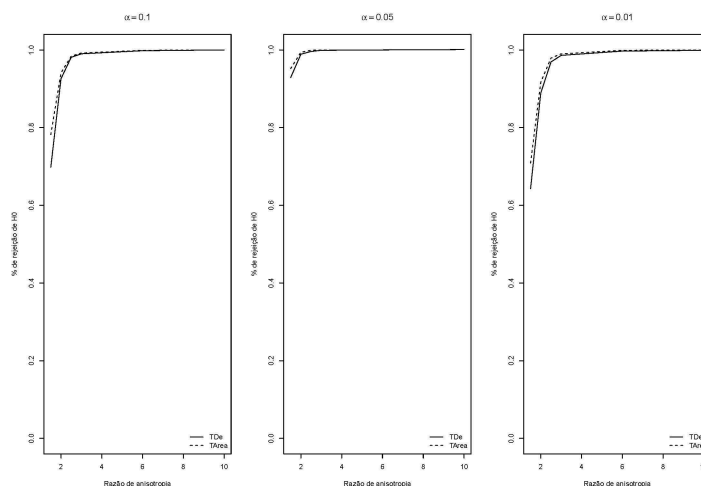


Figura 13 Poder dos testes para os níveis nominais de significância de 10%, 5% e 1% relativo a configuração Gaus(10/100/30)

Na Figura 14 observa-se o poder do teste para a configuração Gaus(10/100/60), que possui forte dependência espacial. Diferentemente do que ocorreu com a configuração Sph(10/100/60) (Figura 8), aqui, o teste *TDe* não foi tão afetado pelo incremento do alcance. O *TArea* ainda possui maior poder, mas o *TDe* ficou relativamente próximo. Podemos atribuir esse desempenho similar a um parâmetro inerente do modelo gaussiano. Enquanto no modelo esférico, o alcance paramétrico e o alcance prático são os mesmos, no modelo gaussiano o alcance paramétrico é  $1/\sqrt{3}$  do alcance prático. Logo, o alcance teve menor influência no *TDe*.

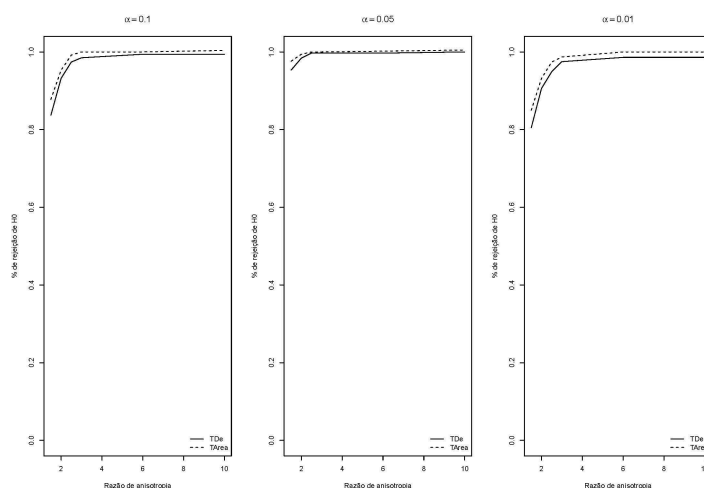


Figura 14 Poder dos testes para os níveis nominais de significância de 10%, 5% e 1% relativo a configuração Gaus(10/100/60)

A Figura 15 e Figura 16 apresentam o poder dos testes para o modelo gaussiano com moderada dependência espacial. Novamente o *TArea* possui melhor desempenho do que o *TDe*. Nesta configuração fica mais evidente a influencia do parâmetro alcance no poder do *TDe* (Figura 16). O poder dos testes também demora mais para aumentar se comparado com a configuração anterior que possuía forte dependência espacial.

