

PROBABILIDADE DO ALARME VERDADEIRO NO GRÁFICO DE CONTROLE CUSUM TABULAR

Rodrigo Luiz Pereira Lara¹, José Ivo Ribeiro Júnior²

Resumo: O presente trabalho teve por objetivo propor a distribuição normal para calcular as probabilidades dos alarmes verdadeiros provocadas pelo gráfico de controle CUSUM tabular para até 50 subgrupos racionais, em função de diferentes combinações entre o tamanho do subgrupo racional ($n \leq 16$), o intervalo de decisão ($1 \leq h^* \leq 10$) e o valor de referência ($0,25 \leq k^* \leq 1,5$) padronizados. Para isso, foram simulados dados de uma variável aleatória normal padronizada para um processo sob controle estatístico ($\mu_0 = 0$ e $\sigma_0 = 1$), com 1.000 simulações por subgrupo racional. Em seguida foram estabelecidos quatro processos fora de controle estatístico somente para a média em todos os subgrupos racionais ($\mu_1 = 0,5; 1; 2; \text{ e } 3$ e $\sigma_1 = 1$). De acordo com os resultados, a probabilidade do alarme verdadeiro (poder) possui relação direta com o tamanho e a ordem do subgrupo racional, e inversa com h^* para uma mesma diferença mínima pré-definida entre as médias μ_1 e μ_0 , e considerando-se a escolha de k^* como sendo a metade desta em número de desvios-padrão (δ). A probabilidade do alarme verdadeiro foi obtida por meio da distribuição normal de probabilidades ajustada à variável aleatória $Z(i) + S_H(i-1)^*$. Para conferi-la igual ou superior a 0,90, juntamente com uma probabilidade de alarme falso igual ou inferior a 0,05, recomendam-se $k^* = 1,5$ e $h^* = 1$, para $\delta \geq 3$; $k^* = 1$ e $h^* = 2$, para $\delta \geq 2$; $k^* = 0,5$ e $h^* = 4$, para $\delta \geq 1$ e $k^* = 0,25$ e $h^* = 7$, para $\delta \geq 0,5$.

Palavras-chave: Qualidade, monitoramento, simulação.

Abstract: *The present study aimed to propose the normal distribution to calculate the probabilities of true alarms caused by the CUSUM tabular control chart for up to 50 rational subgroups, due to different combinations between the size of the rational subgroup ($n \leq 16$), the standardized decision interval ($1 \leq h^* \leq 10$) and reference value ($0,25 \leq k^* \leq 1,5$). To estimate them, were simulated data from a standardized normal random variable for a process under statistical control ($\mu_0 = 0$ e $\sigma_0 = 1$) with 1,000 simulations per rational subgroup. Then, four processes out of statistical control were established only for the mean in all rational subgroups ($\mu_1 = 0,5; 1; 2; 3$ and $\sigma_1 = 1$). According to the results, the probability of the true alarm (power) is directly related to the size and order of the rational subgroup, and inverse with h^* for the same minimum predefined difference between the means and, and considering the choice of k^* as half of this in number of standard deviations (δ). The probability of the true alarm was obtained by means of the normal probability distribution adjusted to the random variable. To give it 0.90 or more, together with a false alarm probability of 0.05 or less, we recommend $k^* = 1.5$ and $h^* = 1$, for $\delta \geq 3$; $k^* = 1$ and $h^* = 2$, for $\delta \geq 2$; $k^* = 0.5$ and $h^* = 4$, for $\delta \geq 1$ and $k^* = 0.25$ and $h^* = 7$, for $\delta \geq 0.5$.*

Keywords: *Quality, monitoring, simulation.*

¹ DMAFE – IFSudeste MG. e-mail: rodrigo.lara@ifsudestemg.edu.br

² DET / CCE – UFV. e-mail: jivo@ufv.br

1. Introdução

Atualmente, a melhoria e o monitoramento da qualidade têm se tornado preocupações e necessidades para muitas organizações (MONTGOMERY; RUNGER, 2016). Dentro do contexto da qualidade total, o controle estatístico de processos (CEP) se refere a um conjunto de métodos usados com o objetivo de possibilitar a intervenção racional num sistema de produção a fim de conferir-lhe qualidade (WERKEMA, 1995; MUNIZ; OLIVEIRA, 2000).

Dentre os métodos que compõem o CEP, os gráficos de controle são os mais utilizados para o monitoramento da média e da variabilidade de diversas características avaliadas. Esses gráficos atuam com base em subgrupos racionais retirados em intervalos de tempos regulares. De acordo com Montgomery (2016), os gráficos de controle são métodos comprovados para a melhoria da produtividade, são efetivos na prevenção de defeitos, previnem ajustes desnecessários no processo, fornecem informações confiáveis para o diagnóstico do desempenho e para a capacidade de processos.

Como existem diferentes tipos de gráficos de controle com o mesmo objetivo, é importante conhecer o desempenho e a rapidez com que cada um deles detecta alterações no processo. A análise da relação entre os custos de amostragem e as interferências no processo devem nortear a escolha do tamanho dos subgrupos racionais, do intervalo de tempo entre eles, do tipo e dos valores dos termos utilizados na construção dos gráficos de controle, como também no posicionamento dos limites de controle (COSTA *et al.*, 2004). Avaliando cuidadosamente a escolha dos valores desses termos no momento da construção de um gráfico de controle, outros fatores também estarão sendo considerados, como a minimização dos alarmes falsos e a maximização dos verdadeiros.

Reconhecido por Van Rij *et al.* (1995, *apud* COLQUHOUN, 2008) como instrumento de pesquisa de ampla análise, o gráfico de controle das somas acumuladas (CUSUM, *Cumulative Sum*) possui a vantagem de poder ser relativamente sensível a pequenas mudanças no processo. Inicialmente proposto por Page (1954), ele incorpora as informações de uma sequência de observações amostrais plotando as somas acumuladas dos seus desvios em relação a um valor-alvo. Os termos requeridos para a sua construção, além do número de subgrupos racionais e de repetições, são: valor de referência (k^*) e intervalo de decisão (h^*) padronizados.

Vários trabalhos como os de Page (1954), Brook e Evans (1972), Lucas e Crosier (1982a, 1982b), Hawkins (1987), King (1995), Alves e Samohyl (2004), Vargas *et al.* (2004), Souza *et al.* (2008), Montgomery (2016), Mukherjee *et al.* (2019) e Werner *et al.* (2019), já apresentaram o desempenho do gráfico de controle CUSUM em relação às probabilidades dos alarmes falsos e verdadeiros. No entanto, ainda não existem informações para a escolha da quantidade de subgrupos racionais e se a distribuição normal pode ser utilizada nos cálculos dessas probabilidades.

2. Metodologia

2.1 Simulação dos Dados

Para um processo sob controle estatístico, foram simulados no software Microsoft Excel 2003 dados de uma variável aleatória Y padronizada, sob distribuição normal com média $\mu_0 = 0$ e desvio-padrão $\sigma_0 = 1$ para até 50 subgrupos racionais com até 16 repetições ($1 \leq n \leq 16$, para $n \in \mathbb{N}$), em que um determinado subgrupo racional foi especificado pelo índice i ($1 \leq i \leq 50$, para $i \in \mathbb{N}$) e uma determinada repetição pelo índice j ($1 \leq j \leq n$, para $j \in \mathbb{N}$). No total, foram realizadas 1.000 simulações ($1 \leq s \leq 1000$, para $s \in \mathbb{N}$) por subgrupo

racional. É importante ressaltar que na prática são utilizados geralmente 25 subgrupos racionais. Portanto, foi adotado o dobro para que o estudo pudesse ser realizado com maior precisão. Já o maior número de repetições foi escolhido para atender com folga as recomendações mais utilizadas que, normalmente, vão até dez.

Em seguida desenvolveu-se um aplicativo na linguagem de programação C++, em que foram estabelecidos quatro processos fora de controle estatístico somente para a média e em todos os subgrupos racionais, como segue:

$$\mu_{\delta} = \mu_0 + \delta\sigma_0, \text{ para valores de } \delta \text{ iguais a } \frac{1}{2}, 1, 2 \text{ e } 3, \text{ em que:} \quad (1)$$

$$\mu_{1/2} = \mu_0 + \frac{1}{2}\sigma_0;$$

$$\mu_1 = \mu_0 + 1\sigma_0;$$

$$\mu_2 = \mu_0 + 2\sigma_0; \text{ e}$$

$$\mu_3 = \mu_0 + 3\sigma_0.$$

Esses quatro processos fora de controle estatístico com média μ_{δ} e desvio-padrão σ_0 foram obtidos pela soma de cada valor simulado por $\delta\sigma_0$, como segue:

$$y_{ijs} + \delta\sigma_0, \text{ para } s = 1, 2, \dots, 1.000, \text{ em que:}$$

$$i = 1, 2, \dots, 50 \text{ e } j = 1, 2, \dots, n \text{ (} 1 \leq n \leq 16 \text{)}.$$

Os valores de δ foram escolhidos a partir dos estudos previamente realizados por Souza *et al.* (2008), visando comparar as eficiências dos gráficos de controle CUSUM com a utilização do procedimento tabular, Shewhart e EWMA. Tais valores estão relacionados a uma gradação de pequena a grande diferença entre as médias consideradas como fora e sob controle que o gráfico de controle CUSUM tabular consegue detectar, em números de desvios-padrão.

