Revista da Estatística UFOP, Vol III(3), 2014, ISSN 2237-8111
Edição especial: 59ª Reunião Anual da Regional Brasileira da Sociedade Internacional de Biometria - RBRAS
Trabalhos apresentados na versão poster.

Distribuições do produto e razão de variáveis aleatórias Pareto e beta

Jailson de Araujo Rodrigues [1 2]
Ana Paula Coelho Madeira Silva [3]
Jaime dos Santos Filho[1]
Ângela Lima da Silva [1]

1 Introdução

A necessidade de determinar as distribuições do produto e da razão de variáveis aleatórias surge naturalmente em diversas áreas do conhecimento. Por exemplo, em física nuclear estuda-se a razão entre a massa e a energia e em genética a razão entre duas variáveis pode ser empregada para o estudo de herança mendeliana. Por outro lado, o produto de variáveis aleatórias pode ser empregado em hidrologia para analisar magnitude de seca que é o produto do período de seca com sua intensidade. Dessa forma, muitos autores tem pesquisado as distribuições do produto e quociente de variáveis aleatórias. Alguns trabalhos recentes que tratam desse tema foram apresentados por Shakil *et al.* (2008) para as famílias Maxwell e Rayleigh; Nadarajah (2010) e Nadarajah (2011) para as famílias Pareto e gama e Nadarajah e Kotz (2011) para as famílias normal e Laplace.

Nesse trabalho, é apresentado um estudo das distribuições de XY e X/Y quando X e Y são, respectivamente, variáveis aleatórias Pareto e beta independentes. Além disso, é feita uma tabulação de quantis que podem ser utilizados em problemas práticos.

2 Distribuições Pareto e beta.

Distribuição Pareto: Uma variável aleatória X tem distribuição Pareto com parâmetros $\theta > 0$ e $\lambda > 0$ quando sua função densidade de probabilidade (fdp) é da forma:

$$f(x) = \lambda\theta^{\lambda}(x+\theta)^{-(\lambda+1)} \tag{1}$$

em que $x > 0$. Neste caso, escreve-se $X \sim Pareto(\theta, \lambda)$.

[1]DEPEN-IFBA. e-mail: *jailsondearaujo@yahoo.com.br*
[2]Agradecimento ao IFBA pelo apoio financeiro.
[3]CSL - UFSJ.

Distribuição beta: Uma variável aleatória Y tem distribuição beta com parâmetros $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ quando sua função densidade de probabilidade é da forma:

$$f_Y(y) = \frac{y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)} \tag{2}$$

em que $0 < y < 1$ e $B(\alpha,\beta)$ representa a função beta,

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt \tag{3}$$

Se Y tem distribuição dada por (2), escreve-se $Y \sim Beta(\alpha,\beta)$.

Em Johson *et al.* (1994, 1995) são apresentadas maiores informações sobre o modelo Pareto e o modelo beta. Incluindo a função beta, os cálculos envolvidos no trabalho requerem o uso de outras funções especiais como a função gama,

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1}\exp(-t)\,dt \tag{4}$$

e a função hipergeométrica de Gauss,

$$_2F_1(a,b;c;x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k(b)_k x^k}{(c)_k k!} \tag{5}$$

em que $|x| < 1$ e $(d)_k = d(d+1)\ldots(d+k-1)$ denota o fatorial ascendente com $k = 1,2,\ldots$ e $(d)_0 = 1$. As propriedades dessas funções especiais podem ser vistas em Oldham *et al.* (2009).

3 Produto e razão de Pareto e beta.

Nesta sessão são deduzidas, com o auxílio de um lema, as fdp de $P = XY$ e $R = X/Y$ quando X e Y distribuídas de acordo com (1) e (2).

Lema 1 *(Equação (2.2.6.15), Prudnikov (1998)). Se $a,\alpha,\beta,z > 0$ e ρ é um real qualquer, então,*

$$\int_0^a x^{\alpha-1}(a-x)^{\beta-1}(x+z)^{-\rho}\,dx = z^{-\rho}a^{\alpha+\beta-1}B(\alpha,\beta)\ {}_2F_1\left(\alpha,\rho;\alpha+\beta;-\frac{a}{z}\right) \tag{6}$$

Teorema 1 *Se $X \sim Pareto(\theta,\lambda)$ e $Y \sim Beta(\alpha,\beta)$ são independentes, então, a fdp de $P = XY$ pode ser escrita como:*

$$f_P(p) = \frac{B(\alpha+\lambda,\beta)\lambda\theta^\lambda}{B(\alpha,\beta)\,p^{\lambda+1}}\ {}_2F_1\left(\alpha+\lambda,\lambda+1;\alpha+\beta+\lambda;-\frac{\theta}{p}\right) \tag{7}$$

sendo que $p > 0$. Em particular, se $\alpha+\beta = \theta = 1$, então, $P \sim BetaII(\alpha,\lambda)$.

