revemop

10.33532/revemop.e202135 eISSN 2596-0245

Análisis ontosemiótico de prácticas que involucran la elaboración y validación de conjeturas: una tarea formativa para futuros profesores

María Elena Markiewicz
Silvia Catalina Etchegaray

Resumen: En este trabajo describimos el diseño, la implementación y los resultados de una tarea formativa para estudiantes del profesorado en matemática, en la que se promueve el análisis ontosemiótico de prácticas de estudiantes de la escuela secundaria ante un problema aritmético que requiere formular y validar conjeturas. Se incluye el análisis a priori de la tarea formativa, un estudio de casos, más precisamente la resolución de la tarea por parte de un estudiante del profesorado y una síntesis de los resultados obtenidos de su implementación. Se revelan algunas dificultades en el reconocimiento de ciertos objetos, procesos y conflictos semióticos por parte de los futuros profesores en este tipo de problemas, lo cual plantea la necesidad de continuar incentivando el desarrollo de conocimiento didáctico para la formación profesional.

Palabras clave: Formación de profesores. Conjeturas. Argumentación. Análisis ontosemiótico

María Elena Markiewicz
Magister en Didáctica de la Matemática por la Universidad Nacional de Río Cuarto. Profesora en la Universidad Nacional de Río Cuarto, Río Cuarto, Córdoba, Argentina
http://orcid.org/0000-0001-5695-3642
mmarkiewicz@exa.unrc.edu.ar

Silvia Catalina Etchegaray
Magister en Didáctica de la Matemática por la Universidad Nacional de Río Cuarto. Profesora en la Universidad Nacional de Río Cuarto, Río Cuarto, Córdoba, Argentina.
http://orcid.org/5470-5629
setchegaray@exa.unrc.edu.ar

Recebido em 28/06/2021
Aceito em 08/09/2021
Publicado em 19/12/2021

Ontosemiotic analysis of practices that involve the elaboration and validation of conjectures: a formative task for future teachers

Abstract: In this work we describe the design, implementation and results of a formative task for mathematics teacher students, in which the ontosemiotic analysis of practices of high school students is promoted in the face of an arithmetic problem that requires formulating and validating conjectures. It includes the a priori analysis of the training task, a case study, more precisely the resolution of the task by a student of the teaching staff and a synthesis of the results obtained from its implementation. Some difficulties are revealed in the recognition of certain objects, processes and semiotic conflicts by future teachers in this type of problem, which raises the need to continue encouraging the development of didactic knowledge for professional training.

Keywords: Teacher training. Conjectures. Argumentation. Ontosemiotic analysis

Análise ontosemiótica de práticas que envolvem a elaboração e validação de conjecturas: uma tarefa formativa para futuros professores

Resumo: Neste trabalho descrevemos a concepção, implementação e resultados de uma tarefa formativa para alunos de professores de matemática, na qual se promove a análise ontosemiótica de práticas de alunos do ensino secundário face a um problema aritmético que requer a formulação e validação de conjecturas. Inclui a análise a priori da tarefa formativa, um estudo de caso, mais precisamente a resolução da tarefa por um aluno do corpo docente e uma síntese dos resultados obtidos na sua implementação. Algumas dificuldades são reveladas no reconhecimento de determinados objetos, processos e conflitos semióticos pelos futuros professores neste tipo de problema, o que levanta a necessidade de continuar incentivando o desenvolvimento de conhecimentos didáticos para a formação profissional.

Palavras-chave: Formação de professores. Conjecturas. Argumentação. Análise Ontosemiótica

1 Introducción

Un objetivo importante para la mejora de la formación de profesores es reflexionar de manera profesional y actuar en consecuencia respecto a problemas de enseñanza y aprendizaje emergentes de la propia práctica o delimitados en el ámbito de la investigación en Didáctica de la Matemática. Desde este lugar es que, en este trabajo, nos ocuparemos de dos problemáticas inherentes a la formación de los profesores en matemática, planteando una actividad formativa que intenta aportar al tratamiento de las mismas.

Por una parte, se observa que la formación inicial del profesor transcurre mayormente en un ambiente en el que se trabaja de un modo axiomático-deductivo, donde las oportunidades para la elaboración de conjeturas y para el planteo de diferentes modos de validación de las mismas son escasos. Sin embargo, consideramos que estas actividades, ligadas a la argumentación y la prueba, deben tener un lugar en la formación inicial del profesor, dado que son cuestiones relevantes a trabajar en el ámbito de la escuela secundaria, donde los profesores van a desempeñar su labor profesional. En este sentido, diversas investigaciones (BOERO et al., 2010; BOERO; GARUTI y LEMUT, 2007; CAÑADAS et al., 2008; LARIOS OSORIO, 2001; PANIZZA, 2005), así como también distintos diseños curriculares, ponen de manifiesto la importancia de plantear a los estudiantes de la escuela secundaria situaciones que requieran la elaboración de conjeturas, dada la incidencia de este quehacer en la producción de conocimiento matemático y en la construcción de la racionalidad matemática del estudiante. En algunos trabajos de investigación (MARKIEWICZ, 2005; MARKIEWICZ y ETCHEGARAY, 2008) hemos expresado nuestra preocupación acerca, no sólo de la escasez de este tipo de problemas en el ámbito de la escuela secundaria, sino también sobre la falta de reflexión en dichas aulas sobre el trabajo realizado por los estudiantes ante estas situaciones. De este modo, tal como lo expresa Gascón (2002), las fases exploratorias de la actividad matemática quedan "[…] muy debilitadas puesto que se dejan a la responsabilidad casi exclusiva del alumno, sin ningún tipo de institucionalización" (GASCÓN, 2002, p. 685). La hipótesis de trabajo que sostenemos es que, para que estas actividades (de formulación y validación de conjeturas) se desarrollen en las aulas donde el profesor se va a desempeñar, es condición necesaria que las mismas hayan formado parte de su formación inicial.

