

# VIOLAÇÃO DA DESIGUALDADE PROBABILÍSTICA DE BELL NA MECÂNICA QUÂNTICA

Felipe Andrade Velozo<sup>1</sup>, Diogo Francisco Rossoni<sup>2</sup>,  
José Alberto Casto Nogales Vera<sup>3</sup>, Lucas Monteiro Chaves<sup>4</sup>, Devanil Jaques de Souza<sup>5</sup>

**Resumo:** Em 1982, Alain Aspect, e colaboradores, realizaram um experimento, para observar a violação da desigualdade de Clauser-Horne-Shimony-Holt na prática. Após realizar o experimento, usaram os dados na desigualdade e concluíram que a desigualdade, obtida por meio de argumentos probabilísticos, era violada, confirmando as conclusões obtidas por John S. Bell de que não era possível uma teoria de variáveis ocultas nas condições propostas por Einstein, Podolsky e Rosen. O objetivo deste trabalho é observar a validade das fórmulas nas condições existentes da teoria probabilística, para levar a uma conclusão condizente com os axiomas da probabilidade.

**Palavras-chave:** Violação da desigualdade de CHSH; Axiomas de Kolmogorov.

**Abstract:** The Quantum Mechanics possesses a statistical interpretation, therefore or it is that his nature or to Statistics it was due to ignorance with relationship the present variables. This work seeks to show some mistakes happened in John Bell justification for incompatibility of the Statistics with correlated quantum phenomena.

**Keywords:** Violation of the inequality of Bell; Axioms of Kolmogorov.

## 1 Introdução

O experimento [3,4] consiste em uma fonte de pares de elétrons com spin correlacionados (um elétron com spin positivo e outro com spin negativo), que são emitidos pela fonte e se distanciam um do outro e passam cada um por um campo magnético com sentido representado pelo ângulo de orientação  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , respectivamente. O ângulo  $\theta_k$  fornece o vetor  $\vec{r}_k = \cos \theta_k \cdot \vec{i} + \sin \theta_k \cdot \vec{j}$ , que indica a orientação do campo. Ao passar pelo campo magnético, cada elétron irá desviar, ou no sentido do campo ( $U_k(w) = +1$ ), ou no sentido

---

<sup>1</sup> Departamento de Ciências Exatas – UFLA. E-mail: felipe.andrade.velozo@mail.ru

<sup>2</sup> Departamento de Estatística – UEM

<sup>3</sup> Departamento de Ciências Exatas – UFLA

<sup>4</sup> Departamento de Ciências Exatas – UFLA

<sup>5</sup> Departamento de Ciências Exatas – UFLA

contrário ( $U_k(\omega) = -1$ ), com  $k = 1$  para o 1º elétron e  $k = 2$  para o 2º elétron. A probabilidade [4] de cada elétron desviar em um sentido e o outro no sentido contrário será

$$\mathcal{P}_{1,2}(U_1(\omega), U_2(\omega); \theta_{1,2}) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \cos^2 \frac{\theta_{1,2}}{2} \Leftarrow (U_1(\omega), U_2(\omega)) \in \{(-1, +1), (+1, -1)\} \\ \frac{1}{2} \cdot \sin^2 \frac{\theta_{1,2}}{2} \Leftarrow (U_1(\omega), U_2(\omega)) \in \{(-1, -1), (+1, +1)\} \end{cases}$$

em que  $\theta_{1,2} = \theta_2 - \theta_1$  (diferença dos ângulos das orientações dos campos) e as variáveis aleatórias  $U_1$  e  $U_2$  são os desvios de cada elétron, respectivamente.