Prova:

$$\begin{aligned} f_P(p) &= \int_0^1 (1/y)\, f_X(p/y)\, f_Y(y)\, dy \\ &= \frac{\lambda}{\theta B(\alpha,\beta)} \int_0^1 y^{\alpha+\lambda-1} (1-y)^{\beta-1} \left(\frac{p}{\theta}+y\right)^{-(\lambda+1)} dy. \end{aligned} \tag{8}$$

A conclusão do teorema decorre da aplicação do Lema 1 na integral (8).

Teorema 2 *Se $X \sim Pareto(\theta,\lambda)$ e $Y \sim Beta(\alpha,\beta)$ são independentes, então, a fdp de $R = X/Y$ pode ser escrita como:*

$$f_R(r) = \frac{\alpha\lambda}{\theta(\alpha+\beta)}\, {}_2F_1\left(\alpha+1, \lambda+1; \alpha+\beta+1; -\frac{r}{\theta}\right) \tag{9}$$

sendo que $r > 0$. Em particular, se $\lambda = \alpha+\beta$ e $|r| < \theta$, então, $R \sim Pareto(\theta,\alpha)$.

Prova:

$$\begin{aligned} f_R(r) &= \int_0^1 y f_X(ry)\, f_Y(y)\, dy \\ &= \frac{\lambda\theta^{\lambda}}{B(\alpha,\beta)} \int_0^1 y^{\alpha} (1-y)^{\beta-1} (ry+\theta)^{-(\lambda+1)} dy \\ &= \frac{\lambda\theta^{\lambda} r^{-(\lambda+1)}}{B(\alpha,\beta)} \int_0^1 y^{\alpha} (1-y)^{\beta-1} \left(y+\frac{\theta}{r}\right)^{-(\lambda+1)} dy \end{aligned} \tag{10}$$

Aplicando o Lema 1 na integral (10), tem-se:

$$f_R(r) = \frac{\lambda B(\alpha+1,\beta)}{\theta B(\alpha,\beta)}\, {}_2F_1\left(\alpha+1, \lambda+1; \alpha+\beta+1; -\frac{r}{\theta}\right)$$

Utilizando as propriedades, $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$ e $B(t,z) = \Gamma(t)\Gamma(z)/\Gamma(t+z)$, tem-se:

$$\begin{aligned} f_R(r) &= \frac{\lambda\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+\beta)}{\theta\Gamma(\alpha+\beta+1)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\, {}_2F_1\left(\alpha+1, \lambda+1; \alpha+\beta+1; -\frac{r}{\theta}\right) \\ &= \frac{\alpha\lambda}{\theta(\alpha+\beta)}\, {}_2F_1\left(\alpha+1, \lambda+1; \alpha+\beta+1; -\frac{r}{\theta}\right) \end{aligned} \tag{11}$$

Para o caso particular $\lambda = \alpha+\beta$, empregando a expressão (5), a série obtida converge e sua convergência é baseada na expressão:

$$(1-\nu x)^{-b} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(b)_k (\nu x)^k}{k!} \tag{12}$$

com $|\nu x| < 1$. Dessa forma, quando $|r| < \theta$, segue que $R \sim Pareto(\theta,\alpha)$.

4 Cálculo dos quantis

Nesta seção, são fornecidas rotinas para o cálculo dos quantis p_γ e r_γ das distribuições de P e R. Esses quantis são computados numericamente resolvendo as equações:

$$F_P\left(p_\gamma\right) = \int_0^{p_\gamma} f_P\left(t\right)dt = \gamma \tag{13}$$

e

$$F_R\left(r_\gamma\right) = \int_0^{r_\gamma} f_R\left(t\right)dt = \gamma \tag{14}$$

