Revista da Estatística UFOP, Vol III(3), 2014, ISSN 2237-8111
Edição especial: 59ª Reunião Anual da Regional Brasileira da Sociedade Internacional de Biometria - RBRAS
Trabalhos apresentados na versão poster.

A Fórmula de Feynman-Kac e a Equação de Black-Scholes

Evandro M. Melo [1]

1 Introdução

Neste trabalho seguimos [7] para mostrar como a Fórmula de Feynman-Kac (em uma versão simplificada), ver referência [4] para mais detalhes, pode ser utilizada para solucionar a famosa equação de Black-Scholes de precificação de opções financeiras, ver referência [1] para mais detalhes. A Fórmula de Feynman- Kac, que é assim chamada em homenagem ao físico Richard Feynman e ao matemático Marc Kac estabelece uma conexão entre equações diferenciais parciais (EDPs) parabólicas e processos estocásticos. Por sua vez a Equação de Black-Scholes,assim chamada em homenagem aos matemáticos Fischer Black e Myron Scholes relaciona o preço de opções européias ao seu tempo de maturidade e valor do ativo subjacente. Para uma dedução utilizando argumentos esuas hipóteses subjacentes e mais aplicações em finanças veja a referência [2].

2 Desenvolvimento

2.1 O Lema de Ito

Apresentamos nesta seção o lema de Ito unidimensional,um dos mais importantes resultados do cálculo estocástico e que pode ser visto como uma versão para o cálculo estocástico da regra da cadeia do cálculo ordinário.
O lema de Ito é também muito importante na solução de equações diferenciais estocásticas e o utilizaremos sem demonstração [veja [6] para uma demonstração] na prova da Fórmula de Feynman-Kac.

Teorema1: O Lema de Ito Unidimensional

Seja $X(t)$ uma solução da equação diferencial estocástica (EDE) $dX = \mu(t,X)dt + \sigma(t,X)dW$ e $f(t,X)$ uma função determinística, com derivada contínua em t e derivada segunda contínua em x. Então o pocesso estocástico $f(t,X(t))$ é solução da seguinte EDE: $df(t,X) = (\frac{\partial f(t,X)}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(t,X)\frac{\partial^2 f(t,X)}{\partial x^2}) + \frac{\partial f(t,X)}{\partial x}dX$.

[1]IME-USP. e-mail: *evanmak@ime.usp.br*

2.2 A Fórmula de Feynman-Kac

Teorema2: **Fórmula de Feynman-Kac**

Seja $u(t,x)$ solução da EDP:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + \alpha(x)u(t,x) = 0, \quad 0 \le t \le T \tag{1}$$

com $\psi(x) = u(T,x)$ como condição terminal, $\alpha(x)$ é uma função contínua limitada superiormente e $|u(t,x)| \le C\exp(|x|)^k$ para ulguma constante $C > 0$ e $k < 2$. Então

$$u(t,X) = \mathbb{E}[\exp(\int_t^T \alpha(W(s))ds)\psi(W(T))|W(t) = x] \tag{2}$$

, onde $\{W(t)\}$ é o movimento browniano padrão.

Prova:

Defina $Z_1(t) = \exp(\int_t^T \alpha(W(s))ds)$ e $Z_2(t) = u(t,X(t))$

Temos $dZ_1(t) = \alpha(W(t))Z_1(t)dt$ por diferenciação normal e

$dZ_2(t) = (\frac{\partial u(t,W)}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(t,W)\frac{\partial^2 u(t,W)}{\partial x^2})dt + \frac{\partial u(t,W)}{\partial x}dW$

pelo lema de Ito.