Para os quatro processos fora de controle estatístico foram estabelecidos 40 gráficos de controle CUSUM tabular padronizado em função das combinações entre os valores k^* e h^* , definidos a seguir:

$$k^* = \frac{\delta}{2} (0,25; 0,5; 1; \text{ e } 1,5); \text{ e} \quad (2)$$

$$h^* = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \text{ e } 10. \quad (3)$$

No total, foram construídos $4 \times 10 \times 16 \times 1.000 = 640.000$ gráficos de controle CUSUM tabular para os processos fora de controle. O valor k^* apresentado na Equação 2 é o valor padronizado de K (valor de referência). Esse valor k^* é usualmente escolhido a meio caminho entre a média de controle μ_0 e a média fora de controle μ_1 , cuja mudança da média é expressa em unidades de desvio-padrão (Equação 1). Assim, para os valores de δ iguais a 0,5; 1; 2; e 3, têm-se os respectivos valores de k^* : 0,25; 0,5; 1; e 1,5.

2.2 Probabilidade do Alarme Verdadeiro

Considerando-se que o processo esteja fora de controle desde o primeiro subgrupo racional, conforme ocorreu na simulação de dados, então o seu número foi substituído pelo próprio contador. É claro que o processo poderá sair de controle a qualquer momento (não necessariamente no primeiro subgrupo racional). O importante é que a partir desse momento, o gráfico CUSUM tabular começará a registrar a saída de controle.

Para determinar a probabilidade do alarme verdadeiro ou o poder (Pd) do gráfico de controle CUSUM tabular em cada subgrupo racional, separadamente, foram anotadas as estimativas \bar{y}_{is}' de $Y_{is} \sim N(\mu_1 = \delta, \sigma_0 = 1)$ para $i = 1, 2, \dots, 50$ e $s = 1, 2, \dots, 1.000$, que estavam associadas aos seguintes casos:

$s_H(i)^* \geq h^*$ ou $s_L(i)^* \geq h^*$, para o respectivo z_{is} , em que:

$$s_H(i)^* = \text{máx.} [0, z_{is} - k^* + s_H(i-1)^*]; \quad (4)$$

$$s_L(i)^* = \text{máx.} [0, -z_{is} - k^* + s_L(i-1)^*];$$

$$z_{is} = \frac{\bar{y}_{is}' - \mu_0}{\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}}; \text{ e}$$

\bar{y}_{is}' é a média dos valores do subgrupo racional i para a simulação s fora de controle estatístico. Em particular, para o subgrupo racional de tamanho $n = 1$, tem-se $\bar{y}_{is}' = y_{is}'$, sendo:

$$\bar{y}_{is}' = \frac{\sum_{j=1}^n y_{ijs}'}{n}, \text{ para } 1 \leq n \leq 16 \text{ e } y_{ijs}' = y_{ijs} + \delta\sigma_0 = y_{ijs} + \delta.$$

2.2.1 Observada

De acordo com um aplicativo desenvolvido em C++, o poder observado de acordo com os dados simulados foi obtido por:

$$Pd_{OBS(i)} = \frac{NPFC_i}{1.000} = \frac{1}{1.000} \sum_{s=1}^{1.000} I_{is}, \text{ para } \delta > 0, \text{ em que:} \quad (5)$$

$NPFC_i$ = número de pontos fora de controle no subgrupo racional i ;

$$I_{is} = \begin{cases} 0 & \text{se } s_H(i)^* < h^* \text{ e } s_L(i)^* < h^* \text{ para o respectivo } z_{is}; \text{ e} \\ 1 & \text{se } s_H(i)^* \geq h^* \text{ ou } s_L(i)^* \geq h^* \text{ para o respectivo } z_{is}. \end{cases}$$

em que:

$s_H(i)^*$ = valor observado da CUSUM unilateral superior padronizada no subgrupo racional i ;

e

$s_L(i)^*$ = valor observado da CUSUM unilateral inferior padronizada no subgrupo racional i .

2.2.2 Estimada

Para verificar o efeito dos termos do gráfico de controle CUSUM tabular que podem ser modificados, ou seja, k^* , h^* , n e i , foi realizada uma análise de regressão com base nos poderes observados. O maior modelo de regressão adotado foi do tipo:

$$Pd_{REG} = \beta_0 + \beta_1 h^* + \beta_2 n + \beta_3 i + \beta_4 h^* n + \beta_5 h^* i + \beta_6 n i + \varepsilon \quad (6)$$

para $1 \leq h^* \leq 10$; $1 \leq n \leq 16$ e $1 \leq i \leq 50$, em que:

h^* : intervalo de decisão padronizado do gráfico de controle CUSUM tabular;

n : tamanho do subgrupo racional; e

i : ordem do subgrupo racional.

Para selecionar a melhor equação de regressão ajustada aos poderes observados, foram retirados os coeficientes de regressão não significativos, um de cada vez e começando pelos mais complexos de interpretação (interações), de acordo com o teste t de Student ao nível de 5% de significância.

A equação de regressão ajustada e o teste t de Student que verificou a significância dos efeitos principais e das interações duplas, foram realizados no software Minitab 16. De posse dela obteve-se, portanto, o poder estimado pela regressão (\widehat{Pd}_{REG}).

2.2.3 Calculada

Supondo que o processo esteja fora de controle, os valores observados podem ser representados pela variável aleatória $Y_\delta \sim N(\mu_0 + \delta\sigma_0; \sigma_0)$ e, conseqüentemente, por $Z_\delta \sim N(\delta; \sigma_0)$.

Para o primeiro subgrupo racional, tem-se:

$$s_H(1)^* = \text{máx. } [0, z_1 - k^* + s_H(0)^*], \text{ onde } k^* = \frac{\delta}{2}.$$

Daí o valor esperado para $S_H(1)^*$ pode ser escrito como:

$$E[S_H(1)^*] = E[Z_1 - k^* + S_H(0)^*] = E[Z_1] - k^* + S_H(0)^* = \delta - k^* + 0 = k^*.$$

Em seguida, para o segundo subgrupo racional, tem-se:

$$s_H(2)^* = \text{máx. } [0, z_2 - k^* + s_H(1)^*]$$

E o seu valor esperado é:

$$E[S_H(2)^*] = E[Z_2 - k^* + S_H(1)^*] = E[Z_2] - k^* + S_H(1)^* = \delta - k^* + k^* = 2k^*.$$

Para o terceiro subgrupo racional:

$$s_H(3)^* = \text{máx. } [0, z_3 - k^* + s_H(2)^*]; \text{ e}$$

$$E[S_H(3)^*] = E[Z_3 - k^* + S_H(2)^*] = E[Z_3] - k^* + S_H(2)^* = \delta - k^* + 2k^* = 3k^*.$$

De forma geral, pode-se ver que:

$$E[S_H(i)^*] = ik^*, \text{ para } k^* = \frac{\delta}{2} \text{ e } \delta > 0. \quad (7)$$

Portanto, para o gráfico de controle CUSUM tabular pode-se definir o seu Pd por:

$$Pd_i = P(S_H(i)^* \geq h^* - \delta\sqrt{n}) + P(S_L(i)^* \geq h^* - \delta\sqrt{n}), \quad (8)$$

para $\delta \neq 0$ ($\mu_i = \delta\sqrt{n}$), em que:

$S_H(i)^*$ = variável aleatória da CUSUM unilateral superior padronizada no subgrupo racional i ; e

$S_L(i)^*$ = variável aleatória da CUSUM unilateral inferior padronizada no subgrupo racional i .

Logo,

$$Pd_i = P(Z_i - k^* + S_H(i-1) \geq h^* - \delta\sqrt{n}) + P(-Z_i - k^* + S_H(i-1) \geq h^* - \delta\sqrt{n}) \quad (9)$$

$$= P(Z_i + S_H(i-1) \geq h^* + k^* - \delta\sqrt{n}) + P(-Z_i + S_L(i-1) \geq h^* + k^* - \delta\sqrt{n}).$$

Entretanto, ao supor $\delta \neq 0$, segue que o processo se desloca ou para cima da média de controle ($\delta > 0$) ou para baixo da média de controle ($\delta < 0$). Então, a probabilidade de alarme verdadeiro definida pela Equação 8 pode ser reescrita como:

$$Pd_i = P(S_H(i)^* \geq h^* - \delta\sqrt{n}), \text{ para } \delta > 0; \text{ e} \quad (10)$$

$$Pd_i = P(S_L(i)^* \geq h^* - \delta\sqrt{n}), \text{ para } \delta < 0.$$

Assim, finalizando o desenvolvimento de Pd_i para $\delta > 0$ chega-se que:

$$Pd_i = P(Z_i + S_H(i-1)^* \geq h^* + k^* - \delta\sqrt{n}), \text{ para } \delta > 0. \quad (11)$$

A partir da Equação 11, o poder calculado, para $\delta > 0$, é obtido por:

$$Pd_i = 1 - P(Z_i + S_H(i-1) \leq h^* + k^* - \delta\sqrt{n})$$

$$= 1 - F(h^* + k^* - \delta\sqrt{n}).$$

Desse modo, ajustou-se pelo software EasyFit 5.5 a distribuição normal a fim de obter o poder calculado ($Pd_{N(i)}$), como segue:

$$Pd_{N(i)} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{(k^* + h^* - \delta\sqrt{n}) - \mu_i}{\sigma_i}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \text{ para } \delta > 0. \quad (12)$$

Assim como feito para a probabilidade do alarme falso (LARA; RIBEIRO JÚNIOR, 2016), realizou-se aqui uma análise de regressão para o poder de modo a obter uma equação de regressão ajustada para cada um dos parâmetros previamente obtidos em função da ordem i do subgrupo racional. Uma vez estimados os parâmetros (μ e σ), obtiveram-se as seguintes estimativas das probabilidades calculadas:

$$\widehat{Pd}_{N(i)} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{(k^* + h^* - \delta\sqrt{n}) - \widehat{\mu}_i}{\widehat{\sigma}_i}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad \text{para } \delta > 0. \quad (13)$$

As estimativas de μ e σ foram obtidas por meio da regressão linear simples em que a ordem do subgrupo racional foi a variável independente, conforme os seguintes modelos:

$$\mu = \beta_0 + \beta_1 i + \varepsilon; \quad (14)$$

$$\sigma = \beta_0 + \beta_1 i + \varepsilon. \quad (15)$$

Para verificar o ajuste à distribuição normal, foi aplicado o teste de Kolmogorov-Smirnov a 5% de significância em cada subgrupo racional i . As estimativas das probabilidades calculadas foram obtidas com os auxílios do Minitab 16 e Microsoft Excel 2003. Para plotar as distribuições ajustadas de $Z(i) + S_H(i-1)^*$ foi utilizado o Minitab 16. Para a plotagem dos diversos gráficos referentes aos poderes, estimativas dos parâmetros das distribuições normais ajustadas e p-valores, sendo que, todos eles em função da ordem do subgrupo racional, foi utilizado o Microsoft Excel 2003.