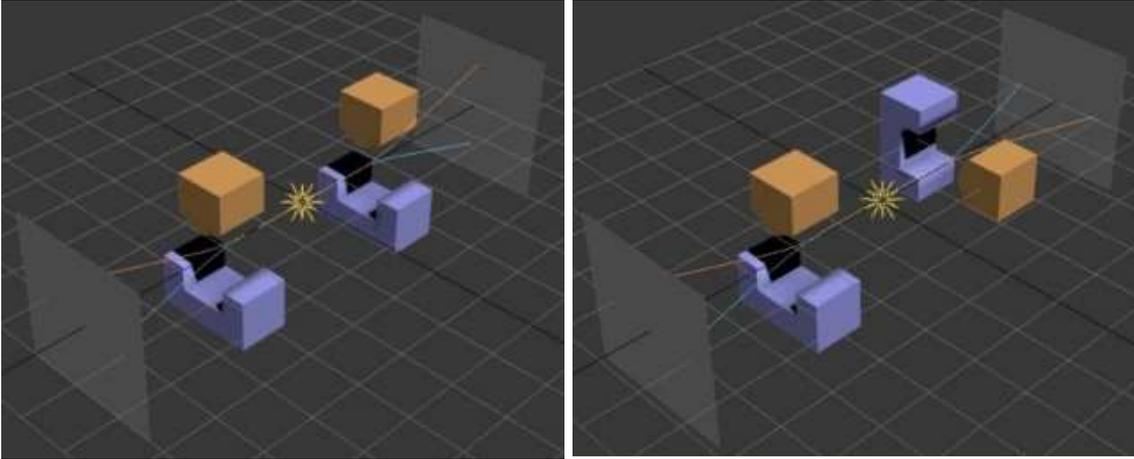


Figura 1 Da esquerda para direita: Na 1ª figura tem-se uma fonte de elétrons (amarelo) no centro com dois aparatos (vermelho e azul) que geram campo magnético em que os elétrons irão se desviar em uma das trajetória (linhas) e colidir com um detector (plano cinza); Na 2ª figura tem-se dois aparatos de Stern-Gerlach: um orientado na vertical (esquerda) e o outro na horizontal (direita).

## 2 Material e métodos

Em busca de determinar  $\omega$  associado ao experimento de medir o desvio de elétrons que tenham sido emitidos com a propriedade spin contrário um do outro, admitir-se-á uma terceira orientação  $\theta_3$  do campo e a medida  $U_3(\omega) \in \{-1; +1\}$ . Portanto o experimento será feito o mesmo número de vezes para os campos 1 e 2 com os seguintes sentidos: a) Sentido  $\theta_1$  em um campo e  $\theta_2$  no outro; b) Sentido  $\theta_1$  em um campo e  $\theta_3$  no outro; c) Sentido  $\theta_2$  em um campo e  $\theta_3$  no outro

A demonstração da desigualdade [5] se baseará apenas em argumentos presentes na Estatística, depois serão feitas comparações entre a previsão feita pela Estatística e o resultado obtido pela Mecânica Quântica. Por simplicidade, serão omitidos os parâmetros  $\theta_j$  e  $\omega$  na apresentação das fórmulas.

Calculando o valor esperado de  $U_1 \cdot U_3 - U_2 \cdot U_3$  e lembrando que  $U_1(\omega) \in \{-1; 1\} \Rightarrow U_1(\omega) \cdot U_1(\omega) \equiv 1$ , tem-se

$$\mathcal{E}((U_1 - U_2) \cdot U_3) \equiv \mathcal{E}((U_1 - U_1 \cdot U_1 \cdot U_2) \cdot U_3) \equiv \mathcal{E}((1 - U_1 \cdot U_2) \cdot U_1 \cdot U_3)$$

Aplicando o módulo (valor absoluto) na equação anterior e sabendo que  $|\sum_x f(x)| \leq \sum_x |f(x)|$ , tem-se

$$|\mathcal{E}((U_1 - U_2) \cdot U_3)| \leq \sum_{w \in \Omega} (|1 - U_1 \cdot U_2| \cdot |U_1| \cdot |U_3| \cdot |\mathcal{P}(U_1, U_2, U_3)|)$$

Uma vez que

$$(\forall j)(U_j \in \{-1; 1\}) \Rightarrow \begin{cases} |U_1| \equiv 1 \\ |U_3| \equiv 1 \\ \underbrace{|1 - U_1 \cdot U_2|}_{\geq 0} \equiv 1 - U_1 \cdot U_2 \end{cases}$$

$$(\forall U_1)(\forall U_2)(\forall U_3)(\mathcal{P}(U_1, U_2, U_3) \geq 0) \Rightarrow (|\mathcal{P}(U_1, U_2, U_3)| \equiv \mathcal{P}(U_1, U_2, U_3))$$

então

$$|\mathcal{E}((U_1 - U_2) \cdot U_3)| \leq \sum_{w \in \Omega} ((1 - U_1 \cdot U_2) \cdot \mathcal{P}(U_1, U_2, U_3)) \equiv 1 - \mathcal{E}(U_1 \cdot U_2)$$

