

# Modelos não-lineares aplicados aos dados de crescimento de frutos de mangueira Palmer

Adriana Dias<sup>1 2</sup>

Joel Augusto Muniz<sup>3</sup>

Fabyano Fonseca e Silva<sup>4</sup>

Taciana Villela Savian<sup>5</sup>

## 1 Introdução

O Brasil é o oitavo maior produtor mundial de manga e em 2011 produziu 1 milhão de toneladas do fruto, 3,2% do total produzido (FAO, 2012).

Dentre as variedades cultivadas, a mangueira cv. Palmer além de ser aceita, normalmente no mercado interno para o consumo direto, é também aproveitada pelas indústrias de processamento para o beneficiamento, o que certamente tem proporcionado um expressivo aumento na área cultivada (LIMA NETO; SANTOS; COSTA, 2010).

Os frutos da mangueira apresentam padrão de crescimento sigmoidal (MORAIS et al., 2004) e o estudo do crescimento contribui para o estabelecimento de estádios de maturação mais adequados à colheita e, aliado aos aspectos ligados ao estado nutricional das plantas, proporcionam melhor qualidade dos frutos.

Na literatura são apresentados diferentes modelos não-lineares para descrever o crescimento de frutos e a justificativa para o uso desses modelos é a interpretação biológica dos parâmetros.

Quando se trabalha com séries cronológicas de dados é apropriado testar a pressuposição de independência dos erros para evitar a obtenção de estimativas viesadas e a subestimação das variâncias dos parâmetros. Ao incorporar a autocorrelação residual ao modelo, é possível encontrar estimativas mais precisas para os parâmetros do modelo e ajustes mais eficientes (MENDES et. al, 2009; PRADO et. al, 2013).

Este trabalho teve como objetivo comparar os modelos não-lineares, logístico e logístico com quatro parâmetros, considerando a estrutura de erros independentes e autocorrelacionados no estudo do crescimento dos frutos de mangueira Palmer. Após a escolha da estrutura residual mais adequada, objetivou-se verificar qual modelo apresenta o melhor ajuste segundo os avaliadores: critério de informação de Akaike corrigido ( $AICc$ ), peso de Akaike, desvio padrão residual ( $DPR$ ) e coeficiente de determinação ajustado ( $R_{aj}^2$ ).

---

<sup>1</sup>DEX - UFPA, ICEX - UNIFAL-MG. e-mail: [adriana.dias@unifal-mg.edu.br](mailto:adriana.dias@unifal-mg.edu.br)

<sup>2</sup>Agradecimento ao CNPq e à FAPEMIG pelo apoio financeiro.

<sup>3</sup>DEX - UFPA.

<sup>4</sup>DZO - UFV.

<sup>5</sup>LCE - ESALQ/USP.

## 2 Material e métodos

Os dados utilizados para o ajuste dos modelos foram obtidos de um estudo (SOUZA, 2007) conduzido em Janaúba- MG pela Faculdade de Ciências Agrárias e Veterinárias - Unesp. O experimento foi instalado segundo o delineamento inteiramente casualizado, com cinco repetições. Os tratamentos corresponderam às épocas de amostragem das panículas. Cada unidade experimental foi composta por cinco plantas. Durante o pleno florescimento das mangueiras, que ocorreu em setembro de 2005, foram selecionadas 25 plantas da variedade e, 150 panículas foram marcadas com fita de plástico. Em cada planta foram marcadas seis panículas, padronizadas quanto ao tamanho e vigor. Iniciou-se a coleta quando os frutos atingiram o estágio de chumbinho, aproximadamente cinco dias após a antese, e finalizando quando os frutos atingiram o ponto de colheita, totalizando 19 épocas de amostragens.