Por otra parte, también reconocemos que, en general, son pocas las posibilidades que tiene el futuro profesor de reflexionar y analizar su propia práctica matemática y las de estudiantes de la escuela secundaria durante su formación inicial. En consonancia con otros autores (GODINO et al., 2017; DI RICO et al., 2018; SADOVSKY y SESSA, 2011) consideramos que esta reflexión debe ser una práctica inherente a la formación del profesor. Para ello resulta de fundamental importancia que los futuros profesores dispongan de herramientas didácticas que les permitan realizar tales análisis, particularmente en aquellos problemas a los que hacíamos referencia en el párrafo anterior, en los que se despliegan una gran variedad de prácticas matemáticas personales y se hace necesario comprender y “manejar” lo que hace y dice el otro. Sin herramientas que les permitan ver en las producciones de sus estudiantes algo más que “otra resolución” u “otro procedimiento”, difícilmente el futuro profesor pueda recuperar dichas producciones y ponerlas en diálogo en el aula para realizar las devoluciones e institucionalizaciones necesarias que promuevan la producción matemática en la clase. En este sentido, consideramos que ciertas herramientas que aporta el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS) (GODINO, 2002, 2017; GODINO et al., 2021; GODINO, BATANERO y FONT, 2007) son de suma utilidad para llevar a cabo este tipo de análisis. Desde este enfoque se propone desarrollar, en los futuros profesores, la competencia profesional para realizar análisis de las prácticas, objetos y procesos implicados en la resolución de problemas matemáticos, esto es, la *competencia de análisis ontosemiótico* según el *modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas* (CCDM) (GODINO et al., 2017). El desarrollo de esta competencia permitiría realizar una mirada microscópica de las prácticas, ser conscientes de su complejidad ontosemiótica y proveer explicaciones de las dificultades de los estudiantes en términos de *conflictos semióticos*.

Teniendo en cuenta ambas problemáticas, nos propusimos generar espacios concretos de estudio, en el último año del profesorado en matemática, donde los futuros profesores puedan, a la vez, enfrentarse a problemas que requieran la elaboración y validación de conjeturas y realizar análisis ontosemióticos de prácticas personales que “viven” en la escuela secundaria ante este tipo de situaciones problemáticas. El objetivo de este trabajo es mostrar el diseño, la implementación y los resultados de una actividad formativa en esta dirección.

En el punto 2 de este trabajo recuperaremos algunos antecedentes vinculados a la problemática de la argumentación y la prueba, así como algunas de las herramientas teóricas y metodológicas del EOS que sustentan este trabajo. En el punto 3 presentaremos la tarea formativa propuesta, seguida de su análisis a priori en el punto 4. En el punto 5 mostraremos el estudio de un caso, esto es, de la resolución de la tarea planteada por una estudiante del profesorado y en el punto 6 presentaremos algunas conclusiones/resultados generales de la implementación. Por último, en el punto 7 esbozaremos algunas reflexiones finales.

2 Antecedentes y marco teórico-metodológico.

Una gran variedad de investigaciones han estudiado distintos aspectos vinculados a la argumentación y la prueba en la formación de profesores, constituyéndose en antecedentes relevantes para nuestro trabajo, donde una de las problemáticas que se aborda es, como ya mencionamos, la de la elaboración y validación de conjeturas. Entre ellas podemos señalar las de Stylianides, Bieda y Morselli (2017); Stylianides y Stylianides (2017) y Varguese (2009). Particularmente los primeros autores mencionados, en *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education*, realizan una revisión sobre los principales avances de la investigación sobre la argumentación y la prueba, enfatizando que actualmente existe un acuerdo generalizado entre los educadores de matemáticas sobre la importancia de estos procesos en las experiencias matemáticas de los estudiantes desde el comienzo de su educación. Pero también plantean que es fundamental considerarlos conjuntamente, dado que están estrechamente relacionados y que esto permitiría llamar la atención sobre una gama más amplia de procesos importantes relacionados con la complejidad de la demostración. La argumentación, según estos autores, refiere al discurso o medios retóricos (no necesariamente matemáticos) utilizados por un individuo o un grupo para convencer a otros de que una afirmación es verdadera o falsa, por tanto se centra en el valor epistémico de una afirmación y puede implicar la exploración de ejemplos o casos particulares, la generación o refinamiento de conjeturas y la producción de argumentos para estas conjeturas que no necesariamente califiquen como pruebas o apoyen el desarrollo de las mismas. La prueba, en el contexto de la comunidad aula, se podría definir como un argumento para la verdad o falsedad de un enunciado matemático que utiliza declaraciones verdaderas, modos válidos de razonamiento y modos de representación que son aceptados y están dentro del alcance conceptual de los estudiantes en dicha comunidad. Entre los estudios revisados por estos autores destacamos algunos que señalan el importante rol que los ejemplos juegan en las prácticas de prueba de los expertos y que sugieren formas de apoyar a los estudiantes en el uso de ejemplos estratégicamente elegidos para favorecer la generación de conjeturas y pruebas (LIN Y WU, 2007[1], MORSELLI, 2006[2]; citados en STYLIANIDES et al 2017, p.322; entre otros). Por otra parte, Stylianides et al. (2017) también hacen referencia a un amplio grupo de investigaciones que sugieren que los profesores tienen debilidades en el conocimiento de la enseñanza de la argumentación y la prueba (algunas de