3. Resultados e Discussão

3.1 Probabilidades Observada e Estimada

A probabilidade do alarme verdadeiro (Pd) para o monitoramento da média pelo gráfico de controle CUSUM tabular, depende ($P < 0,05$) do intervalo de decisão padronizado h^* , do número de repetições n por subgrupo racional e da ordem i do subgrupo racional. Depende também de todas as interações duplas entre estes termos (h^*n , h^*i e ni). Apesar de o Pd também ser influenciado pelo k^* (SOUZA *et al.*, 2008), tal dependência não foi estudada no presente trabalho, dada à estratégia de utilizar $k^* = \delta/2$ para detectar o descontrole de, no mínimo, δ desvios-padrão da média de controle (Tabela 3.1).

Tabela 3.1 - Poder estimado pela regressão (\widehat{Pd}_{REG}) em função de h^* , n e i , para $\delta = 0,5; 1; 2; 3$ e, conseqüentemente, $k^* = 0,25; 0,5; 1; 1,5$.

δ	$k^* = \frac{\delta}{2}$	Equação de regressão
0,5	0,25	$0,772 - 0,0838 h^* + 0,0220 n + 0,00805i + 0,00245 h^*n$ $+ 0,00160 h^*i - 0,000767 ni$ ($R^2 = 0,53$)
1	0,5	$0,854 - 0,0513 h^* + 0,0185 n + 0,0073i + 0,00142 h^*n$ $+ 0,00109 h^*i - 0,000701 ni$ ($R^2 = 0,34$)
2	1	$0,0955 - 0,0288 h^* + 0,00867 n + 0,00205i + 0,000574 h^*n$ $+ 0,000689 h^*i - 0,000335 ni$ ($R^2 = 0,18$)
3	1,5	$0,994 - 0,0220 h^* + 0,00425 n + 0,000531i + 0,000275 h^*n$ $+ 0,000572 h^*i - 0,000165 ni$ ($R^2 = 0,13$)

$1 \leq h^* \leq 10; 1 \leq n \leq 16$ e $1 \leq i \leq 50$.

h^* : intervalo de decisão padronizado.

n : tamanho do subgrupo racional.

i : ordem do subgrupo racional.

Pela análise das equações ajustadas de regressão, pode-se observar que os coeficientes de n e i são positivos, ou seja, os aumentos dos seus valores acarretam aumento do poder do gráfico de controle CUSUM tabular em detectar descontrolo no processo. Por outro lado, o coeficiente do termo h^* é negativo, isto é, quanto maior o seu valor, menor será a probabilidade de obter um alarme verdadeiro (Tabela 3.1).

A interação ni possui efeito negativo, ao contrário dos efeitos principais individuais que compõem as equações. Os aumentos de n e i , separadamente, aumentam a probabilidade do alarme verdadeiro. Entretanto, esse aumento não será indefinido, ou seja, a partir de certas combinações o poder será constante e igual a um.

Analisando as interações h^*n e h^*i , nota-se que ambas possuem efeitos positivos, ao contrário do termo h^* que as compõem. Portanto, o efeito da interação é mais evidente para valores baixos de h^* . Para h^*i , por exemplo, o crescimento do poder quando se aumenta a ordem i do subgrupo racional é mais acentuado para os valores baixos de h^* do que para os altos.

Na Figura 3.1 é exibido o poder observado (Pd_{OBS}) em função dos dados simulados, para os valores de n iguais a 1, 5 e 10, de acordo com os valores de k^* iguais a 0,25; 0,5; 1; e 1,5, $1 \leq h^* \leq 10$ e $1 \leq i \leq 15$. Nela é possível visualizar os efeitos principais e das interações mencionadas.

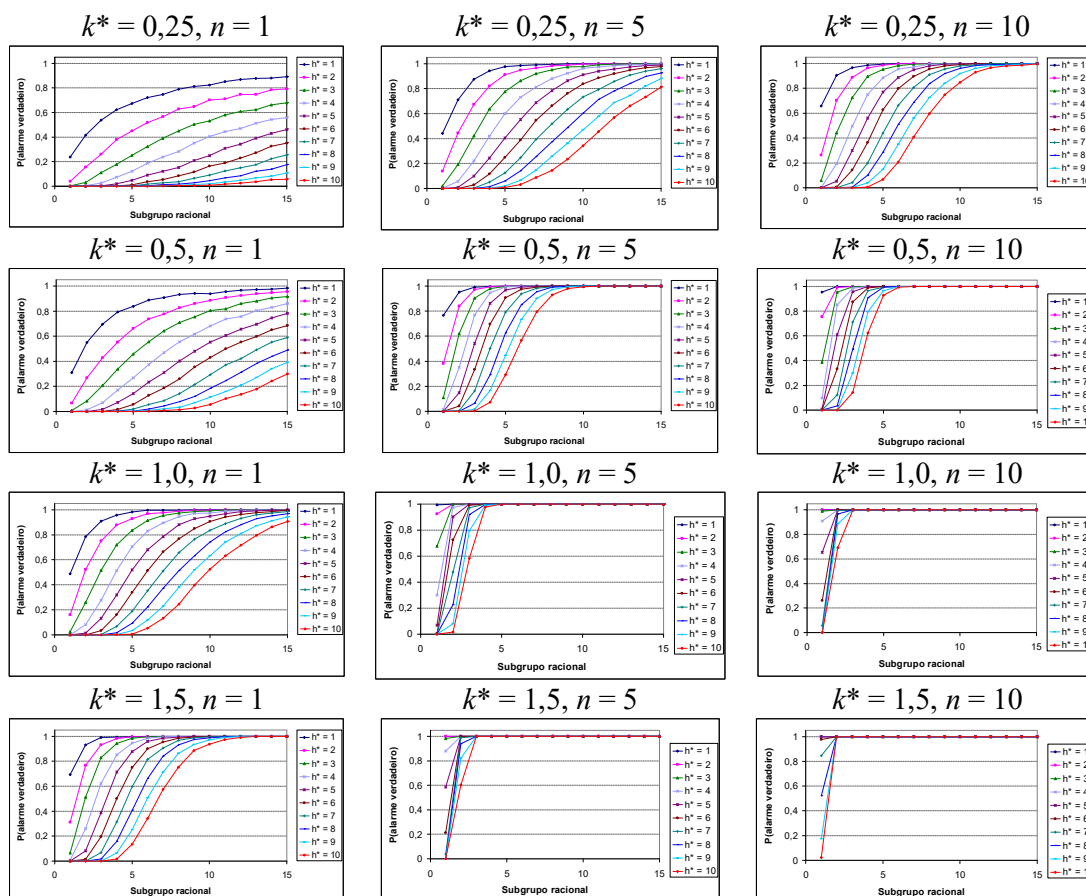


Figura 3.1 - Poder observado em função do subgrupo racional, para diferentes combinações entre k^* , h^* e n .

As estimativas do Pd obtidas no presente trabalho respondem coerentemente de acordo com os efeitos dos termos $k^* = \delta/2$, h^* , n e i , apresentados na Equação 11. O efeito de i é positivo porque o seu aumento incorpora um aumento na média da distribuição de $S_H(i)^*$,

dado $\delta > 0$ (Equação 7). Do mesmo modo o de n , porque o seu aumento diminui a dispersão dessa distribuição e, conseqüentemente, a sua sobreposição com a distribuição da média de controle. Já a diminuição de h^* aumenta o poder, simplesmente, porque diminui o intervalo de controle.

Porém, de todos os termos, o valor k^* é o mais importante em proporcionar probabilidades baixas ou altas do alarme verdadeiro. Como ele está diretamente relacionado ao valor $S_H(i)^*$ (Equação 4) que é plotado no gráfico, o seu aumento dificulta a ocorrência de $S_H(i)^* > 0$ e, conseqüentemente, o acúmulo dos anteriores e futura detecção do descontrole. Portanto, se o objetivo é de detectar grandes diferenças na média de controle, adotam-se altos valores de k^* . Caso contrário, os valores recomendados de $k^* = \delta/2$ devem ser menores.

Os poderes observados que geraram os gráficos da Figura 3.1, podem ser acessados em Lara (2012) no Anexo B. E no Anexo F, disponível em Lara (2012), são mostrados todos os gráficos obtidos para os poderes observados para os valores de k^* iguais a 0,25; 0,5; 1; e 1,5; $1 \leq h^* \leq 10$, $1 \leq i \leq 50$ e $1 \leq n \leq 16$ ($h^*, i, n \in \mathbb{N}$).