Portanto, tem-se a desigualdade de Bell

$$|\mathcal{E}(U_1 \cdot U_3) - \mathcal{E}(U_2 \cdot U_3)| \leq 1 - \mathcal{E}(U_1 \cdot U_2)$$

A covariância é dada por  $\text{Cov}(U_j, U_k) \equiv \mathcal{E}(U_j \cdot U_k) - \mathcal{E}(U_j) \cdot \mathcal{E}(U_k)$ , porém, observa-se que  $\mathcal{E}(U_j) \equiv 0$ , para qualquer  $j$ . Calculando a partir das funções de probabilidade fornecidas, tem-se

$$\mathcal{E}(U_1 \cdot U_2) \equiv -\cos \theta_{1,2}$$

Ao escolher  $\theta_1 = \frac{3}{4} \cdot \pi$ ,  $\theta_2 = 0$  e  $\theta_3 = \frac{1}{4} \cdot \pi$ , tem-se  $\theta_{1,2} = \frac{3}{4} \cdot \pi$ ,  $\theta_{1,3} = \frac{1}{2} \cdot \pi$ ,  $\theta_{3,2} = \frac{1}{4} \cdot \pi$ , portanto

$$\underbrace{|\mathcal{E}(U_1 \cdot U_3) - \mathcal{E}(U_2 \cdot U_3)|}_{=\frac{1}{\sqrt{2}}} \leq \underbrace{1 - \mathcal{E}(U_1 \cdot U_2)}_{=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}} \therefore 1 \leq \sqrt{2} - 1 \therefore 2 \leq \sqrt{2}$$

O que resulta na desigualdade  $2 \leq \sqrt{2}$ , que é falsa, portanto a desigualdade não é obedecida na Mecânica Quântica.

### 3 Resultados e discussões

Para se chegar nesta desigualdade, foi suposto existir  $\mathcal{P}_{1,2,3}$  entre 0 e 1, para quaisquer valores de  $(U_1, U_2, U_3)$ , porém não para quaisquer valores de  $\theta_{j,k}$  que isto está garantido.

Na Estatística obtém-se a seguinte igualdade

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\left( \mathcal{P}_{1,2,3}(-1, -1, -1) + \mathcal{P}_{1,2,3}(-1, -1, +1) \right)}_{\equiv \mathcal{P}_{1,2}(-1, -1) \equiv (1/2) \cdot \text{sen}^2(\theta_{1,2}/2)} + \underbrace{\left( \mathcal{P}_{1,2,3}(-1, -1, -1) + \mathcal{P}_{1,2,3}(-1, +1, -1) \right)}_{\equiv \mathcal{P}_{1,3}(-1, -1) \equiv (1/2) \cdot \text{sen}^2(\theta_{1,3}/2)} + \\
& + \underbrace{\left( \mathcal{P}_{1,2,3}(-1, -1, -1) + \mathcal{P}_{1,2,3}(+1, -1, -1) \right)}_{\equiv \mathcal{P}_{2,3}(-1, -1) \equiv (1/2) \cdot \text{sen}^2(\theta_{2,3}/2)} - 2 \cdot \mathcal{P}_{1,2,3}(-1, -1, -1) + \\
& + \underbrace{\left( \mathcal{P}_{1,2,3}(+1, +1, +1) + \mathcal{P}_{1,2,3}(+1, +1, -1) \right)}_{\equiv \mathcal{P}_{1,2}(+1, +1) \equiv \mathcal{P}_{1,2}(-1, -1)} + \underbrace{\left( \mathcal{P}_{1,2,3}(+1, +1, +1) + \mathcal{P}_{1,2,3}(+1, -1, +1) \right)}_{\equiv \mathcal{P}_{1,3}(+1, +1) \equiv \mathcal{P}_{1,3}(-1, -1)} + \\
& + \underbrace{\left( \mathcal{P}_{1,2,3}(+1, +1, +1) + \mathcal{P}_{1,2,3}(-1, +1, +1) \right)}_{\equiv \mathcal{P}_{2,3}(+1, +1) \equiv \mathcal{P}_{2,3}(-1, -1)} - 2 \cdot \mathcal{P}_{1,2,3}(+1, +1, +1) \equiv 1
\end{aligned}$$