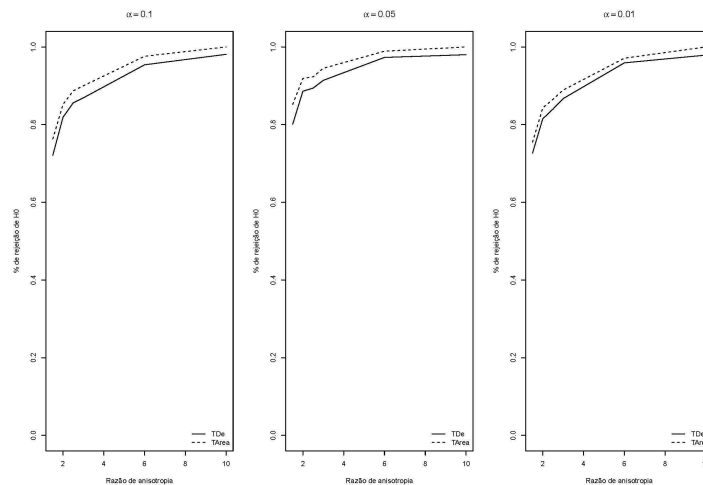


Figura 15 Poder dos testes para os níveis nominais de significância de 10%, 5% e 1% relativo a configuração Gaus(50/100/30)

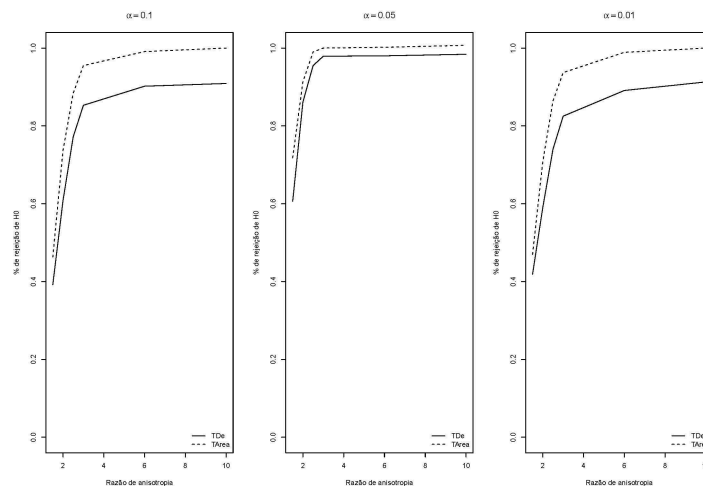


Figura 16 Poder dos testes para os níveis nominais de significância de 10%, 5% e 1% relativo a configuração Gaus(50/100/60)

Finalmente, para a configuração de fraca dependência espacial, temos mais uma vez que o *TArea* apresenta maior poder do que o *TDe*, tanto para o alcance de 30, quanto para o alcance de 60 (Figura 17 e Figura 18). Novamente, o *TDe* apresenta um resultado inferior quando influenciado pela incremento do alcance. Embora seja uma configuração de fraca



dependência espacial, o aumento do poder do teste ficou similar ao que ocorreu com a moderada dependência espacial.

Portanto, para simulações baseadas no modelo gaussiano, o *TArea*, novamente, apresentou em todas as configurações maior poder do teste se comparado ao *TDe*. Todavia, essa diferença foi menos acentuada do que quando trabalhou-se com o modelo esférico.

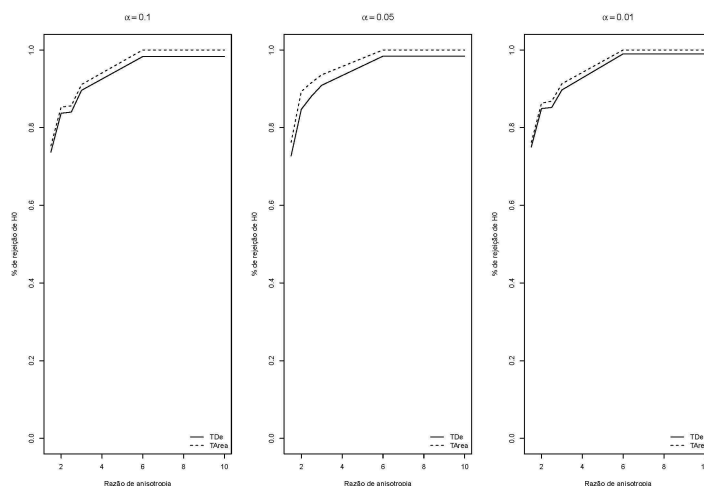


Figura 17 Poder dos testes para os níveis nominais de significância de 10%, 5% e 1% relativo a configuração Gaus(90/100/30)