[1] LIN, Miao-Ling; WU, Chao-Jung. Uses of examples in geometric conjecturing. **Proceedings of PME** 31, v. 3, p. 209 - 216, 2007.

[2] MORSELLI, Francesca.. Use of examples in conjecturing and proving: An exploratory study. **Proceedings of PME**, v,30, n. 4, p 185–192, 2016..

ellas consecuencia de las limitaciones en su propio conocimiento sobre las mismas) y que es posible mejorar este conocimiento en el contexto de la formación del profesorado, a través del diseño de intervenciones. En este sentido, según estos autores, la investigación basada en el diseño puede ofrecer formas efectivas de abordar las dificultades de estudiantes y profesores con la argumentación y la prueba.

Nuestro trabajo pretende ser un aporte en esta dirección, al plantear una instancia de aprendizaje para los futuros profesores en dicho campo, proponiendo una actividad formativa para los estudiantes del profesorado, que involucra un problema aritmético que requiere la elaboración y prueba de conjeturas. Esto con la intención, no solo de que se enfrenten y reconozcan la intencionalidad docente al proponer este tipo de problemas sino de que también puedan lograr una comprensión más profunda de los modos de argumentar y probar de estudiantes de la escuela secundaria (donde el trabajo con los ejemplos juega un rol fundamental). Consideramos, en este sentido, que el EOS, marco teórico didáctico de este trabajo, aporta herramientas conceptuales de análisis didáctico que favorecerían esta tan necesaria comprensión.

En efecto, en el marco del EOS, tal como ya hemos mencionado, se ha elaborado un modelo de categorías de conocimientos y competencias del profesor de matemáticas (GODINO et al., 2017) (modelo CCDM) que puede servir de base para orientar la formación de profesores de matemáticas. A partir de los aportes teóricos de este enfoque, se vienen experimentando diversas intervenciones formativas con el objetivo de desarrollar en futuros profesores de matemáticas las distintas categorías de conocimientos y competencias didácticas propuestas en dicho modelo (BURGOS et al., 2019; GIACOMONE; GODINO y BELTRÁN-PELLICER, 2018; POCHULU; FONT Y RODRÍGUEZ, 2016) Una de esas competencias es la de *análisis ontosemiótico* de las prácticas matemáticas, definida por Godino et al. (2017) como aquella que le permite al profesor identificar los *objetos* y *procesos* implicados en las *prácticas matemáticas* necesarias para la resolución de las *situaciones-problemas*. Entre estos *objetos primarios* que conforman dichas prácticas se encuentran los *procedimientos*, los *conceptos o definiciones*, las *proposiciones o propiedades,* los *argumentos* y el *lenguaje*, que atraviesa/soporta a los demás objetos. Entre los procesos, el EOS identifica aquellos que permiten la emergencia de estos objetos primarios, esto es: *elaboración de procedimientos, definición, enunciación, argumentación y comunicación*. En este trabajo el foco de análisis estará puesto en los procesos de enunciación y argumentación, abordados desde una perspectiva sistémica. Además, según el juego de lenguaje en el que participan, los objetos primarios pueden considerarse desde diferentes facetas duales, las cuales dan lugar a los siguientes *procesos duales* (GODINO et al., 2007):

-*particularización-generalización* (asociado a la dualidad extensivo-intensivo),

-*materialización-idealización* (asociado a la dualidad ostensivo-no ostensivo),

-*representación-significación* (dualidad expresión-contenido),

-*descomposición-reificación* (dualidad unitario-sistémico) y

-*personalización-institucionalización* (dualidad personal- institucional).

El reconocimiento de la trama de objetos y relaciones que se ponen en juego en la resolución de ciertos problemas permite desvelar la *complejidad ontosemiótica* de las prácticas, explicar *conflictos semióticos*[3] de los estudiantes, evaluar las competencias matemáticas de los estudiantes e identificar objetos que deben ser recuperados e institucionalizados en el proceso de estudio.

Bajo esta perspectiva, tal como se anticipara en la introducción de este artículo, la intervención formativa que planteamos en este trabajo apunta a desarrollar, en los futuros profesores, la competencia específica del modelo CCDM relacionada al análisis ontosemiótico, en este caso, de prácticas de estudiantes del secundario ante un problema particular que requiere la elaboración y validación de conjeturas.