em que $0 < \gamma < 1$. Evidentemente, isso envolve o cálculo da função hipergeométrica de Gauss. Dessa forma, foi utilizada a função hypergeom $([\cdot],[\cdot],\cdot)$ do software Maple. As rotinas apresentadas a seguir calculam os quantis p_γ e r_γ para α, β, θ e λ dados, referentes a $\gamma = 0,01; 0,05; 0,1; 0,9; 0,95; 0,99$.

```
# Cálculo dos quantis de P=XY quando Y ~Pareto (θ,λ) e X ~Beta (α,β).
  f1:=Beta (α+λ,β)*θ**λ/(Beta (α,β)*p**λ)
  f2:= 1 − f1*hypergeom ( [α+λ,λ],[α+β],−θ/p)
   p1:=fsolve (f2=0.01,p)
   p2:=fsolve (f2=0.05,p)
   p3:=fsolve (f2=0.1,p)
   p4:=fsolve (f2=0.9,p)
   p5:=fsolve (f2=0.95,p)
   p6:=fsolve (f2=0.99,p)
  print(p1,p2,p3,p4,p5,p6)
```

```
# Cálculo dos quantis de P=X/Y quando Y ~Pareto (θ,λ) e X ~Beta (α,β).
  f:= 1−hypergeom ( [α,λ],[α+β],−p/θ)
   p1:=fsolve (f=0.01,p)
   p2:=fsolve (f=0.05,p)
   p3:=fsolve (f=0.1,p)
   p4:=fsolve (f=0.9,p)
   p5:=fsolve (f=0.95,p)
   p6:=fsolve (f=0.99,p)
  print(p1,p2,p3,p4,p5,p6)
```

Na Tabela 1 são apresentados os quantis da distribuição de $P = XY$ quando $X \sim Pareto(\theta,\lambda)$ e $Y \sim Beta(\alpha,\beta)$ independentes para $\alpha = 1$, $\lambda = 1$ e determinados valores paramétricos β e λ.

Tabela 1. Quantis de $P = XY$ com $X \sim Pareto(\theta, \lambda)$ e $Y \sim Beta(\alpha, \beta)$.

β	θ	1%	5%	10%	90%	95%	99%
0,5	0,1	0,000275	0,001880	0,004544	0,587381	1,253683	6,586736
	0,4	0,001100	0,007519	0,018178	2,349525	5,014733	26.346942
	1,5	0,004124	0,028196	0,068166	8,810718	18,805248	98,801036
	3,0	0,008249	0,056392	0,136331	17,621435	37,610496	197,602060
1,0	0,1	0,000155	0,001108	0.002766	0,434475	0,933896	4,933445
	0,4	0,000618	0,004431	0,011065	1,737900	3,735586	19,733779
	1,5	0,002317	0,016615	0,041494	6,517127	14,008446	74,001671
	3,0	0,004634	0,033231	0,082989	13,034253	28,016892	148,003344
1,5	0,1	0,000107	0,000781	0,001977	0,344236	0,743542	3,942993
	0,4	0,000428	0,003125	0,007908	1,376944	2,974168	15,771973
	1,5	0,001605	0,011719	0,029656	5,163541	11,153131	59,145190
	3,0	0,003210	0,023438	0,059312	10,327081	22,306258	118,289801
2,0	0,1	0,000082	0,000603	0,001536	0,284834	0,617417	3,283483
	0,4	0,000327	0,002411	0,006143	1,139337	2,469667	13,133934
	1,5	0,001226	0,009040	0,023036	4,272515	9,261252	49,252251
	3,0	0,002453	0,018079	0,046072	8,545029	18,522504	98,504500

Referências

[1] JONHSON, N. L.; KOTZ, S.; BALAKRISHNAN, N. **Continuous Univariate Distributions, vol.1**. New York: John Wiley and Songs, 1994. 784p.

[2] JONHSON, N. L.; KOTZ, S.; BALAKRISHNAN, N. **Continuous Univariate Distributions, vol.2**. New York: John Wiley and Songs, 1995. 752p.

[3] NADARAJAH, S. **Sum, product and ratio of Pareto and gamma variables** J. of Stat. Comp. Simulation, v. 80, p. 1071-1082, 2010.

[4] NADARAJAH, S. **Sum, product and ratio of Pareto and gamma variables**. J. of Comp. and Appl. Mathematics, v. 235, p. 4496-4512, 2011.

[5] NADARAJAH, S; KOTZ, S. **On the linear combination, product and ratio of normal and Laplace random variables**. J. Franklin Institute, v. 348, p. 810-822, 2011.

[6] OLDHAM, K.; MYLAND, J.; SPANIER, J. **n atlas of functions: with equator, the atlas function calculator**. 2^{o}. ed., Canadá: Springer Vergland, 2009. 700p.

[7] PRUDNIKOV, A. P.; BRYCHKOV, Y. A.; MARICHEV,O. I. **Integrals and series, vol.1**. Amsterdam: Gordon and Breach, 1998. 808p.