Revista da Estatística UFOP, Vol III(3), 2014, ISSN 2237-8111
Edição especial: 59ª Reunião Anual da Regional Brasileira da Sociedade Internacional de Biometria - RBRAS
Trabalhos apresentados na versão poster.

Modelo de Gompertz Fracionário

José Paulo Carvalho dos Santos [1]
Lislaine Cristina Cardoso [2] [3]

1 Introdução

Com o intuito de descrever a taxa de mortalidade de seres humanos, o matemático Benjamin Gompertz, em 1825, desenvolveu uma equação diferencial ordinária não linear denominada Equação de Gompertz. Na literatura científica encontramos várias aplicações e formas de apresentação para essa equação. Nesse trabalho, o objetivo é generalizar a equação da forma descrita em [2] utilizando a metodologia do Cálculo Fracionário.

Atualmente, curvas de crescimento derivadas da equação de Gompertz são muito usadas por diversos autores para a análise de dados na área da Biometria [5, 6]. Por exemplo, [4] utiliza curvas de Gompertz para estudar a progressão do tamanho de tumores sólidos e compreender a evolução da doença. Na oftalmologia, [1] utilizou curvas de Gompertz para analisar o crescimento do cristalino humano a partir do acúmulo de peso úmido, em função da idade. [3] utiliza a equação para análise de tumores cancerígenos.

Considerando-se que o modelo de Gompertz é uma equação diferencial, temos, então, como princípio, uma relação que nos dá a taxa de crescimento de um dado fenômeno biológico com o passar do tempo. Portanto, o objetivo deste trabalho consiste em apresentar um novo modelo de Gompertz utilizando o Cálculo Fracionário.

O Cálculo Fracionário tem sua origem em 1695 com uma discussão entre Leibniz e L'Hospital tentando definir de que forma poderia ser derivada $1/2$ vez uma função. Vários matemáticos ilustres, como Euler, Lagrange, Laplace, Fourier, Abel, dentre outros, contribuíram para o desenvolvimento dessa teoria. Para mais detalhes sobre o assunto veja, [7] e as referências contidas neste trabalho.

2 Material e Método

Nesta seção introduziremos algumas definições e notações que serão usadas durante a exposição deste trabalho. Denotaremos por $\Gamma(\cdot)$ a função Gama dada por $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x}x^{\alpha-1}dx$, e por

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-y)g(y)dy,$$

[1]ICEX - UNIFAL-MG. e-mail: *zepaulo@unifal-mg.edu.br*
[2]Mestrado em Estatística Aplicada e Biometria - UNIFAL-MG
[3]Agradecimento a FAPEMIG pelo apoio financeiro.

a convolução incompleta entre as funções $f, g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, desde que esta expressão tenha sentido. A transformada de Laplace de uma função $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ é dada pela integral

$$F(s) = \mathfrak{L}[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt,$$

desde que a integral exista. A variável s é denominado parâmetro da transformada.

Agora vamos introduzir uma motivação para definição da Integral Fracionária que será usada na definição de Derivada de ordem Fracionária.

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua por partes no intervalo $[0,\infty)$ e integrável em todo subintervalo de $[0,\infty)$. Denotaremos por $Jf(t)$ o seguinte operador integral

$$Jf(t) = \int_0^t f(s)ds$$

e por $J^n f(t)$ o operador definido por

$$J^n f(t) = (JJ\ldots J)f(t),$$

a composição n vezes do operador J.

Usando o Teorema de Fubini sucessivamente obtemos a seguinte expressão integral para o operador $J^n f$

$$J^n f(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} f(s)ds,$$

substituindo $(n-1)! = \Gamma(n)$, podemos reescrever a expressão anterior da forma

$$J^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^t (t-s)^{n-1} f(s)ds. \tag{1}$$

Como a expressão (1) continua bem definida para $\alpha > 0$, este fato motiva a seguinte definição.

Definição 2.1 *A integral fracionária de Riemann-Liouville de ordem α é definida pela integral*

$$(J^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)ds. \tag{2}$$

Considere a função $\Phi_\alpha(t) = \dfrac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ definida para $t > 0$. Fazendo o produto convolução de Φ_α com f obtemos

$$(\Phi_\alpha * f)(t) = \int_0^t \Phi_\alpha(t-s)f(s)ds = \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s)ds = J^\alpha f(t).$$

Portanto a definição de integral fracionária pode ser interpretada como o produto convolução entre as funções Φ_α e f. Como consequência, obtemos uma fórmula para a transformada de Laplace para $J^\alpha f(t)$, que é dada por

$$\mathfrak{L}[J^\alpha f(t)] = \mathfrak{L}[(\Phi_\alpha * f)(t)] = \mathfrak{L}[\Phi_\alpha(t)]\mathfrak{L}[f(t)] = s^{-\alpha}\mathfrak{L}[f(t)].$$

Agora vamos introduzir a definição de derivada de ordem fracionária segundo Caputo.

Definição 2.2 *Tomando $\alpha > 0$, n o menor inteiro maior que α. Nestas condições, a derivada de ordem α de f segundo Caputo é definida por:*

$$D_t^{\alpha} f(t) = J^{n-\alpha}[D^n f(t)].$$

Em virtude da técnica da transformada de Laplace ser uma ferramenta importante para determinar soluções de equações diferenciais, a transformada de Laplace da Derivada de Caputo de ordem α é dada por

$$\mathfrak{L}[D_t^{\alpha} f(t)] = s^{\alpha}\mathfrak{L}[f(t)] - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0)s^{\alpha-1-k}\ ,\ \text{em que}\ ,\ \mathfrak{L}[f(t)] = F(s).$$

Antes de passarmos aos resultados do trabalho, veremos as funções de Mittag-Leffer, importantes funções relacionadas ao cálculo de ordem não inteira.