3.2 Probabilidades Observada e Calculada

Na Figura 3.2 são apresentados os p-valores obtidos pelo teste de Kolmogorov-Smirnov para o ajuste da variável aleatória $Z(i) + S_H(i-1)^*$ à distribuição normal, dado $\delta = 2k^*$.

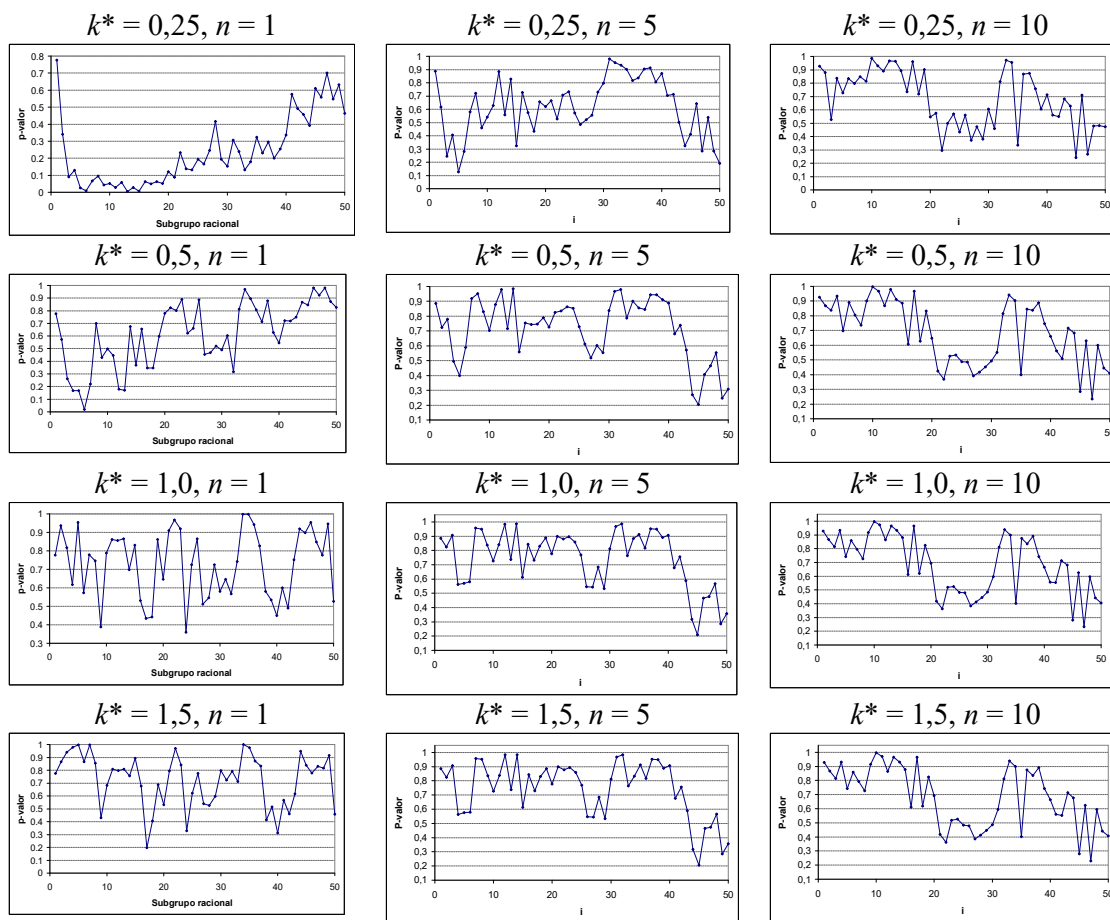


Figura 3.2 - P-valores do teste de Kolmogorov-Smirnov referentes aos ajustes da variável aleatória $Z(i) + S_H(i-1)^*$ à distribuição normal.

Como se pode observar, a grande maioria das distribuições normais ajustadas aos subgrupos racionais de 1 a 50 foram adequadas para modelarem os valores aleatórios de $Z(i) + S_H(i-1)^*$. Embora alguns deles não tenham ajustado satisfatoriamente, tais exceções foram desconsideradas e, mesmo assim, estudadas sob a distribuição normal.

Na Figura 3.3 são mostrados os ajustes da variável aleatória $Z(i) + S_H(i-1)^*$ para os subgrupos racionais de ordens 1, 25 e 50. Em concordância com os p-valores obtidos e apresentados na Figura 3.2, a variável aleatória $Z(i) + S_H(i-1)^*$ segue distribuição normal para todos os valores de k^* , sendo assim ajustada por essa distribuição em todos os cinquenta subgrupos racionais. Nota-se ainda que, à medida que se aumenta n , k^* e i , há um afastamento em relação à distribuição inicial $Z(1) + S_H(0)^* = Z(1)$.

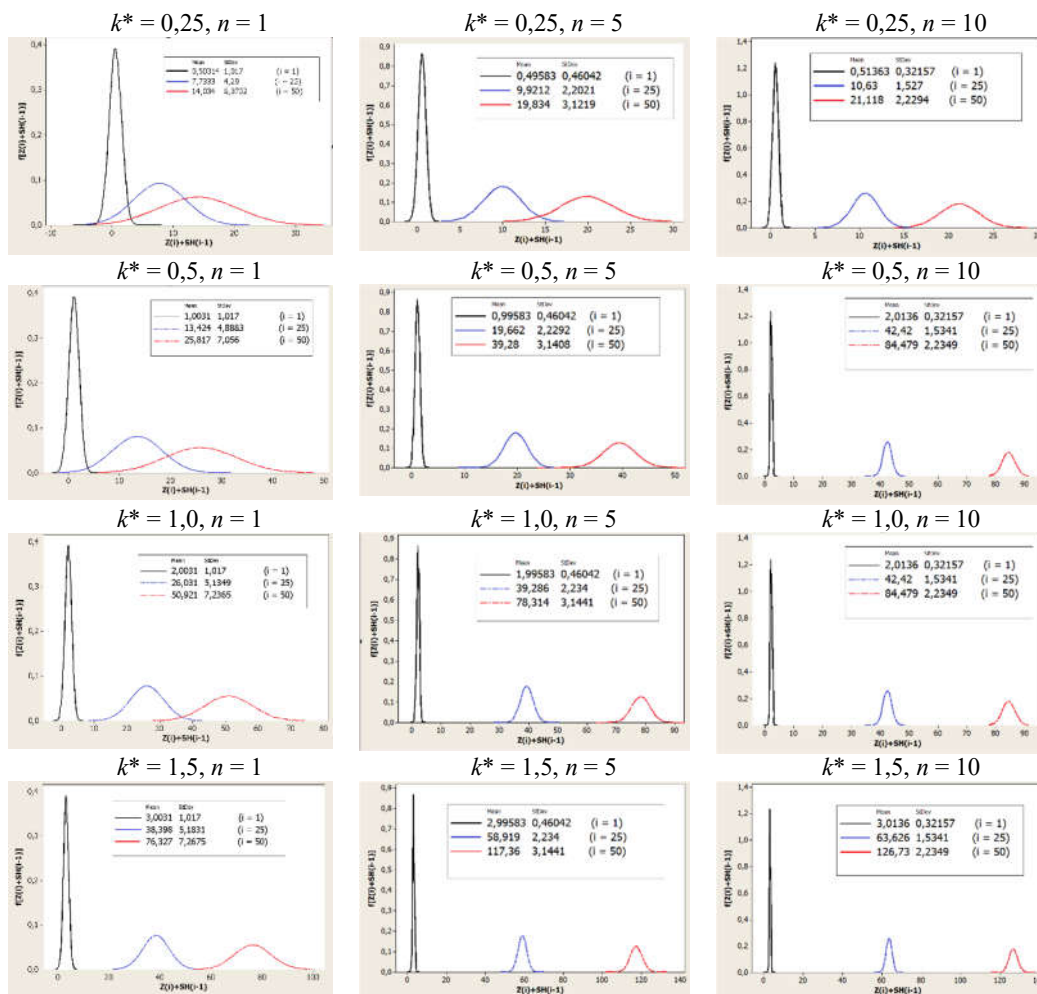


Figura 3.3 - Ajuste de $Z(i) + S_H(i-1)^*$ nos subgrupos racionais de ordens 1, 25 e 50 pela distribuição normal (Mean = média μ , StDev = desvio-padrão σ).

Em Lara (2012), Anexo D, é mostrado cada um dos parâmetros estimados da distribuição normal para os valores de k^* iguais a 0,25; 0,5; 1; e 1,5 em cada um dos cinquenta subgrupos racionais. A partir desses dados, foi obtida uma equação de regressão ajustada aos parâmetros μ e σ (Tabela 3.2).