Dado el objetivo de este trabajo, el enfoque metodológico es inherente al EOS, tomando como base las fases de las investigaciones de diseño (GODINO et al., 2014). Más específicamente aquí planteamos el diseño de la actividad formativa, el análisis de significados pretendidos, la implementación y el análisis retrospectivo de la misma. Consideramos, tal como lo plantea Godino et al. (2021), que este tipo de investigaciones están más próximas a la práctica de la enseñanza, dado que tienen en cuenta ciertos condicionantes de la misma, aunque se reconocen algunas limitaciones ligadas a la derivación de valoraciones y normas de acción.

3. Diseño de la actividad formativa

La actividad que presentamos en este trabajo fue diseñada para ser propuesta en una asignatura de Didáctica de la Matemática correspondiente al último año del Profesorado en Matemática. Previamente, los estudiantes que cursan la asignatura ya han realizado, en forma colaborativa y dialógica con el docente, un primer estudio de las herramientas del EOS haciéndolas funcionar en el análisis de sus propias prácticas personales ante un problema aritmético-algebraico

[3] Disparidades o desajustes entre significados atribuidos a una expresión por dos sujetos, sean estos personas o instituciones (GODINO, 2002)

(tal como se describe en ETCHEGARAY; MARKIEWICZ y GIACOMONE, 2019). Este estudio se desarrolla a lo largo de 4 clases de aproximadamente 3 horas cada una.

La tarea formativa planteada para este trabajo particular promueve la realización de un análisis ontosemiótico de prácticas de estudiantes de la escuela secundaria ante un problema que tiene una gran potencialidad epistémica en relación a la elaboración y validación de conjeturas. En efecto, se trata de un tipo de situación que habilita la formulación de conjeturas a partir de los significados personales que los estudiantes le otorgan a regularidades que se pueden observar en ciertos ejemplos planteados en el enunciado, promoviendo también su contrastación y reformulación de ser necesario, así como también algún tipo de validación de las mismas (proceso este último que puede estar presente ya desde la elaboración misma de la conjetura). Los hallazgos de Lin et al. (2007) refuerzan nuestra hipótesis de que las características de los ejemplos que se deciden presentar en un problema influyen en los tipos de generalizaciones que hacen los estudiantes. Más aún, en casos como el que plantea este problema, donde se pide que los mismos razonen a partir de ejemplos para elaborar una conjetura, puede apoyar al proceso de argumentación de los estudiantes ya sea porque se proporciona una variedad de "buenos ejemplos" para su contrastación o porque se anima a los estudiantes a generar sus propios ejemplos para que puedan determinar qué características no son estables en las condiciones dadas. Ambas son propiedades del problema propuesto a los estudiantes de secundario, reformulado de Saiz y Etchegaray (2015), el cual se presenta a continuación.

Considera los siguientes productos:

*23 * 101 = 2323*

*19 * 101 = 1919*

*57 * 101= 5757*

-¿Sucede lo mismo para cualquier número natural?

-¿A qué se refiere con la expresión lo mismo?

-Si la respuesta a la primera pregunta es no, busca bajo qué condiciones dicha respuesta sería afirmativa y diga por qué puede asegurarlo.

A continuación explicitaremos el pedido didáctico realizado a los futuros profesores:

1) Resuelve el problema propuesto.

2) Determina la intencionalidad docente de proponer este problema en un aula de la escuela secundaria y de cada Ítem particular del mismo.

3) Analiza la resolución de un grupo de estudiantes de la escuela secundaria al problema (Figura 1), determinando unidades de análisis de las prácticas llevadas a cabo por los mismos e identificando:

- intencionalidad de los estudiantes en cada momento de la práctica

- objetos primarios disponibles y emergentes de dichas prácticas.

- procesos duales por los que transitan estos estudiantes para lograr sus producciones.

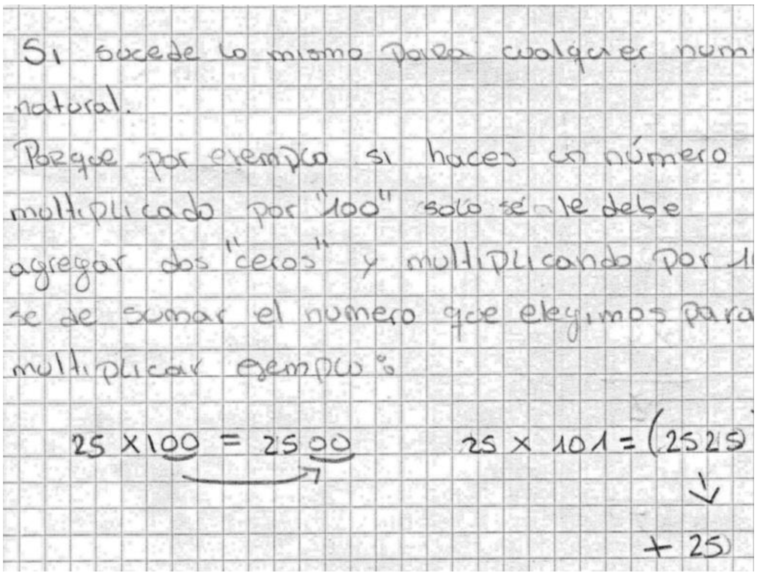
- dificultades de los estudiantes que puedan explicarse en términos de conflictos semióticos efectivos.