lembrando que  $\theta_{1,3} \equiv \theta_3 - \theta_1 \equiv \theta_3 - \theta_2 + \theta_2 - \theta_1 \equiv \theta_{1,2} + \theta_{2,3}$ , portanto

$$\mathcal{P}_{1,2,3}(-1, -1, -1) + \mathcal{P}_{1,2,3}(+1, +1, +1) \equiv \frac{1}{2} \cdot \left( \text{sen}^2 \frac{\theta_{1,2}}{2} + \text{sen}^2 \frac{\theta_{1,3}}{2} + \text{sen}^2 \frac{\theta_{2,3}}{2} - 1 \right) \geq 0$$

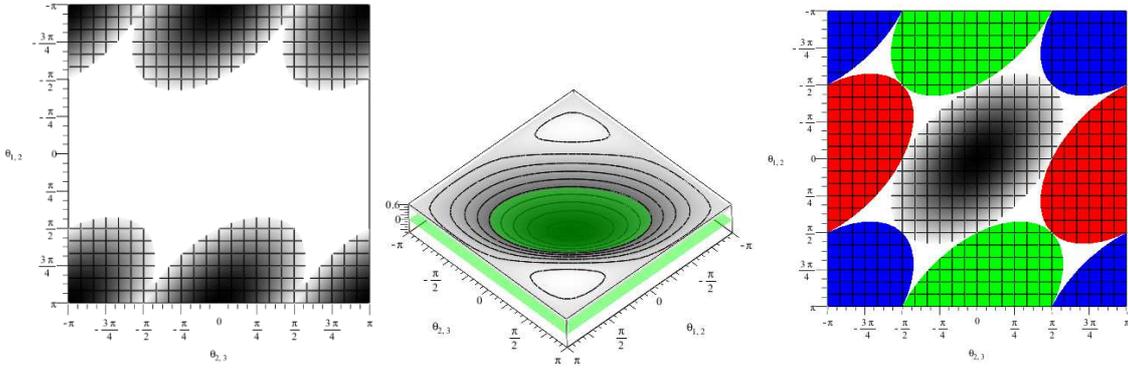
Que deve ser maior ou igual a zero, pois se trata da soma de duas probabilidades, porém no gráfico a seguir tem-se que determinados ângulos esta desigualdade não é satisfeita e, portanto, não pode existir a função de probabilidade conjunta  $\mathcal{P}_{1,2,3}$

Da mesma forma chega-se às desigualdades

$$\mathcal{P}_{1,2,3}(+1, +1, -1) + \mathcal{P}_{1,2,3}(-1, -1, +1) \equiv \frac{1}{2} \cdot \left( \text{sen}^2 \frac{\theta_{1,2}}{2} + \cos^2 \frac{\theta_{1,3}}{2} + \cos^2 \frac{\theta_{2,3}}{2} - 1 \right) \geq 0$$

$$\mathcal{P}_{1,2,3}(+1, -1, +1) + \mathcal{P}_{1,2,3}(-1, +1, -1) \equiv \frac{1}{2} \cdot \left( \cos^2 \frac{\theta_{1,2}}{2} + \text{sen}^2 \frac{\theta_{1,3}}{2} + \cos^2 \frac{\theta_{2,3}}{2} - 1 \right) \geq 0$$

$$\mathcal{P}_{1,2,3}(-1, +1, +1) + \mathcal{P}_{1,2,3}(+1, -1, -1) \equiv \frac{1}{2} \cdot \left( \cos^2 \frac{\theta_{1,2}}{2} + \cos^2 \frac{\theta_{1,3}}{2} + \text{sen}^2 \frac{\theta_{2,3}}{2} - 1 \right) \geq 0$$



**Figura 2** Da esquerda para a direita (figuras com valores dos ângulos entre  $-\pi$  e  $\pi$ ): Na 1ª figura tem-se a região em branco é a região em que a desigualdade de Bell é válida e em tons de cinza é onde não é válida para os valores de  $\theta_{j,k}$ ; Na 2ª figura, tem-se que abaixo do plano verde são os valores negativos  $\mathcal{P}_{1,2,3}(-1, -1, -1) + \mathcal{P}_{1,2,3}(+1, +1, +1) \leq 0$ , ou seja, não é possível atribuir valores de probabilidade condizentes com os axiomas de Kolmogorov; Na 3ª figura tem-se que a região em branco é a região em que a desigualdade é válida e em cores é onde não é válida para os valores de  $\theta_{j,k}$  e não se pode determinar  $\mathcal{P}_{1,2,3}$