Tabela 3.2 - Estimativas dos parâmetros da distribuição normal em função de i ($1 \leq i \leq 50$).

n	k^*	Equação de regressão	R^2
1	0,25	$\hat{\mu} = 1,0106 + 0,2628li$, para $1 \leq i \leq 50$	0,99
		$\hat{\sigma} = 0,9363 + 0,1534i$, para $1 \leq i \leq 17,7$ e $\hat{\sigma} = 2,1335 + 0,0859i$, para $17,7 < i \leq 50$	0,99
	0,5	$\hat{\mu} = 0,9596 + 0,4966i$, para $1 \leq i \leq 50$	0,99
		$\hat{\sigma} = 0,928 + 0,1861i$, para $1 \leq i \leq 16,8$ e $\hat{\sigma} = 2,447 + 0,0958i$, para $16,8 < i \leq 50$	0,99
	1	$\hat{\mu} = 1,1849 + 0,9932i$, para $1 \leq i \leq 50$	0,99
		$\hat{\sigma} = 1,0352 + 0,1979i$, para $1 \leq i \leq 17,0$ e $\hat{\sigma} = 2,8930 + 0,0885i$, para $17,0 < i \leq 50$	0,99
1,5	$\hat{\mu} = 1,6039 + 1,4928i$, para $1 \leq i \leq 50$	0,99	
	$\hat{\sigma} = 1,079 + 0,2014i$, para $1 \leq i \leq 16,6$ e $\hat{\sigma} = 2,9606 + 0,0877i$, para $16,6 < i \leq 50$	0,99	
5	0,25	$\hat{\mu} = 0,1814 + 0,3907i$, para $1 \leq i \leq 50$	0,99
		$\hat{\sigma} = 0,469 + 0,0842i$, para $1 \leq i \leq 15,3$ e $\hat{\sigma} = 1,094 + 0,0433i$, para $15,3 < i \leq 50$	0,99
	0,5	$\hat{\mu} = 0,2298 + 0,7784i$, para $1 \leq i \leq 50$	0,99
		$\hat{\sigma} = 0,513 + 0,0844i$, para $1 \leq i \leq 15,0$ e $\hat{\sigma} = 1,135 + 0,0428i$, para $15,0 < i \leq 50$	0,99
	1	$\hat{\mu} = 0,4455 + 1,5548i$, para $1 \leq i \leq 50$	0,99
		$\hat{\sigma} = 0,520 + 0,0845i$, para $1 \leq i \leq 14,9$ e $\hat{\sigma} = 1,143 + 0,0427i$, para $14,9 < i \leq 50$	0,99
1,5	$\hat{\mu} = 0,6686 + 2,3312i$, para $1 \leq i \leq 50$	0,99	
	$\hat{\sigma} = 0,520 + 0,0845i$, para $1 \leq i \leq 14,9$ e $\hat{\sigma} = 1,143 + 0,0427i$, para $14,9 < i \leq 50$	0,99	
10	0,25	$\hat{\mu} = 0,1002 + 0,4209i$, para $1 \leq i \leq 50$	0,99
		$\hat{\sigma} = 0,343 + 0,0633i$, para $1 \leq i \leq 12,8$ e $\hat{\sigma} = 0,759 + 0,0308i$, para $12,8 < i \leq 50$	0,99
	0,5	$\hat{\mu} = 0,1644 + 0,8418i$, para $1 \leq i \leq 50$	0,99
		$\hat{\sigma} = 0,358 + 0,0630i$, para $1 \leq i \leq 12,8$ e $\hat{\sigma} = 0,770 + 0,0307i$, para $12,8 < i \leq 50$	0,99
	1	$\hat{\mu} = 0,3221 + 1,6837i$, para $1 \leq i \leq 50$	0,99
		$\hat{\sigma} = 0,358 + 0,0630i$, para $1 \leq i \leq 12,7$ e $\hat{\sigma} = 0,769 + 0,0307i$, para $12,7 < i \leq 50$	0,99
1,5	$\hat{\mu} = 0,4802 + 2,5256i$, para $1 \leq i \leq 50$	0,99	
	$\hat{\sigma} = 0,358 + 0,0630i$, para $1 \leq i \leq 12,7$ e $\hat{\sigma} = 0,769 + 0,0307i$, para $12,7 < i \leq 50$	0,99	

i : ordem do subgrupo racional.

Na Figura 3.4 são ilustradas as equações de regressão ajustadas aos parâmetros da distribuição normal, μ e σ , para n iguais a 1, 5 e 10 (Tabela 3.2). Para o parâmetro σ , optou-se por realizar uma regressão linear bissegmentada devido à mudança de comportamento linear ocorrida em torno dos subgrupos racionais de ordem 17, 15 e 13 para os respectivos n iguais a 1, 5 e 10.

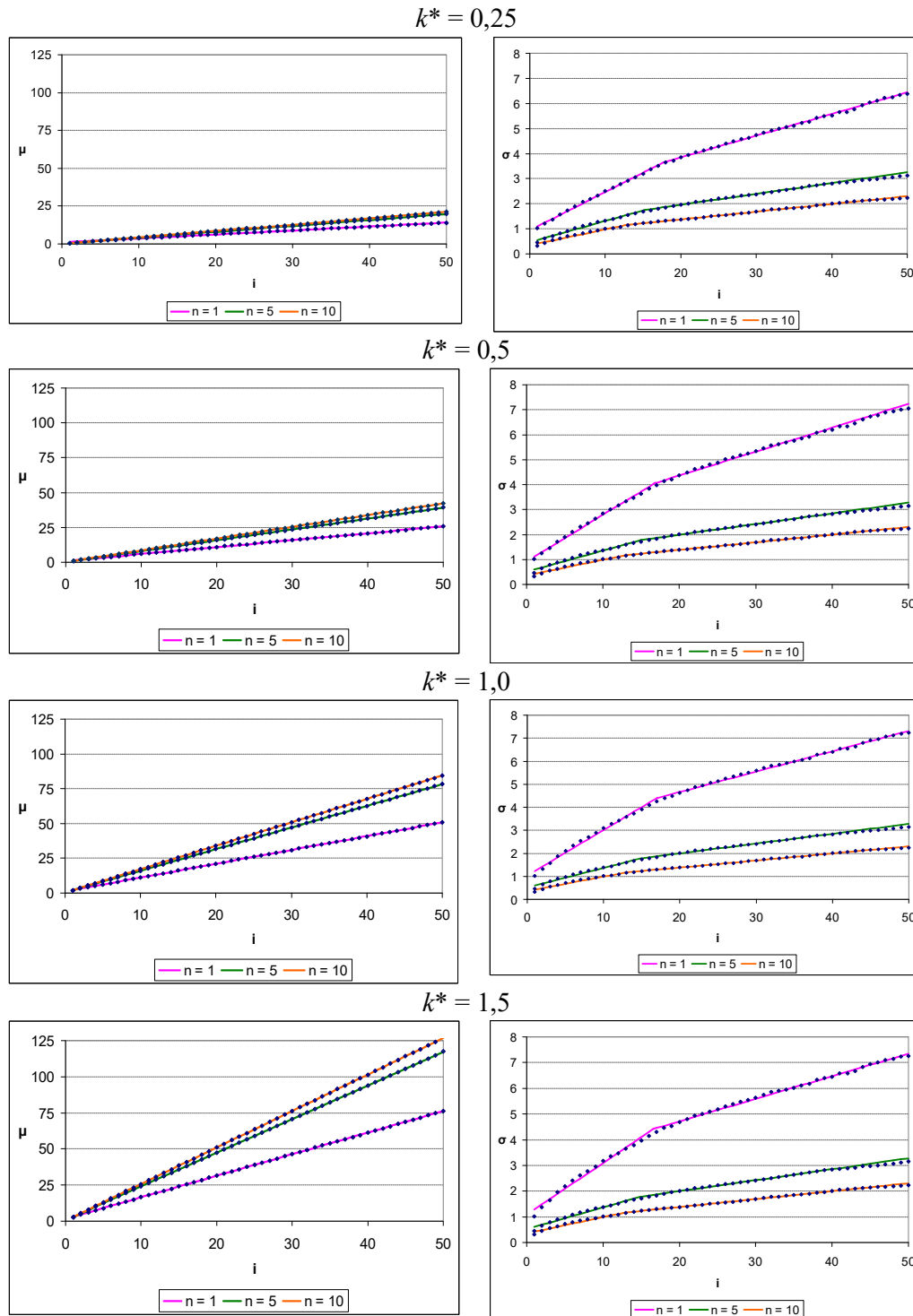


Figura 3.4 - Estimativas dos parâmetros da distribuição normal para n igual a 1, 5 e 10.

Pode-se observar, também, que os termos $\delta = k^*/2$ e n influenciam positivamente no parâmetro μ enquanto que somente o termo n influencia negativamente no parâmetro σ . O aumento do k^* aumenta o μ , porque os maiores valores de k^* estão associados aos maiores descontroles (δ) do processo (Tabela 3.2).

Na Figura 3.5 são apresentadas as probabilidades calculadas pela distribuição normal e as observadas (Figura 3.1), para $k^* = 0,25$, $h^* = 8$ e $n = 1, 5$ e 10 .