Aos dados de crescimento dos frutos foram ajustados os modelos logístico e logístico com quatro parâmetros, considerando estruturas de erros independentes e com estrutura de erros autocorrelacionados de primeira ordem, AR(1), dados por:

$$y_i = \frac{\beta_1}{(1 + \exp(\beta_2 - \beta_3 x_i))} + e_i,$$

$$y_i = \frac{\beta_1 + (\beta_2 - \beta_1)}{1 + \exp\left(\frac{\beta_3 - x}{\beta_4}\right)} + e_i,$$

$$y_i = \frac{\beta_1}{(1 + \exp(\beta_2 - \beta_3 x_i))} + e_i + f_1 e_{i-1},$$

$$y_i = \frac{\beta_1 + (\beta_2 - \beta_1)}{1 + \exp\left(\frac{\beta_3 - x}{\beta_4}\right)} + e_i + f_1 e_{i-1},$$

em que:  $y$  é o teor de massa fresca dos frutos, em gramas,  $x$  é o tempo, em dias,  $e_i$  é o erro experimental no tempo  $i$ ,  $e_{i-1}$  é o erro experimental no tempo  $i-1$ ,  $f_1$  é o parâmetro de autorregressivo de ordem 1. No modelo logístico,  $\beta_1$  representa a assíntota do modelo, ou seja, o teor de massa fresca à maturidade;  $\beta_3$  a taxa de acúmulo de massa fresca. No modelo logístico com quatro parâmetros, o parâmetro  $\beta_1$  representa a assíntota à esquerda,  $\beta_2$  a assíntota à direita e  $\beta_3$  é a abscissa do ponto de inflexão da curva. De forma geral, não há uma interpretação biológica para o parâmetro  $\beta_2$  no modelo logístico, e  $\beta_4$  no modelo logístico com quatro parâmetros, sendo este o parâmetro de locação, correspondendo a uma constante de integração.

Os modelos de regressão não-linear foram ajustados aos dados médios de acúmulo de massa fresca por meio do PROC MODEL do SAS<sup>®</sup> (SAS INSTITUTE, 2002). Inicialmente, os modelos foram ajustados considerando a estrutura de erros independentes e o teste de Durbin-Watson foi utilizado para testar os resíduos quanto à auto-correlação de primeira e segunda ordens. Após a verificação da significância do teste de Durbin-Watson, utilizou-se a macro %AR (y,p) para o ajuste dos modelos considerando a estrutura de erros autorregressivos de primeira ordem. Para comparar os modelos quanto à qualidade de ajuste, utilizou-se os seguintes avaliadores de qualidade:

- 1) Coeficiente de determinação ajustado ( $R_a^2$ ):  $R_a^2 = R^2 - \left(\frac{p-1}{n-p}\right) (1 - R^2)$ , em que:  $R^2 = 1 - \frac{SQR}{SQT}$ ,  $SQR = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$ ,  $SQT = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$ ,  $\hat{y}_i = f(x_i, \hat{\theta})$ ,  $n$  é o número de observações utilizadas e  $p$  é o número de parâmetros do modelo.
- 2) Critério de Informação de Akaike corrigido ( $AICc$ ):  $AICc = AIC + \frac{2p(p+1)}{n-p-1}$ , em que  $AIC = -2\loglike + 2p$ ,  $\loglike$  é o valor do logaritmo natural do máximo da função de verossimilhança.
- 3) Peso de Akaike (MOTULSKY & CHRISTOPOULOS, 2003):  $p = \frac{\exp(-0,5\Delta)}{1 + \exp(-0,5\Delta)}$ , em que:  $\Delta$  representa a diferença entre os valores de  $AICc$  dos modelos. O peso de Akaike fornece a probabilidade de que o modelo com menor  $AICc$  seja o modelo correto.
- 4) Desvio padrão residual ( $DPR$ ):  $DPR = \sqrt{\frac{QMR}{n-p}}$ , em que  $QMR$  é o quadrado médio residual.

### 3 Resultados e discussão

A Tabela 1 apresenta os resultados dos avaliadores de qualidade de ajuste e do teste de Durbin-Watson para os modelos logístico e logístico com quatro parâmetros considerando a estrutura de erros independentes e autorregressivos.