Note que a desigualdade de Bell não é satisfeita exatamente onde não se pode determinar a função de probabilidade conjunta  $\mathcal{P}_{1,2,3}$ . Ao montar o sistema com as equações

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{1,2,3}(-1, -1, -1) \\ \mathcal{P}_{1,2,3}(-1, -1, +1) \\ \mathcal{P}_{1,2,3}(-1, +1, -1) \\ \mathcal{P}_{1,2,3}(-1, +1, +1) \\ \mathcal{P}_{1,2,3}(+1, -1, -1) \\ \mathcal{P}_{1,2,3}(+1, -1, +1) \\ \mathcal{P}_{1,2,3}(+1, +1, -1) \\ \mathcal{P}_{1,2,3}(+1, +1, +1) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \frac{\sin^2(\theta_{1,2}/2)}{2} \\ \frac{\sin^2(\theta_{1,2}/2)}{2} \\ \frac{\sin^2(\theta_{1,3}/2)}{2} \\ \frac{\sin^2(\theta_{1,3}/2)}{2} \\ \frac{\sin^2(\theta_{2,3}/2)}{2} \\ \frac{\sin^2(\theta_{2,3}/2)}{2} \\ \frac{\cos^2(\theta_{1,2}/2)}{2} \\ \frac{\cos^2(\theta_{1,2}/2)}{2} \\ \frac{\cos^2(\theta_{1,3}/2)}{2} \\ \frac{\cos^2(\theta_{1,3}/2)}{2} \\ \frac{\cos^2(\theta_{2,3}/2)}{2} \\ \frac{\cos^2(\theta_{2,3}/2)}{2} \end{bmatrix}$$

observa-se que o posto da matriz dos coeficiente e da matriz estendida são iguais. Segue-se a matriz estendida escalonada (basta ignorar a última coluna para se ter a outra)

$$\left( \begin{array}{cccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{\sin^2(\frac{\theta_{1,3}}{2}) + \sin^2(\frac{\theta_{2,3}}{2}) - \cos^2(\frac{\theta_{1,2}}{2})}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{-\sin^2(\frac{\theta_{1,3}}{2}) - \sin^2(\frac{\theta_{2,3}}{2}) + 1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{\cos^2(\frac{\theta_{1,2}}{2}) - \sin^2(\frac{\theta_{2,3}}{2})}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{\sin^2(\frac{\theta_{2,3}}{2})}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & \frac{\cos^2(\frac{\theta_{1,2}}{2}) - \sin^2(\frac{\theta_{1,3}}{2})}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{\sin^2(\frac{\theta_{1,3}}{2})}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{\sin^2(\frac{\theta_{1,2}}{2})}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Portanto o sistema é consistente, sendo possível encontrar valores para  $\mathcal{P}_{1,2,3}$  que resolvam o sistema, porém não se pode encontrá-los com a restrição de que sejam todos positivos.

## 4 Conclusões

Tanto a Mecânica Quântica quanto a Probabilidade, tiveram seus fundamentos criados no século XX, e podem colaborar uma com a outra para a ampliação de conceitos, porém deve-se ter o cuidado de não introduzir inconsistências, para não acabar resultando em confusões.

Ao que tudo indica, é possível aplicar corretamente as teorias estatísticas na Mecânica Quântica.

## **Bibliografia**

- [1] BELL, J. S. **On the Einstein Podolsky Rosen paradox.** Physics 1 #3, 195 (1964).
- [2] MOOD, A. M.; GRAYBILL, F. A.; BOES, D. C. **Introduction to the theory of statistics.** 3rd. ed. New York: McGraw-Hill, 1973. 564p
- [3] MANOUKIAN, E. B. **Quantum theory: a wide spectrum.** Dordrecht: Springer, 2006. 1011p
- [4] PITOWSKY, I. **Quantum probability: quantum logic.** Berlin: Springer-Verlag, 1989. 209p
- [5] KHRENNIKOV, A. I. U. **Contextual approach to quantum formalism.** New York: Springer, 2009. 35p