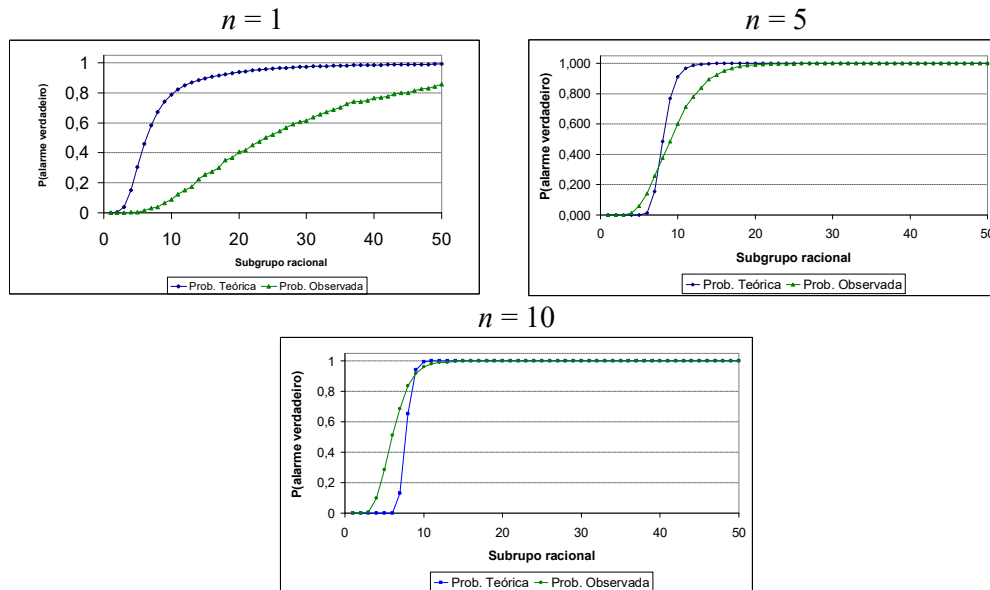


Figura 3.5 - Probabilidades calculada e observada do alarme verdadeiro em função do subgrupo racional i ($1 \leq i \leq 50$), para $k^* = 0,25$, $h^* = 8$ e $n = 1, 5$ e 10

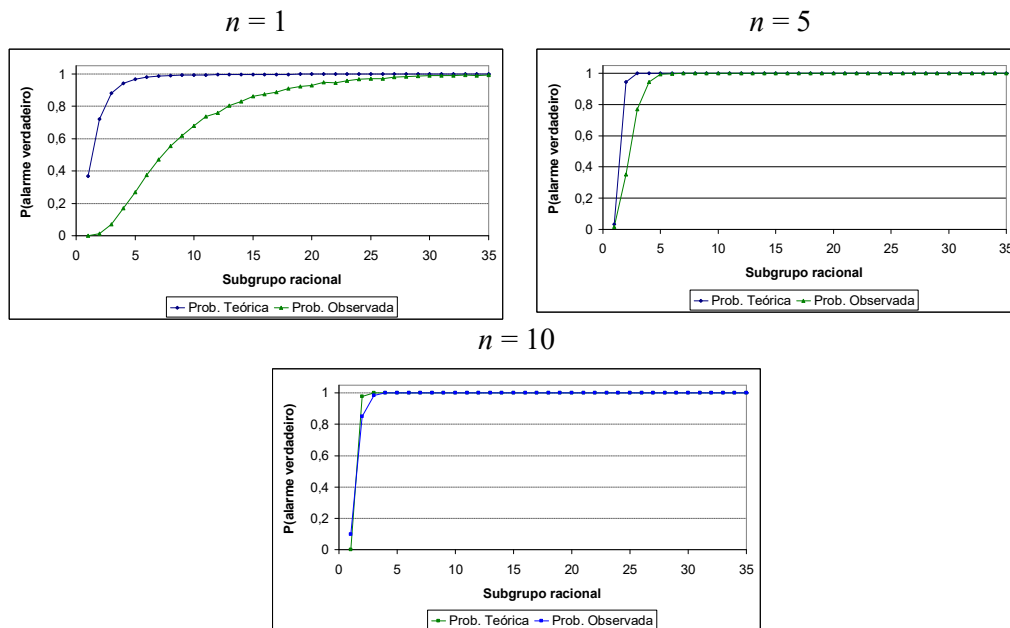


Figura 3.6 Probabilidades calculada e observada do alarme verdadeiro em função do subgrupo racional i ($1 \leq i \leq 50$), para $k^* = 0,5$, $h^* = 4$ e $n = 1, 5$ e 10

Pela Figura 3.5, pode-se observar que à medida que o n aumenta, aumenta-se a proximidade da probabilidade calculada à observada. Somente para $n = 1$ é que esse ajuste não foi satisfatório.

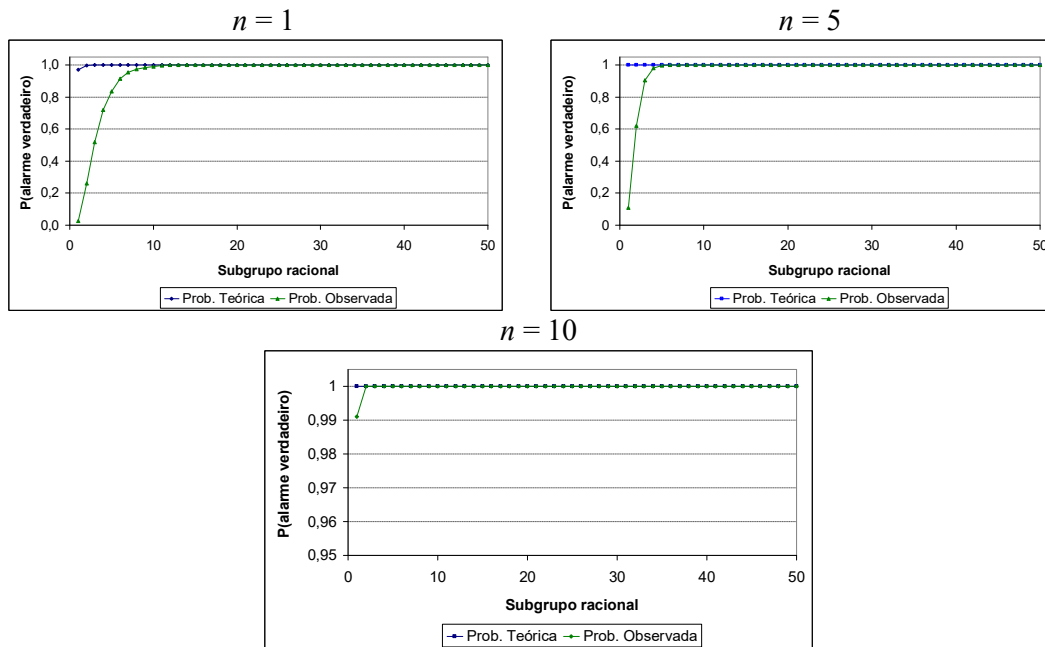


Figura 3.7 - Probabilidades calculada e observada do alarme verdadeiro em função do subgrupo racional i ($1 \leq i \leq 50$), para $k^* = 1,0$, $h^* = 3$ e $n = 1, 5$ e 10

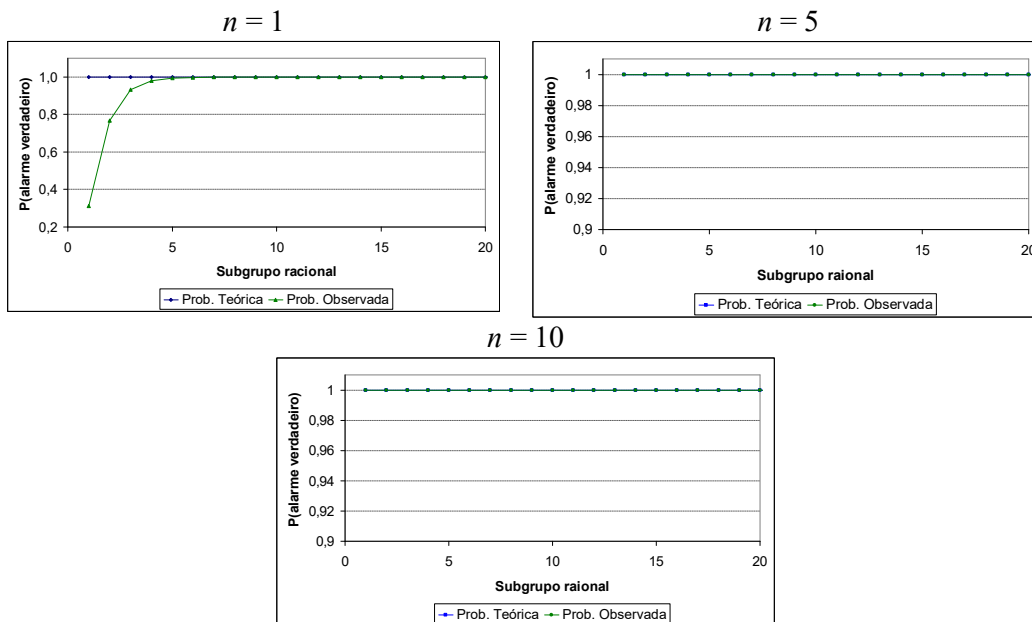


Figura 3.8 - Probabilidades calculada e observada do alarme verdadeiro em função do subgrupo racional i ($1 \leq i \leq 50$), para $k^* = 1,5$, $h^* = 2$ e $n = 1, 5$ e 10

Nas Figuras 3,6, 3.7 e 3.8 são também mostrados, para $k^* = 0,5; 1; \text{ e } 1,5$, respectivamente, os ajustes pela distribuição normal (probabilidade calculada) em diferentes valores de n (1, 5 e 10). Nota-se que o modelo proposto adequou-se ainda mais, inclusive para os baixos valores de n .

É intuitivo supor que quanto maior o valor da variação δ na média do processo, mais rápida será a detecção do descontrole. E isso de fato ocorre, podendo ser visualizado nas Figuras 3.7 e 3.8. De modo geral, os poderes obtidos por meio da distribuição normal foram adequados, exceto nos casos de $n = 1$ ($k^* = 1$ e $1,5$) e $n = 5$ ($k^* = 1$), em que a probabilidade de detecção do descontrole no processo foi baixa nos primeiros subgrupos racionais.

3.3 Recomendações

De modo a recomendar a construção de um gráfico de controle CUSUM tabular que proporcione probabilidade do alarme verdadeiro alta, ou seja, acima de 0,90, podem-se utilizar algumas das combinações entre os valores de k^* , h^* , i e n , conforme apresentadas na Figura 3.9.