Tabela 1: Resultados dos avaliadores da qualidade de ajuste e do teste de Durbin-Watson (DW)

Modelo	$AICc$	$R_{aj}^2$	$DPR$	$DW$
1. Logístico	176,1864	0,9867	22,2755	0,9866**
2. Logístico com quatro parâmetros	167,8249	0,9923	16,9440	1,6142*
3. Logístico AR(1)	172,2355	0,9867	20,0599	1,8717 <sup>ns</sup>
4. Logístico com quatro parâmetros AR(1)	169,0390	0,9938	17,2906	1,9011 <sup>ns</sup>

\*Significativo a 5% de probabilidade

\*\*Significativo a 1% de probabilidade

<sup>ns</sup> não significativo

Observa-se que o teste de Durbin-Watson foi significativo para ambos os modelos, indicando a necessidade de considerar a estrutura de erros autorregressivos. Ao considerar a estrutura de erros autorregressivos de primeira ordem, verifica-se que o teste de Durbin-Watson foi não significativo para ambos os modelos e indica que não é necessário considerar um processo autorregressivo de segunda ordem.

Em relação à comparação dos modelos, considerando a estrutura AR(1), verifica-se que os avaliadores de qualidade de ajuste foram semelhantes, ou seja, ambos os modelos apresentaram altos valores para o coeficiente de determinação ajustado ( $R_{aj}^2$ ), baixos valores para o desvio padrão residual ( $DPR$ ) e valores bem próximos para o critério de informação de Akaike corrigido ( $AICc$ ). O pesquisador pode ficar em dúvida ao escolher o modelo que melhor represente o comportamento de seus dados, devido à semelhança entre o resultado dos avaliadores dos modelos. MOTULSKY & CHRISTOPOULOS (2003) sugerem a utilização dos pesos de Akaike para proceder à comparação dos modelos. Como os valores de  $AICc$  estão próximos, não há evidências claras para escolher um modelo em detrimento de outro. A diferença entre os valores de  $AICc$  dos modelos logístico com quatro parâmetros e logístico com estrutura de erros

autorregressivos AR(1) foi de -3,1966 e o peso de Akaike foi de 0,8318, indicando que o modelo logístico com quatro parâmetros apresenta aproximadamente 83% de probabilidade de ser o modelo correto.

A Tabela 2 apresenta as estimativas dos parâmetros dos modelos logístico e logístico com quatro parâmetros, ajustados aos dados de acúmulo de massa fresca em frutos da mangueira Palmer considerando a estrutura de erros independentes e autorregressivos e os resultados dos avaliadores de qualidade de ajuste. As estimativas são condizentes com a realidade do acúmulo de massa fresca, conforme o estudo de Souza (2007).

Tabela 2: Estimativas dos parâmetros dos modelos ajustados aos dados de acúmulo de massa fresca considerando a estrutura de erros independentes e autorregressivos

Modelo	Estimativas				
	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	$\hat{\beta}_4$	$\hat{f}_1$
1. Logístico	489,6349	3,7474	0,0687	—	—
2. Logístico com quatro parâmetros	-67,2936	514,3236	50,8496	19,5927	—
3. Logístico AR(1)	492,1872	3,6642	0,0672	—	0,4989
4. Logístico com quatro parâmetros AR(1)	-65,1920	513,6862	50,9561	19,4737	0,1702

A Figura 1 apresenta os valores observados e a curva ajustada aos dados de acúmulo de massa fresca dos frutos de mangueira Palmer utilizando o modelo logístico com quatro parâmetros considerando a estrutura de erros autorregressivos AR(1).

