MODELOS DE VOLATILIDADE COM INOVAÇÕES SKEW-T

Paulo Henrique Sales Guimarães[1,3], **Mário Javier Ferrua Vivanco**[2,3]

Resumo: *Incerteza e tempo são os elementos centrais que influenciam o comportamento dos agentes econômicos, por isso a correta previsão da volatilidade que nada mais é que uma medida de dispersão dos retornos de um ativo é fundamental para os mesmos traçarem suas estratégicas de hedge, por exemplo, bem como conhecer os momentos de grande incerteza do mercado. O mercado financeiro é essencialmente não linear o que faz surgir uma infinidade de modelos para estudar o seu comportamento, tais como modelos de volatilidade, no qual se destaca, neste trabalho, o modelo GARCH com inovações skew-t, que visa capturar a assimetria e a leptocurtose das séries de distribuições dos retornos.*

Palavras-chave: *Séries de retornos, Volatilidade, GARCH, Distribuição skew-t.*

Abstract: *Uncertainty and time are the key elements that influence the behavior of economic agents, so the correct prediction of the volatility that is nothing more than a measure of dispersion of returns of an asset is fundamental to the same tracery its strategic hedging by example, as well as knowing the times of great uncertainty in the market. The financial market is essentially nonlinear which causes a multitude of business models emerging to study their behavior, such as volatility models, which emphasizes, in this work, the GARCH model with skew-t innovations, which aims to capture the asymmetry and leptocurtose of the distributions of returns series.*

Keywords: *Returns series, volatility, GARCH, skew-t distribution.*

1 Introdução

A natureza do mercado é essencialmente não linear. Assim sendo, a descrição ou análise de fenômenos econômico-financeiros por meio de modelos ou técnicas não lineares são mais efetivas do que os modelos ou técnicas lineares. No estudo de modelos econômico-financeiros tem-se que as implicações dos seus integrantes individualmente são aleatórias não previsíveis, isto é, são não lineares, de forma que evoluem no domínio do tempo com um comportamento não periódico, desequilibrado, no qual o seu estado futuro é extremamente dependente de seu estado atual e que por menores que sejam as mudanças no valor assumido pelas suas variáveis, pode sofrer mudanças radicais no seu comportamento.

Modelos de volatilidade (variância condicional) são de grande importância na Economia. Uma questão que geralmente está presente nos gráficos de séries financeiras, é que, em geral choques negativos têm mais influencia na volatilidade do que choques positivos, caracterizando

[1]Universidade Federal de Lavras, Departamento de Ciências Exatas e-mail: *phsg13@yahoo.com.br*

[2]Universidade Federal de Lavras, Departamento de Ciências Exatas e-mail: *ferrua@dex.ufla.br*

[3]Os autores agradecem o suporte da agência FAPEMIG.

assim, certo grau de assimetria na volatilidade, isto implica que quanto mais incerto estiver o mercado, frente a crises ou outros fatos externos, mais os preços variam e maior a variância dos retornos implicando possibilidades de grandes ganhos ou perdas. Desta forma, o bom gerenciamento do risco de uma carteira de investimentos passa pela boa previsão das oscilações dos preços dos ativos no mercado.

Os modelos de volatilidade determinística fazem uso das informações de preços passados para atualizar seu valor para o ativo corrente, de forma que se podem enumerar os modelos da família ARCH - *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*, e os modelos GARCH - *General Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*, que é uma generalização dos modelos ARCH. Estes modelos consideram que a variância condicional de uma série temporal não é constante.

Geralmente, a utilização da distribuição normal padrão para os erros dos modelos GARCH [4] não é suficiente para adequar as características de caudas pesadas e assimetria dos retornos. Desta forma, a utilização da distribuição t de Student ou skew-t. O objetivo deste trabalho é modelar a volatilidade por meio do modelo GARCH com inovações skew-t.

2 Metodologia

O modelo ARCH(r) pode-se apresentar inviável pelo grande número de parâmetros estimados, uma vez que a ordem deste modelo pode ser alta devido à longa memória encontrada, além da existência do problema com a variância negativa. De forma a resolver este problema, Bollerslev [1] sugere um modelo potencialmente mais parcimonioso, chamado modelo GARCH ("*Generalized* ARCH") descrevendo a volatilidade com menos parâmetros se comparado ao modelo ARCH. A ideia foi introduzir na fórmula da variância condicional regressores da variância condicional passada, possibilitando ao modelo ser mais flexível, no sentido de descrever uma memória mais longa e com menos parâmetros comparado aos modelos ARCH.

Considere $y = \{y_t; t = 1, \ldots, T\}$ como a série de retornos. O modelo GARCH (p, q) estima a volatilidade dos retornos da forma:

$$y_t = \varepsilon_t \sqrt{h_t}, \quad \varepsilon_t \sim D(0,1) \tag{1}$$

$$h_t = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i y_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j h_{t-j} \tag{2}$$

sendo h_t a variância condicional (não observável) de y_t dada a informação passada $F_t = \{y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots\}$, os ε_t são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com média zero, isto é, são os erros do modelo. $D(0,1)$ denota uma distribuição com média zero e variância um. As restrições de estacionaridade e positividade são $\alpha_0 > 0, \omega > 0, \alpha_i \geq 0, i = 1, \ldots, p, \beta_j \geq 0, j = 1, \ldots, q$ e $\left(\sum_{i=1}^{q} \alpha_i + \sum_{j=1}^{p} \beta_j\right) > 1$.