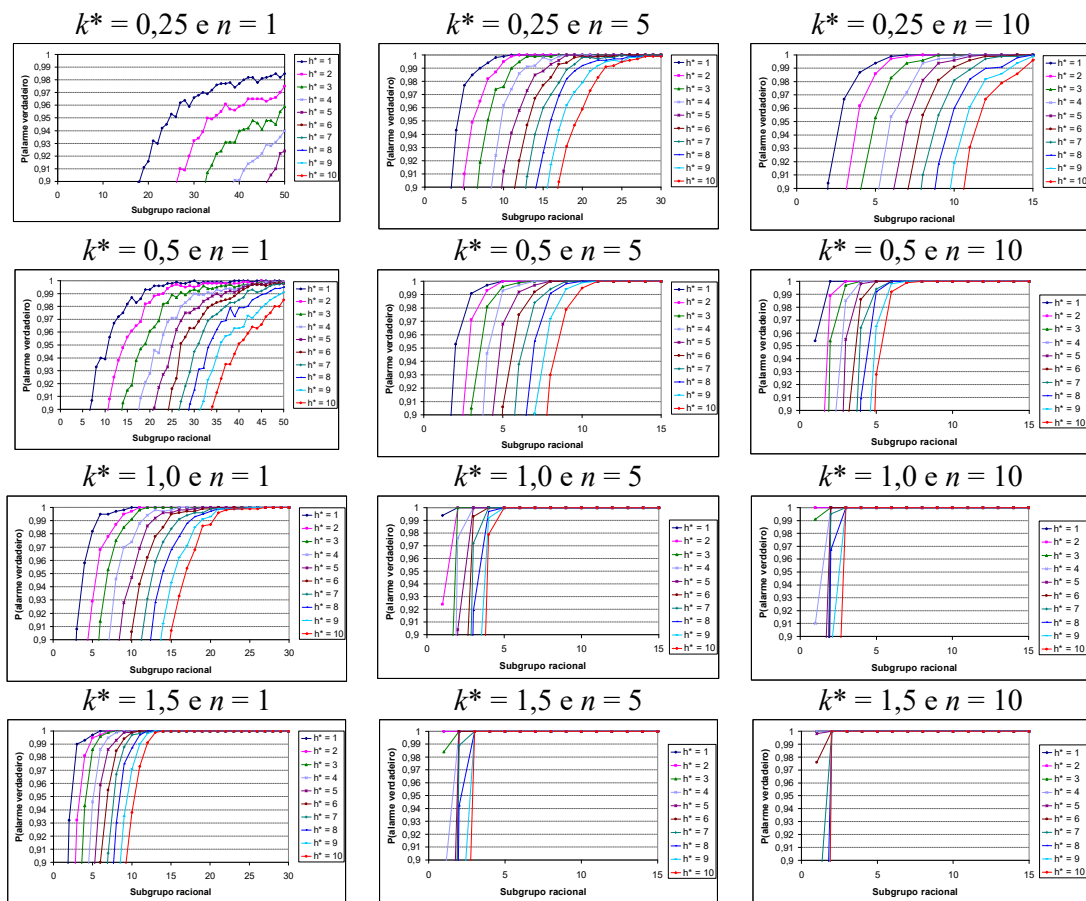


Figura 3.9 - Probabilidade observada do alarme verdadeiro em função do subgrupo racional para diferentes combinações entre k^* , h^* e n .

Como se pode observar pelos gráficos da Figura 3.9, dado que o processo saia e mantenha-se fora de controle estatístico para a média, o gráfico de controle CUSUM tabular irá, com certeza, sinalizar tal mudança. Para maior rapidez, deve-se aumentar o n e diminuir o

h^* , para um mesmo deslocamento δ ($k^* = \delta/2$). Nessa direção, é necessário um menor número de subgrupos racionais após o descontrole, para que o gráfico de controle o detecte.

A partir dos valores de i , h^* e k^* ($\delta=0$) previamente obtidos por Lara e Ribeiro Júnior (2016), verificou-se para os mesmos i , h^* e k^* ($\delta=2k^*$), a ordem do subgrupo racional que detecta o descontrole no processo com $Pd \geq 0,90$ para diferentes valores de n . Nas Tabelas 3.3 e 3.4, obtidas a partir dos valores que também geraram os gráficos do Anexo F disponível em Lara (2012), estão informados os valores recomendados de i .

Para alguns valores de δ foram recomendados mais de um valor de h^* (Tabelas 3.3 e 3.4). Quando houver dois ou mais valores de h^* disponíveis, deve-se lembrar que aumentar h^* acarreta em diminuir a probabilidade do alarme falso. A desvantagem em escolher o maior h^* é que ele diminui o poder. Por exemplo, para $\delta = 1$ e $k^* = 0,5$ (Tabela 3.3) pode-se optar por $h^* = 3$ ou 4. A vantagem de $h^* = 4$ consiste em que $\alpha_{h^*=4} < \alpha_{h^*=3} \leq 0,05$. Já a vantagem de $h^* = 3$ se deve a $Pd_{h^*=3} > Pd_{h^*=4} \geq 0,90$.

A escolha de k^* se deu por metade da variação em número de desvios-padrão da média que se deseja detectar. Daí, para cada possível valor de k^* , obteve-se os valores de h^* suficientemente baixos para maximizarem o Pd , mas também suficientemente altos para minimizarem o α . Os melhores valores de h^* a serem recomendados variam em função da quantidade i de subgrupos racionais no processo e, para cada i , está associada o tamanho n do subgrupo racional mais adequado para o processo.

Desse modo, as recomendações de k^* , h^* , i , no mínimo, e n visando $Pd \geq 0,90$ juntamente com $\alpha \leq 0,05$ ou $\alpha \leq 0,01$ (LARA; RIBEIRO JÚNIOR, 2016) são fornecidas nas Figuras 3.10 e 3.11.

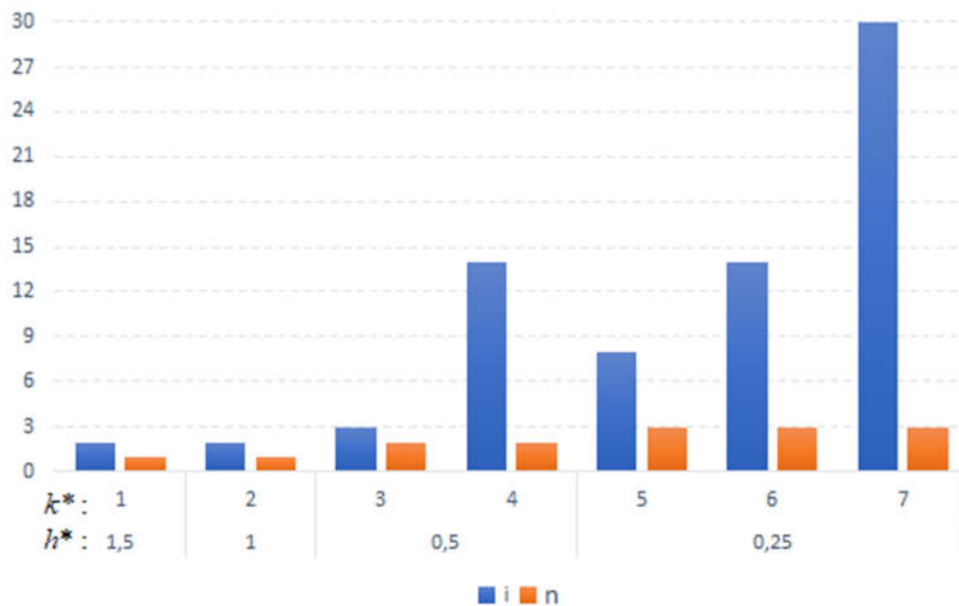


Figura 3.10 - Valores recomendados para k^* , h^* , i , no mínimo, e n visando $Pd \geq 0,90$ e $\alpha \leq 0,05$.

Tabela 3.3 Ordem i do subgrupo racional que detecta o descontrolo com $\alpha \leq 0,05$ e $Pd \geq 0,90$ para diferentes valores de n , δ e h^*

δ	k^*	h^*	n															
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
3	1,5	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	5	3	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0,5	3	14	7	5	4	3	3	3	3	2	2	2	2	2	2	2	2
		4	18	9	6	5	4	4	3	3	3	3	3	2	2	2	2	2
0,5	0,25	5	47	23	16	13	10	9	8	8	7	7	6	6	6	5	5	5
		6	50	25	18	15	12	10	9	9	8	8	7	7	6	6	6	5
		7	> 50	30	20	16	13	12	10	10	9	8	8	7	7	7	7	7

Tabela 3.4 - Ordem i do subgrupo racional que detecta o descontrolo com $\alpha \leq 0,01$ e $Pd \geq 0,90$ para diferentes valores de n , δ e h^*

δ	k^*	h^*	n															
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
3	1,5	2	3	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	3	6	3	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0,5	5	21	10	7	6	5	4	4	4	3	3	3	3	3	3	3	2
0,5	0,25	7	> 50	30	20	16	13	12	10	10	9	8	8	7	7	7	7	6
		8	> 50	32	22	18	15	13	11	11	10	9	9	8	8	7	7	7
		9	> 50	35	24	20	16	14	13	12	11	10	10	9	9	8	8	7
		10	> 50	38	26	21	17	16	14	13	12	11	11	10	9	9	9	8