Agora usando a regra do produto para diferenciar o processo $\{Z_1(t)Z_2(t)\}$ temos:

$d[Z_1Z_2] = dZ_1Z_2 + Z_1dZ_2 = \exp(\int_0^t \alpha(W(s))ds)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}dW$ portanto o processo $\{Z_1(t)Z_2(t)\}$ tem média zero. Mostra-se mesmo que sob as condições do teorema, $\{Z_1(t)Z_2(t)\}$ é um martingal. Para mais detalhes sobre martingais ver [8]. Portanto

$\mathbb{E}[\exp(\int_0^T \alpha(W(s))ds)u(T,W(T))|W(t) = x] = \exp(\int_0^t \alpha(W(s))ds)u(t,x)$, onde $u(T,W(T)) = \psi(W(T))$. Dividindo ambos os lados de por $\exp(\int_0^t \alpha(W(s))ds)$ segue o resultado.

2.3 Equação de Black-Scholes

Teorema3: Equação de Black-Scholes

Seja $\phi(t,S)$ o preço de uma opção européia no tempo t e S o preço do ativo subjacente neste mesmo tempo, então $\phi(t,S)$ satisfaz a equação de Black-Scholes:

$$\frac{\partial \phi(t,S)}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 \phi(t,S)}{\partial S^2})dt + rS\frac{\partial \phi(t,S)}{\partial S} - r\phi(t,S) = 0 \tag{3}$$

para qualquer $0 \le t \le T$, $S \ge 0$ e $\phi(T,S) = \Phi(S)$

A solução da equação (3) é

$$\phi(t,S) = \frac{\exp(-r(T-t))}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(S\exp(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma(\sqrt{T-t})z)\exp(\frac{-x^2}{2})dz \quad (4)$$

Prova da Equação de Black-Scholes através da Fórmula de Feynman-Kac:
Em primeiro lugar eliminamos S e S^2 dos coeficientes da equação (3):
Para isso façamos a substituição $S = \exp(\sigma x)$ e $v(t,x) = \phi(t,\sigma x)$,assim obtemos:
$\frac{\partial v(t,x)}{\partial x} = \sigma S \frac{\partial \phi(t,S)}{\partial S}$
$\frac{\partial^2 v(t,x)}{\partial x^2} = \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 \phi(t,S)}{\partial S^2} + \sigma^2 S \frac{\partial \phi(t,S)}{\partial S}$
Substituindo $\frac{\partial v(t,x)}{\partial x}$ e $\frac{\partial^2 v(t,x)}{\partial x^2}$ em (3) obtemos:

$$\frac{\partial v(t,x)}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v(t,x)}{\partial x^2} + \frac{1}{\sigma}(r-\frac{1}{2}\sigma^2)\frac{\partial v(t,x)}{\partial x} - rv(t,x) = 0 \quad (5)$$

e $\phi(T,S) = \Phi(S) = \Phi(\exp(\sigma x)) = v(T,x)$.

Vamos agora eliminar o termo de primeira ordem $\frac{\partial v(t,x)}{\partial x}$ de (5)
Definamos então $v(t,x) = \exp(kx)u(t,x)$ onde k é uma constante a ser determinada. Então:
$\frac{\partial v(t,x)}{\partial x} = \exp(kx)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} + k\exp(kx)u(t,x)$
$\frac{\partial^2 v(t,x)}{\partial x^2} = \exp(kx)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + 2k\exp(kx)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} + k^2\exp(kx)u(t,x)$
Substituindo em (5)obtemos:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + [k+\frac{1}{\sigma}(r-\frac{1}{2}\sigma^2)]\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} + [\frac{1}{2}k^2 + \frac{k}{\sigma}(r-\frac{1}{2}\sigma^2) - r]u(t,x) = 0 \quad (6)$$