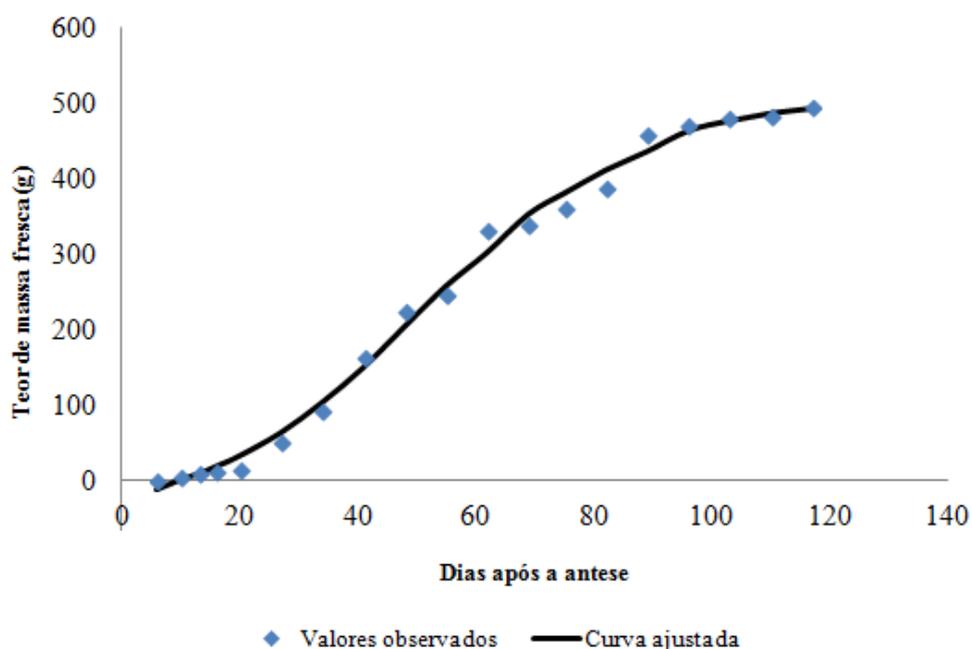


Figura 1: Valores observados e curva ajustada aos dados de massa fresca de frutos de mangueira Palmer utilizando o modelo logístico com quatro parâmetros AR(1).

## 4 Conclusão

O modelo logístico de quatro parâmetros com estrutura de erros autorregressivos de primeira ordem foi o mais adequado para descrever o acúmulo de massa fresca de frutos da mangueira Palmer segundo os resultados dos avaliadores de qualidade de ajuste. De acordo com o modelo ajustado, o fruto, totalmente desenvolvido, apresenta teor de massa fresca de 513,6862 gramas.

## Referências

- [1] FAO - Food and agriculture organization of the United Nations. Disponível em: <http://www.fao.org/>. Acesso em: 15 de janeiro de 2013.
- [2] LIMA NETO, F. P.; SANTOS, C.A.F.; COSTA, J.G. **Cultivo da mangueira**. Petrolina-PE: Embrapa Semiárido, 2010. (Embrapa Semiárido. Sistemas de Produção, 2, 2ª ed.). Disponível em: [http://sistemasdeproducao.cnptia.embrapa.br/FontesHTML/Manga/CultivodaMangueira\\_2ed/cultivares.htm/](http://sistemasdeproducao.cnptia.embrapa.br/FontesHTML/Manga/CultivodaMangueira_2ed/cultivares.htm/). Acesso em: 08 de abril de 2013.
- [3] MENDES, P. N.; MUNIZ, J. A.; SILVA, F. F.; MAZZINI, A. R. de A.; SILVA, N.A.M., Análise da curva de crescimento difásica de fêmeas Hereford por meio da função não linear de Gompertz, **Ciência Animal Brasileira**, v.10, n.2, p. 454-461, 2009.
- [4] MORAIS, P. L. D.; FILGUEIRAS, H. A. C.; PINHO, J.L.N.; ALVES, R.E. Correlação entre variáveis de crescimento do fruto da mangueira “Tommy Atkins”. **Ciência e Agrotecnologia**. Lavras. v. 28, n. 4, p. 743-747, 2004.
- [5] MOTULSKY, H.; CHRISTOPOULOS, A. **Fitting models to biological data using linear and nonlinear regression: a practical guide to curve fitting**. 4.ed. San Diego. CA: GraphPad Software, 2003. 351 p.
- [6] PRADO, T.K.L.; SAVIAN, T.V.; MUNIZ, J.A. Ajuste dos modelos Gompertz e logístico aos dados de crescimento de frutos de coqueiro anão verde. **Ciência e Agrotecnologia**. Lavras. v. 28, n. 4, p. 743-747, 2004.
- [7] SAS Institute Inc. **Statistical Analysis System user’s guide**. Version 9.1 ed. Cary: SAS Institute, USA, 2002.
- [8] SOUZA, F. V., **Curva de crescimento e exportação de nutrientes e sódio por frutos de mangueira Palmer, Haden e Tommy Atkins**. 2007. 54 p., Dissertação (Mestrado em Agronomia) - Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Ciências Agrárias e Veterinárias, Jaboticabal, 2007.