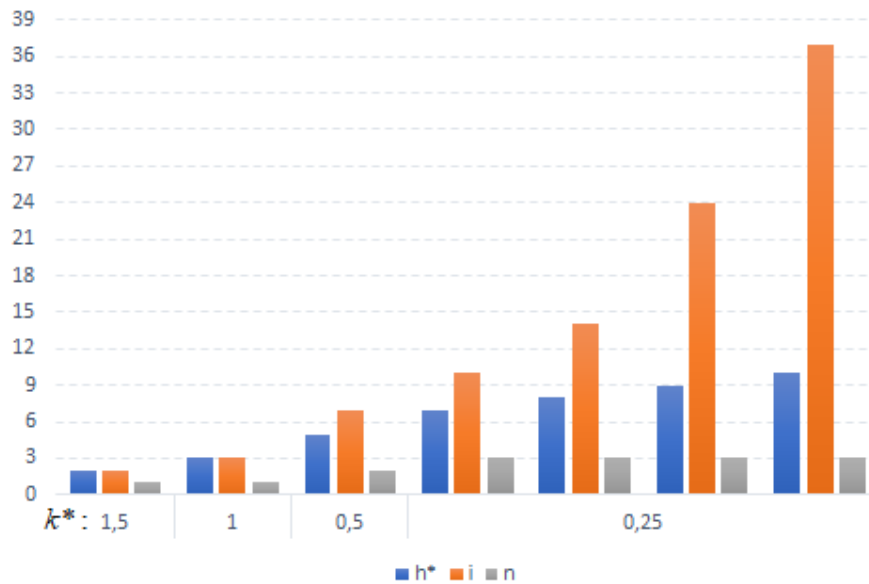


Figura 3.11 - Valores recomendados para k^* , h^* , i , no mínimo, e n visando $Pd \geq 0,90$ e $\alpha \leq 0,01$.

É importante ressaltar que nas fases iniciais de um processo, o interesse é de detectar grandes variações na média. Portanto, devem-se utilizar os valores recomendados mais altos para k^* e os mais baixos para h^* . E, para um processo em estágio mais avançado, visando detectar pequenas variações na média, devem-se utilizar as recomendações para valores mais baixos de k^* e as de mais altos de h^* .

Hawkins (1987) fez recomendações de h^* para $\alpha \leq 0,0027$. No entanto, fixar valores relativamente baixos de α acarreta na diminuição da probabilidade do gráfico de controle CUSUM tabular em detectar descontrole no processo caso exista. Assim, faz-se necessário recomendar α 's maiores ($\alpha \leq 0,01$ e $\alpha \leq 0,05$) para os casos onde a ocorrência do alarme falso é preferível em relação à produção de itens não conformes.

A quantidade de subgrupos racionais produzidos no processo também é importante na escolha do planejamento. Para valores baixos de δ e i ($\delta < 1$ e $i < 50$), as CUSUMs unilaterais aumentam lentamente, estando propensas a detectarem um descontrole que só será observado num subgrupo racional de ordem superior às disponíveis para as recomendações feitas até então.

Alguns trabalhos já utilizaram as recomendações semelhantes às apresentadas no presente estudo. Osanaiye e Talabi (1989) utilizaram $k^* = 3$ e $h^* = 2$ em seu trabalho visando detectar surtos de diabetes na cidade de Ibadan, Nigéria.

Alves e Samohyl (2004) utilizaram o planejamento $k^* = 0,75$ e $h^* = 3,75$ para o monitoramento de 1,5 desvio-padrão da média da tensão de ruptura de cabos. O autor também aplicou o planejamento $k^* = 0,5$ e $h^* = 4,77$ em um processo de produção de anéis para a vedação de tubulações realizado na indústria de borrachas NSO Ltda., em Joinville. O uso de tal planejamento proporcionou uma rápida detecção no descontrole do processo, comprovando assim a eficiência da recomendação.

Alves e Samohyl (2004), em seu estudo comparativo entre os gráficos de controle de Shewhart e CUSUM tabular, comprovaram a eficiência deste segundo na detecção de pequenas variações de um processo, sob o planejamento $k^* = 0,5$ e $h^* = 4$. Os autores ressaltaram ainda o impacto que a aplicação desse gráfico é capaz de produzir nos custos de amostragem e na redução das perdas ocasionadas pela produção de itens não conformes.

4. Conclusões

A probabilidade do alarme verdadeiro para detectar um deslocamento mínimo pré-definido na média de controle, aumenta em função da diminuição do intervalo de decisão padronizado e dos aumentos do número de repetições por subgrupo racional e do número de subgrupos racionais, para um mesmo valor de referência padronizado escolhido como a metade do deslocamento em número de desvios-padrão.

A distribuição normal pode ser utilizada nos cálculos das probabilidades do alarme verdadeiro do gráfico de controle CUSUM tabular.

Para conferir probabilidade do alarme verdadeiro igual ou superior a 0,90 e associada a uma probabilidade de alarme falso igual ou inferior a 0,05, recomendam-se: $k^* = 1,5$ e $h^* = 1$, para $\delta \geq 3$; $k^* = 1$ e $h^* = 2$, para $\delta \geq 2$; $k^* = 0,5$ e $h^* = 3$ ou 4, para $\delta \geq 1$ e $k^* = 0,25$ e $h^* = 5, 6$ ou 7, para $\delta \geq 0,5$.

E, para conferir probabilidade do alarme verdadeiro igual ou superior a 0,90 e associada a uma probabilidade de alarme falso igual ou inferior a 0,01, recomendam-se: $k^* = 1,5$ e $h^* = 2$, para $\delta \geq 3$; $k^* = 1$ e $h^* = 3$ para $\delta \geq 2$; $k^* = 0,5$ e $h^* = 5$, para $\delta \geq 1$ e $k^* = 0,25$ e $h^* = 7, 8, 9$ ou 10, para $\delta \geq 0,5$.

Referências

ALVES, C. C.; SAMOBYL, R. W. *A utilização dos gráficos de controle CUSUM para o monitoramento de processos industriais*. In: Encontro Nacional de Engenharia de Produção, Florianópolis, p. 1635-1642, 2004.

BROOK, D.; EVANS, D. A. An approach to the probability distribution of CUSUM run length. *Biometrika*, v. 59, p. 539-549, 1972.

COLQUHOUN, P. H. D. *Cusum analysis of j-pouch surgery reflects no learning curve after board certification*. London: Health Sciences Centre, 2008.

COSTA, A. F. B.; EPPRECHT, E. K.; CARPINETTI, L. C. R. *Controle estatístico de qualidade*. São Paulo: Atlas, 2004.

HAWKINS, D. M. Self-starting CUSUM charts for location and scale. *The Statistician*. v. 36, p. 299-315, 1987.

KING, D. W. *Statistical quality control using the SAS[®] system*. Cary: SAS Institute Inc., 1995. 383 p.

LARA, R. L. P. *Desempenho do Gráfico de Controle CUSUM Tabular para o Monitoramento da Média*. Viçosa, 2012. 85 p. Dissertação (Mestrado em Estatística Aplicada e Biometria) – Programa de Pós-Graduação em Estatística Aplicada e Biometria – PPESTBIO/UFV, Universidade Federal de Viçosa, 2012.

LARA, R. L. P.; RIBEIRO JÚNIOR, J. I. Probabilidade do alarme falso no gráfico de controle CUSUM tabular. *Revista da Estatística da Universidade Federal de Ouro Preto*. v. 5, p. 15-38, 2016.

LUCAS, J. M.; CROSIER, R. B. Fast initial response for cusum quality-control schemes: give your cusum a head start. *Technometrics*. v. 24, p. 199-205, 1982a.

LUCAS, J. M.; CROSIER, R. B. *Robust CUSUM*: a robustness study for CUSUM quality control schemes. *Communications in Statistics – Theory and Methods*. v. 11, p. 2669-2687, 1982b.

MUKHERJEE, A.; CHONG, Z. L.; KHOO M. B. C. Comparisons of some distribution-free CUSUM and EWMA schemes and their applications in monitoring impurity in mining process flotation. *Computers & Industrial Engineering*. Vol. 137, 2019, 106059, ISSN 0360-8352, <https://doi.org/10.1016/j.cie.2019.106059>.

MONTGOMERY, D. C. *Introdução ao controle estatístico da qualidade*. 7 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

MONTGOMERY, D. C.; RUNGER, G. C. *Estatística aplicada e probabilidade para engenheiros*. 6 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

MUNIZ, J. A.; OLIVEIRA, M. S. *Controle estatístico e gestão da qualidade*. Lavras: UFLA/FAEPE, 2000.

OSANAIYE, P. A.; TALABI, C. O. On some non-manufacturing applications of counted data cumulative sum (CUSUM) control chart schemes. *Journal of the Royal Statistical Society*. v. 38, p. 251-257, 1989.

PAGE, E. S. Continuous inspection schemes. *Biometrika*. v. 41, p. 100-114, 1954.

SOUZA, L. M.; RIBEIRO JÚNIOR, J. I.; REIS, G. M.; IDE, M. S. Eficiência dos gráficos de controle Xbarra, EWMA e CUSUM. *Revista Eletrônica Produção & Engenharia*. v. 1, p. 81-94, 2008.

VARGAS, V. C. C.; LOPES, L. F. D.; SOUZA, A. M. Comparative study of the performance os the CUSUM and EWMA control charts. *Computers & Industrial Engineering*. v. 46, p. 707-724, 2004.

WERKEMA, M. C. C. *Ferramentas estatísticas básicas para o gerenciamento de processos*. Belo Horizonte: Fundação Christiano Ottoni / UFMG, 1995.

WERNER, L.; ARGENTA, A.; SOARES, F. *Análise de desempenho dos gráficos de controle CUSUM e EWMA: estudo comparativo com base em simulação*. *Cadernos do IME – Série Estatística*. v. 47, p. 17-34, 2019.