Escolhendo $k = -\frac{1}{\sigma}(r-\frac{1}{2}\sigma^2)$ obtemos:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} - [\frac{1}{2\sigma^2}(r-\frac{1}{2}\sigma^2)^2 + r]u(t,x) = 0 \quad (7)$$

com $u(T,x) = \exp(\frac{1}{\sigma}(r-\frac{1}{2}\sigma^2)x)\Phi(\exp(\sigma x)$.
Finalmente podemos aplicar a Fórmula de Feynman-Kac. Comparando (1) com (7) observamos que $\alpha(x) = -[\frac{1}{2\sigma^2}(r-\frac{1}{2}\sigma^2)^2 + r]$ e $\psi(x) = \exp(\frac{1}{\sigma}(r-\frac{1}{2}\sigma^2)\Phi(\exp(\sigma x)$
A fórmula de Feynman-Kac implica que a solução da equacão ()é dada por
$u(t,x) = \exp(-[\frac{1}{2\sigma^2}(r-\frac{1}{2}\sigma^2)^2 + r])(T-t)\mathbb{E}[\exp(\frac{1}{\sigma}(r-\frac{1}{2}\sigma^2)W(T)\Phi(\exp(\sigma W(T)))|W(t) = x]$
Observamos que $W(T)$,dado que $W(t) = x = \frac{1}{\sigma}\log(S)$,é uma variável aleatória normal com média x e variância $T-t$.
Portanto $\phi(t,S) =$
$\exp(-[\frac{1}{2\sigma^2}(r-\frac{1}{2}\sigma^2)^2 + r](T-t) - \frac{1}{\sigma}(r-\frac{1}{2}\sigma^2)x)\ \mathbb{E}[\exp(\frac{1}{\sigma}(r-\frac{1}{2}\sigma^2)W(T)\Phi(\exp(\sigma W(T)))|W(t) = x] =$
$\frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}}\exp(-[\frac{1}{2\sigma^2}(r-\frac{1}{2}\sigma^2)^2 + r])(T-t) - \frac{1}{\sigma}(r-\frac{1}{2}\sigma^2)x \int_{-\infty}^{+\infty} \exp([\frac{1}{\sigma}(r-\frac{1}{2}\sigma^2)]\Phi(\exp(\sigma z)\exp(-\frac{(z-x)^2}{2(T-t)})dz =$

$$= \frac{\exp(-r(T-t))}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(S\exp(\sigma z)\exp(-\frac{1}{2(T-t)}[(z-\frac{1}{\sigma}(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)]^2 dz =$$

$$= \frac{\exp(-r(T-t))}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(S\exp(\sigma z)+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)))\exp(-\frac{1}{2(T-t)}z^2)dz$$

que é equivalente a solução () com $\sigma\sqrt{T-t}$ no lugar de σ.

3 Conclusão

Mostramos como utilizar a Fórmula de Feynman-Kac para demonstrar a Equação de Black-Scholes, que pode ser feita também através de argumentos financeiros-econômicos como feito originalmente em [1]. Seguimos de perto [7] e ainda é possível reduzir a equação de Black-Scholes à equação do calor para resolvê-la. Apesar de existir uma versão muito mais geral da fórmula de Feynman-Kac como feito em [6] uma versão simplificada serviu aos nossos propósitos.

Referências

[1] BLACK F.; SCHOLES M.J. The pricing of options and corporate liabilities. **Journal of Political Economy**.p. 637-654. 1973.

[2] HULL, J. **Options, Futures, and other Derivative Securities**. 2nd Edition. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1993.

[3] ITO, K. Stochastic Integral. **Proc. Imperial Acad.**. Tokyo 20, p. 519-524, 1994

[4] KAC, M. **On Distributions of Certain Wiener Funcionals**. Transactions of the American Mathematical Society 65 (1): p. 1-13, 1949.

[5] ØKSENDAL, B. **Stochastic Differential Equations: An Introduction with Application**. 6th Edition. Springer-Verlag. 2007.

[6] KARATZAS, I. ; Shreve, S. **Brownian Motion and Stochastic Calculus**. 2nd Edition. Springer-Verlag. 1991.

[7] LIN, X. S. **Introductory Stochastic Analysis for Finance and Insurance**. Wiley Series in Probability and Statistics. 2006.

[8] WILLIAMS, D. **Probability with Martingales**. Cambridge University Press. 1994.