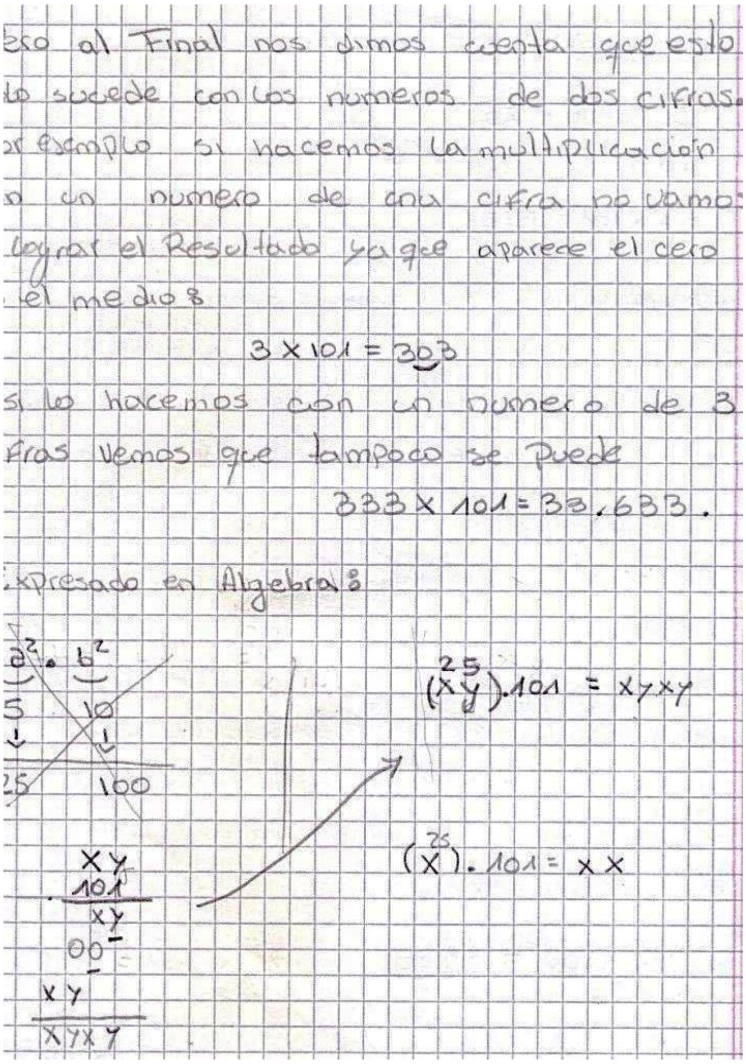
Sistematice su análisis en una tabla como la que sigue:

Práctica	*Intencionalidad del estudiante*	*Objetos*	*Procesos*

La resolución del grupo de estudiantes de 4to. Año de la escuela Secundaria (15-16 años) que se propuso a los estudiantes del profesorado para su análisis se presenta a continuación, en la Figura 1.

Figura 1: Resolución del problema por estudiantes del secundario.


Si sucede lo mismo para cualquier num natural.
Porque por ejemplo si haces un número multiplicado por "100" solo se le debe agregar dos "ceros" y multiplicando por 1 se de sumar el numero que elegimos para multiplicar ejemplo:
25 x 100 = 2500
25 x 101 = (2525
+ 25)


eso al Final nos dimos cuenta que esto
lo sucede con los numeros de dos cifras.
or ejemplo si hacemos la multiplicacion
n un numero de una cifra no vamo
lograr el Resultado ya que aparece el cero
el medio 8

3 x 101 = 303

si lo hacemos con un numero de 3
fras vemos que tampoco se puede

333 x 101 = 33.633.

xpresado en Algebra:

a² . b²
5 10
25 100

(xy).101 = xyxy

(x).101 = xx

xy
101
xy
00
xy
xyxy

Fuente: Gallo (2020).

4 Análisis ontosemiótico “a priori” de la actividad formativa

Si bien en el ítem 1 de la tarea planteada a los estudiantes del profesorado se solicita que resuelvan el problema, en este trabajo no vamos a presentar posibles resoluciones personales que podrían plantear los estudiantes, dado que nuestro interés es centrarnos en el análisis didáctico que se pretende que ellos realicen de la resolución de los estudiantes de la escuela secundaria.

Respecto al item 2, se aspira que los futuros profesores puedan detectar que la intencionalidad de proponer este problema en la escuela secundaria reside en brindar a los estudiantes la posibilidad de elaborar y validar conjeturas. Se pretende también que puedan determinar que, en el mismo, se plantean tres sub-tareas con intencionalidad diferente, a saber:

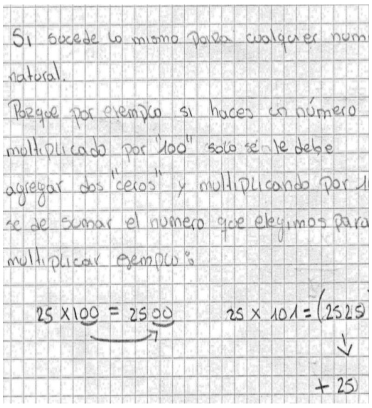
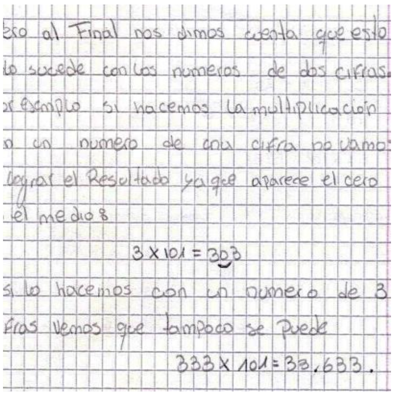
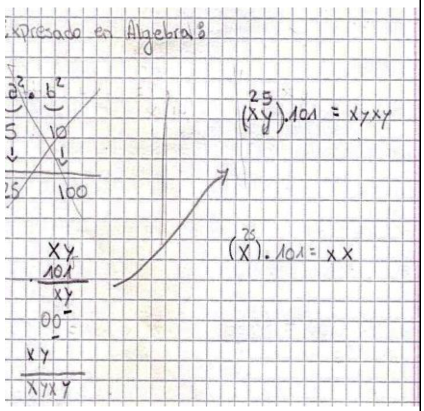
- En la primera se busca que, a partir de la observación de ciertos ejemplos, se otorgue (implícitamente) algún significado a la expresión “lo mismo”, que permita encontrar una regularidad en algún conjunto o en algún subconjunto de los números naturales y elaborar así alguna conjetura inicial.

- En la segunda se pretende que se haga explícito el significado de la expresión "lo mismo", enunciando la conjetura planteada.
- En la tercera, se promueve la reformulación de la conjetura inicial, de ser necesaria, a través de la búsqueda de condiciones para que ésta resulte verdadera y algún tipo de validación/prueba de la misma.

En el ítem 3, se solicita a los estudiantes del profesorado que realicen un análisis ontosemiótico a la producción del grupo de estudiantes del secundario. A continuación se explicita el análisis pretendido.

En primer lugar, se espera que se determinen unidades de análisis de la práctica de este grupo de estudiantes, las cuales pueden ser elegidas de acuerdo a la intencionalidad de las mismas. La siguiente puede ser una posible selección de estas unidades identificadas como P1, P2 y P3.

Tabla 1: Determinación de las unidades de análisis de la práctica de estudiantes del secundario.

P1	**P2**	**P3**
		

Fuente: Elaboración propia.

Luego se pretende que se complete la tabla propuesta en la tarea formativa, detallando intencionalidad del estudiante, objetos disponibles y emergentes y procesos en cada unidad de práctica.

Tabla 2. Análisis ontosemiótico pretendido de la resolución planteada por los estudiantes del secundario

Prácti-cas	Intencionalidad del estudiante	Objetos	Procesos
P1	Responder si sucede lo mismo para cualquier número natural y argumentar la respuesta dada.	*Procedimientos*: -observar los ejemplos (del enunciado) y responder que si sucede los mismo para todos los naturales. - multiplicar un número por 100, agregando dos ceros. Luego sumar el número al resultado. *Conceptos:* Número natural, suma y producto de números naturales, multiplicación como suma repetida. *Propiedades disponibles:* -. si un número se multiplica por 100 se debe agregar dos ceros (producto por la unidad seguida de ceros) - el 0 es neutro para la suma *Propiedad emergente*(conjetura): “Sucede lo mismo para cualquier número natural” *Argumento:* -Hay un argumento implícito que lleva a elaborar la conjetura emergente a partir del otorgamiento de significado a “lo mismo” en los casos particulares dados en la consigna y la correspondiente generalización. -Se argumenta expresando que si se multiplica un número por 100 solo se debe agregar dos ceros y multiplicando por 101 se debe sumar el número que se eligió para multiplicar. -se ejemplifica esta argumentación con un ejemplo particular: 25x100 = 2500. 25x101= 2525. *Lenguaje*: coloquial y simbólico aritmético.	*Representación/significación:* - Se da implícitamente un significado a las cuentas que aparecen en el enunciado y a la expresión “lo mismo” -se significa el producto de un número por 101 como el producto del número por 100 más el número. *Particularización/Generalización*: -Se generaliza la regularidad observada en los casos particulares del enunciado a “cualquier número natural” -Se parte de un número cualquiera para plantear un argumento general (que, sin embargo, no es válido para cualquier número natural) y se particulariza el argumento general planteado para un número particular *Idealización/Materialización:* -se materializa la conjetura planteada con el ostensivo: “Sucede lo mismo para cualquier número natural” -se materializa la argumentación primero de manera coloquial y luego se materializan las ideas que conforman la argumentación con los ostensivos: 25x1<u>00</u> =25<u>00</u> (que evoca la idea de que al multiplicar por 100 se agregan dos ceros) y: 25 x 101 = 2525 (que evoca y +25 la idea de que si se multiplica por 101 hay que sumar el número. *Enunciación:* de la conjetura emergente en los términos planteados en la columna 3. *Argumentación*: de la conjetura emergente
P2	Dar condiciones para que suceda lo mismo y justificar.	*Propiedad emergente* (nueva conjetura): Sólo sucede para números de dos cifras *Conceptos*: cifras de un número *Argumento*: Se argumenta expresando que al hacer la multiplicación de un número de una cifra no se va a lograr el	*Enunciación*: de la nueva conjetura emergente en los términos planteados en la columna 3. *Generalización/particularización:* -Se utilizan ejemplos particulares para argumentar la conjetura planteada. *Representación/significación*: -se significa al 3 como un representante del conjunto de números de una cifra y al 333 como representante del conjunto de números