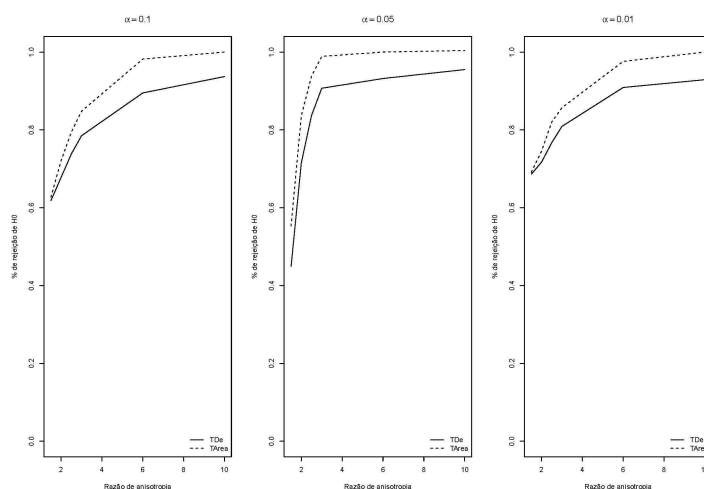


Figura 18 Poder dos testes para os níveis nominais de significância de 10%, 5% e 1% relativo a configuração Gaus(90/100/60)

#### 4 Conclusões

Foram apresentados dois testes para detectar a anisotropia: *TArea* e *TDe*. Ambos os testes propostos, *TArea* e *TDe*, apresentaram um bom controle do erro tipo I, visto que os valores obtidos pelos testes foram próximos dos valores nominais.

Quanto ao poder do teste o *TArea* apresentou maior poder se comparado com o *TDe*. Além disso, não sofreu influencia do incremento do alcance, o que por outro lado, contribuiu para o decréscimo do poder do teste *TDe*.

Os dois testes obtiveram um crescimento de poder menor pra configurações com moderada e fraca dependência espacial.

## Referências

- [1] CHENG, Q. A new model for quantifying anisotropic scale invariance and for decomposition of mixing patterns. **Mathematical Geology**, v. 36, n. 3, p. 345-360, april, 2004.
- [2] CHORTI, A.; HRISTOPULOS. D. T. Nonparametric identification of anisotropic (elliptic) correlations in spatially distributed data sets. **IEEE Transactions On Signal Processing**, vol. 56, no. 10, october 2008.
- [3] GUAN Y. at al; A nonparametric test for spatial isotropy using subsampling **Journal of the American Statistical Association**, Vol. 99, No. 467 (Sep., 2004), pp. 810-821
- [4] MAITY. A.; SHERMAN. M. Testing for spatial isotropy under general designs. **Journal of Statistical Planning and Inference** 142 (2012) 1081–1091.
- [5] R DEVELOPMENT CORE TEAM. **R: A language and environment for statistical computing**. Versão 2.15.1. Vienna: R Foundation for Statistical Computing, 2012. Disponível em: <<http://www.r-project.org>>. Acesso em: 22 jun. 2012.
- [6] RIBEIRO JR , P. J.; DIGGLE, P. J. geoR: a package for geostatistical analysis. **R-NEWS**, vol. 1, n. 2, p. 15-18, 2001.
- [7] ROSSONI D. F.; LIMA R. R. A importância da correção da anisotropia em análises geoestatísticas. **Revista da Estatística da Universidade Federal de Ouro Preto**, v. 2, p. 217-221, 2012.
- [8] SCHLATHER, M. **RandomFields: Simulation and Analysis of Random Fields**. R package version 2.0.57. <http://CRAN.R-project.org/package=RandomFields>. Acesso em: 22 jun. 2012.