O modelo GARCH (1, 1) é muito utilizado na prática. Ele será utilizado para mostrarem-se algumas propriedades dos modelos GARCH. O modelo GARCH (1,1) com pode ser expresso da forma

$$y_t = \sqrt{h_t}\varepsilon_t, \quad h_t = \omega + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1} \tag{3}$$

com $\omega > 0, 0 \leq \alpha_1, \beta_1 < 1$.

O conhecimento de assimetria e curtose é importante em inúmeras aplicações no mercado financeiro. Sendo assim, uma distribuição que possa modelar estes dois momentos parece ser fundamental. Lambert & Laurent [3] consideraram a densidade da skew t proposta por Fernández & Steel [2] ao modelo GARCH. Lembrando que uma das condições para a inovação de modelos GARCH é que a média seja nula e a variância unitária para o erro. Desta forma, tem-se $\varepsilon_t \sim ST(0,1)$, a log-verossimilhança do modelo GARCH (1,1) com erros skew t é dado por:

$$\ell(y_t|\Theta) = T\left\{\log\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) - \log\left(\frac{\nu}{2}\right) - \frac{1}{2}\log[\pi(\nu-2)] + \log\left(\frac{2}{\gamma+\gamma^{-1}}\right) + \log(s)\right\} \\ -\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\left\{\log(h_t) + (1+\nu)\log\left[1+\frac{(sz_t+m)^2}{\nu_2}\gamma^{-2I_t}\right]\right\} \tag{4}$$

em que $\Gamma(\nu)$ é a função gama, ν é o número de graus de liberdade, $\gamma > 0$ é o parâmetro de assimetria $m = \frac{\Gamma[(\nu+1)/2]\sqrt{\nu-2}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu/2)}(\gamma-\gamma^{-1})$, $s = \sqrt{(\gamma^2+\gamma^{-2}-1)-m^2}$ e $I_t = 1$ se $z_t \geq -m/s$ ou $I_t = -1$ se $z_t < -m/s$.

3 Resultados e discussões

A série analisada é a série de retornos do Ibovespa no período de 27/04/1993 a 21/07/2014. Na Figura 1 tem-se a série temporal do Ibovespa.

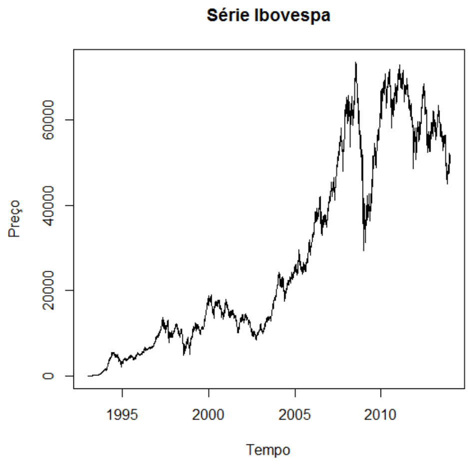

Figura 1: Série Ibovespa

Na Figura 2 tem-se a série de retornos do Ibovespa para o mesmo período.

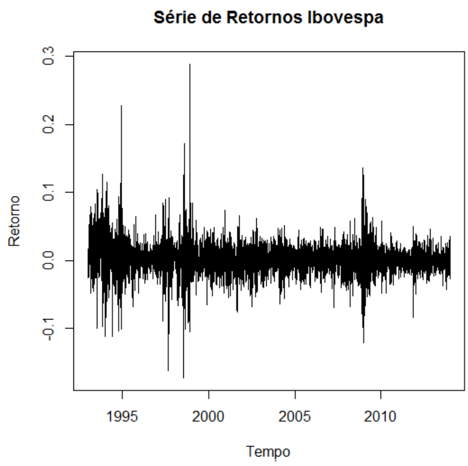

Figura 2: Série de retornos Ibovespa

A curtose da série de retornos vale 10,021, sendo bastante superior à curtose da distribuição normal que é igual a três. Já a assimetria foi igual a 0,4945, indicando uma assimetria à direita.

Para o modelo GARCH (1,1) com inovações t de Student, todos os parâmetros do modelo foram significativos, assim como para o GARCH (1,1) com inovações skew-t. Porém, o GARCH (1,1) com erros skew-t apresentou um ajuste melhor comparado com o GARCH (1,1) com erros t de Student. Isto é explicado, principalmente pelo fato da distribuição skew-t conseguir modelar a assimetria na série de retornos (volatilidade). A tabela 1 mostra os valores de AIC e BIC para os dois modelos.

Tabela 1: Ajuste de modelos.

Modelo	AIC	BIC
GARCH(1,1) - t de Student	−5,069618	−5,063372
GARCH(1,1) - skew-t	−5,072172	−5,064677

4 Conclusões

O ajuste do modelo GARCH (1,1) com erros skew-t apesar de não ter apresentado uma diferença muito grande com relação ao modelo GARCH (1,1) com erros t de Student, foi superior a este, apresentando também a possibilidade de captar a assimetria em série de retornos, o que com inovações t de Student não é possível, devido ao desta distribuição ser simétrica.

Referências

[1] BOLLERSLEV, T. **Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity**. Journal of Econometrics, v.31 p.307-327. 1986.

[2] FERNANDEZ, C.; STEEL, M. **On Bayesian modeling of fat tails and skewness**, Journal of the American Statistical Association, v.93 p.359-371. 1998.

[3] LAMBERT, P.; LAURENT, S. **Modelling skewness dynamics in series of financial data**. Discussion Paper, Institut de Statistique, Louvain-la-Neuve. 2000.

[4] TSAY, R.S. **Analysis of Financial Time Series**. New York: Wiley. 605p. 2002.