		resultado ya que aparece el 0 en el medio y se muestra esto en un caso particular: 3x101 = 303. Luego expresan que si se hace con un número de 3 cifras tampoco se puede, mostrando un caso particular: 333 x 101 = 33633 *Procedimientos*: -elegir casos particulares (números de una cifra y de tres cifras) -realizar el producto de estos números por 101. *Lenguaje*: coloquial y simbólico-aritmético	de 3 cifras. *Argumentación*: de la nueva conjetura emergente
P3	Dar una prueba de la nueva conjetura	*Argumento*: basado en la representación de un número de dos cifras como xy y utilizando el algoritmo de la multiplicación para probar que xy x 101 =xyxy. *Lenguaje*: simbólico algebraico. *Procedimiento*: Algoritmo tradicional de la multiplicación *Propiedades*: -las que sustentan el algoritmo , 1 es neutro para el producto, todo número multiplicado por 0 da 0, 0 es neutro para la suma.	*Idealización/materialización*: -Se intenta materializar el producto de un número de un número por 101 como $a^2.b^{2.}$ -Se materializa un número de dos cifras con la expresión xy, -Se evoca al producto de un número cualquiera de dos cifras por 101 de manera vertical colocando xy x 101 -El ostensivo xy x 101=xyxy evoca la idea de que el producto de un número natural cualquiera de dos cifras por 101 da como resultado el número repetido dos veces. -Luego materializan el número cualquiera (de dos cifras) con el ostensivo x y la nueva propiedad como x x 101 = xx . Particularización/generalización: -se parte de un número de dos cifras particular pero arbitrario (xy) para proponer un argumento general Representación/significación: Se significa a xy como un número cualquiera de dos cifras y a xyxy como el número repetido dos veces. *Descomposición/reificación*: -Las argumentaciones coloquiales y los ejemplos planteados se reifican para habilitar la emergencia de la propiedad enunciada tal como se menciona en P2 y a través de la expresión (xy).101=xyxy. *-Argumentación*: de la nueva conjetura emergente en P2

Fuente: Elaboración propia.

La tarea también requiere que, a partir de este análisis, los estudiantes del profesorado puedan identificar dificultades presentes en la práctica, que se pueden explicar en términos de conflictos semióticos efectivos, por ejemplo:

- Una primera dificultad que se observa en la producción de estos estudiantes de secundario es la sobre-generalización que se realiza en la primera afirmación, donde expresan que sucede lo mismo para “cualquier número natural”, la cual está vinculada al significado que estos estudiantes otorgan a los ejemplos de la consigna. Algo similar ocurre en la argumentación general que plantean coloquialmente, donde no tienen en cuenta, en un principio, al multiplicar por 101 un número que no sea de dos cifras puede que no se obtenga el número repetido dos veces.
- Otra dificultad que evidencian estos estudiantes está vinculada a la enunciación de las conjeturas (propiedades) emergentes. Es posible explicar esta dificultad a partir de un conflicto semiótico ligado a la falta de materialización del significado asignado a la expresión “lo mismo”, el cual no explicitan en la práctica. Esto obstaculiza también la materialización, y por tanto la enunciación de la/s posible/s conjetura/s en los términos pretendidos: “el producto de un número natural (de dos cifras) multiplicado por 101 da como resultado el número repetido dos veces”.
-Por otra parte, intentan argumentar que “esto solo sucede con los números de dos cifras”, mostrando que no ocurre con los de 1 o los de 3 cifras con ejemplos particulares, sin plantearse qué ocurre con los de más de tres cifras. Estas dificultades están vinculadas estrechamente con el significado otorgado al tipo de particular que eligen, lo que influye directamente en la generalización que exponen.
-Se observa en algunas expresiones de los estudiantes, tales como “a^2. b^2”, algunas dificultades para materializar el producto de un número natural cualquiera de dos cifras por 100. Aunque finalmente se logra materializar un número de dos cifras cualquiera con la expresión “xy” y hacer una prueba, basada en el algoritmo de la multiplicación, no logran recuperar, utilizando este lenguaje algebraico, la argumentación general proporcionada en P1.

5. Resolución y análisis de la tarea formativa: estudio de un caso.

En este apartado se mostrará detalladamente la resolución de la tarea formativa llevada a cabo por un estudiante del profesorado, identificado como Estudiante A, como un estudio de caso.

En relación al ítem 1, presentamos a continuación la transcripción de la resolución del problema por parte de este estudiante, donde identifica con a), b) y c) cada inciso del mismo respectivamente.

a) En primer lugar, veamos algunos casos particulares, considerando diferentes números naturales:

9x101=909	*55x101=5555*	*1542x101=155742*
5x101=505	*79x101=7979*	
15x101=1515	*123x101=12423*	

Luego, al observar estos casos particulares, es posible considerar que ocurre lo mismo para cualquier número natural de dos cifras. Esto no es cierto, para números de una, tres y cuatro cifras como se muestra en los casos particulares.

b) La regularidad encontrada se podría expresar de la siguiente manera: Dado un número natural de dos cifras cualquiera, el producto de este número y 101 es igual al número de cuatro cifras conformado por dos veces los dígitos de este número, es decir, sea n=ab, abx101=abab.

c) Veamos cómo justificar la regularidad encontrada, que se enuncia de la siguiente manera: "Dado un número natural n de dos cifras, considerando que n=ab, se tiene que: nx101=abab"

Demostración: Sea n=ab, un número natural particular arbitrario de dos cifras.