Definição 2.3 *A função de Mittag-Leffer de um parâmetro, com $x \in \mathbb{R}$ e $x > 0$ é dada por*

$$E_{\alpha}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}.$$

Note que, no caso em que $\alpha = 1$, essa função pode ser descrita da seguinte forma

$$E_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x.$$

Então, estendemos a função de Mittag-Leffer como uma generalização da função exponencial.

Definição 2.4 *A função de Mittag-Leffer de dois parâmetros, com $x \in \mathbb{R}$ e $x > 0$ é definida por*

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}.$$

Teorema 2.1 *As funções abaixo tem transformada de Laplace dadas por*

$$\mathfrak{L}\left[t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(at^{\alpha})\right] = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha}-a} \quad e \quad \mathfrak{L}\left[t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(-at^{\alpha})\right] = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha}+a}.$$

2.1 Resultado e discussões

Considere a equação diferencial ordinária de Gompertz, dada por

$$\frac{dN}{dt} = rN\ln\left(\frac{K}{N}\right), \tag{3}$$

$$N(0) = n_0. \tag{4}$$

Fazendo a mudança de variável $S(t) = \ln(K) - \ln(N)$, temos $\dfrac{dS}{dt} = -\dfrac{1}{N}\dfrac{dN}{dt}$, portanto, $\dfrac{dN}{dt} = -N\dfrac{dS}{dt}$. Assim a equação (3)-(4) fica da forma

$$
\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= -rS(t), && (5)\\
S(0) &= \ln\left(\frac{K}{n_0}\right). && (6)
\end{aligned}
$$

Usando o método de separação de variáveis para equações diferenciais ordinárias temos que a solução de (5)-(6) é dada por $S(t) = \ln\left(\frac{K}{n_0}\right)e^{-tr}$. Voltando a variável original obtemos o modelo de Gompertz

$$N(t) = Ke^{-\ln\left(\frac{K}{n_0}\right)e^{-rt}}.$$

Por outro lado, para introduzirmos a modelo de Gompertz Fracionário, transformando a equação (5)-(6) em uma equação fracionária, em que, a derivada foi substituida pela derivada fracionária de Caputo para $\alpha \in (0,1]$, obtemos a equação

$$
\begin{aligned}
D_t^{\alpha} &= -rS(t), && (7)\\
S(0) &= \ln\left(\frac{K}{n_0}\right). && (8)
\end{aligned}
$$

Aplicando a transformada de Laplace na equação (7)-(8) temos que

$$s^{\alpha}\mathcal{L}(S) - s^{\alpha-1}S(0) = -r\mathcal{L}(S),$$

de onde

$$\mathcal{L}(S) = \frac{s^{\alpha-1}S(0)}{(s^{\alpha}+r)}.$$

Portanto, usando o Teorema 2.1, temos que a solução é dada por $S(t) = S(0)E_{\alpha}(-rt^{\alpha})$. Mudando a variável segue que

$$\ln(K) - \ln(N) = \ln\left(\frac{K}{n_0}\right)E_{\alpha}(-rt^{\alpha}).$$

Logo, obtemos o modelo de Gompertz fracionário

$$N(t) = Ke^{-\ln\left(\frac{K}{n_0}\right)E_{\alpha}(-rt^{\alpha})}.$$

Note que quando fazemos $\alpha = 1$, recuperamos o modelo de Gompertz clássico.

2.2 Conclusões

Neste trabalho apresentamos uma generalização para o modelo de Gompertz clássico usando a metodologia do Calculo Fracionário. Como trabalho futuros pretende-se utilizar esse modelo para tratamento de dados reais relacionado a problemas de taxa de crescimento de tumores cancerígenos, a fim de verificar se a metodologia do Calculo Fracionária permite uma descrição melhor de fenômenos biológicos reais.

Referências

[1] AUGUSTEYN, R. C. Growth of the human eye lens. *Mol. Vision, Clifton*, n.13, p.252-257, 2007.

[2] BOYCE, W. E.; DEPRIMA, R. C. (2002). Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. LTC, Rio de Janeiro/RJ

[3] DOMINGUES, J. S. Gompertz Model: resolution and analysis for tumors. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, v. 1, n. 7, p. 70-77, 2012.

[4] LO, C. F. Stochastic Gompertz model of tumour cell growth. *J. Theor. Biol., London*, v.248, n.2, p.317-321, 2007.

[5] POOSEH, S.; RODRIGUES, H. S.; TORRES, D. F. M. Fractional derivatives in Dengue epidemics. URL arXiv:1108.1683v1 [math-CA] 8 Aug 2011.

[6] RIDA, S. Z.; EL-SAYED, A. M. A.; ARAFA, A . A. M. Effect of bacterial memory dependent growth by using fractional derivatives reaction-diffusion chemotactic model. *J. Stat. Phys.*, v. 140, p. 797–811, 2010.

[7] SANTOS, J. P. C.; CARDOSO, A.; FERREIRA, E. C.; FRANCO, J. C.; SOUZA JR., J. C. Cálculo de Ordem Fracionária e Aplicações. *Sigmae*, v.1, n.1, p. 18–32, 2012.