Partiendo del primer miembro de la igualdad,

n101=ab(100+1) (Descomponiendo 101 en centena y unidad)

=ab(100)+ab(1) (Propiedad distributiva del producto respecto de la suma)

=ab00+ab (Propiedad del producto de un número seguido por dos ceros, neutro para el producto)

=abab (Suma de números naturales)

Por lo tanto, n101=abab. Qué es lo que se quería demostrar.

En relación al ítem 2 el estudiante A no logra explicitar la intencionalidad docente general de proponer este problema en el aula de la escuela secundaria, si bien puede determinar la intencionalidad de cada inciso del problema de la siguiente forma:

Inciso a): La intencionalidad por parte del docente es que el alumno pueda explorar en el abanico de posibilidades disponibles si el producto entre un número natural cualquiera y el 101 cumple con la regularidad que intentan expresar los tres ejemplos presentados en la tarea.

Inciso b): La intencionalidad por parte del docente es que el alumno luego de determinar la regularidad, sea capaz de expresarla coloquialmente.

Inciso c): La intencionalidad por parte del docente es que el alumno logre validar la regularidad encontrada, para otorgarle un status de propiedad y no de conjetura, como lo era en el inciso anterior.

Consideramos en este sentido, que en el primer inciso, el estudiante describe la intencionalidad en función del procedimiento que realizó para resolver la tarea, naturalizando de esta manera que la intención docente es que se logre otorgar un significado personal a la expresión "lo mismo" que le permita dar respuesta a la pregunta planteada. Por otra parte, en el tercer inciso del problema la intencionalidad no es solo "validar la regularidad encontrada", sino dar la posibilidad de hallar condiciones para que dicha regularidad ocurra, en caso de ser necesario, promoviendo así la reformulación de posibles conjeturas planteadas en los incisos anteriores.

En relación al ítem 3 de la tarea formativa, es decir el análisis ontosemiótico, presentamos a continuación el cuadro realizado por el estudiante A, en el que resume la intencionalidad del grupo de estudiantes del secundario, los objetos primarios y procesos transitados por los mismos. Cabe destacar que el estudiante consideró las mismas unidades de análisis planteadas en nuestro análisis a priori, donde hay un claro cambio de intencionalidad por parte de los estudiantes, aunque consideramos que hay ciertas dificultades para expresar dicha intencionalidad en cada práctica. Por ejemplo, en el caso de P1, la intencionalidad no es solo *"Expresar que la regularidad que intenta reflejar la tarea, se cumple para cualquier número natural"*, tal como lo indica este estudiante, sino también tratar de validar lo que afirma.

A continuación, mostramos la tabla donde el estudiante A explicita su análisis de la producción de los estudiantes del secundario;

Tabla 3. Análisis ontosemiótico realizado por el Estudiante A

Prác-tica	***Intencionalidad del estudiante***	*Objetos primarios*	*Procesos*
P1	*Expresar que la regularidad que intenta reflejar la tarea, se cumple para cualquier número natural.*	***-DEFINICIONES:*** *Número natural.* *Producto de números naturales.* *Suma de números naturales.* ***-PROCEDIMIENTOS:*** *-Observación de los casos particulares que propone la tarea.* *-Generalizar la regularidad propuesta en la tarea para cualquier número natural.* *-Multiplicar un número natural por 100.* *-Sumar el número natural elegido, para obtener el resultado del producto entre este número y 101* . ***-PROPIEDADES:*** ***Disponibles:*** *-Para todo número natural, n, el producto entre n y 100 es igual al número natural seguido de dos ceros.* ***Emergente:*** *-"Para cualquier número natural, sucede lo mismo" (que la regularidad reflejada por los ejemplos particulares de la tarea).*	***Significación-representación*** *Para comenzar con la tarea, el alumno debe otorgarle significado a los ejemplos que propone la tarea.* ***Particularización-generalización*** *A partir de los casos particulares propuestos por la tarea, se generaliza la regularidad que se intenta expresar, para cualquier número natural.* ***Materialización-idealización*** *El alumno busca un ostensivo (búsqueda de objetos aritméticos,* $25 \times 100 = 2500, 25 \times 101 = 2525$*) para hacer público que la regularidad, se cumple para cualquier número natural.* ***De argumentación****, ligado a un proceso no deductivo.* ***De comunicación****, el alumno utiliza un lenguaje específico para expresar su producción matemática*

		-ARGUMENTOS: *-Justifican expresando que, si se multiplica un número por 100 se debe agregar al número dos ceros y multiplicado por 101 se debe sumar el número que se elige para multiplicar.* *-Se justifica con un ejemplo particular:* $25 \times 100 = 2500$ $25 \times 101 = 2525$ $+25$ ***-LENGUAJE:*** *-Simbólico aritmético: se ve presente en el momento que expresa el producto entre 25 y 100 por un lado, y por el otro, en el producto entre 25 y 101.* *-Coloquial: cuando se argumenta porque se generaliza la regularidad para todo número natural.*	. ***De enunciación,*** *el alumno expresa que si sucede lo mismo para cualquier número natural (lo cual en principio, de acuerdo a la producción matemática analizada, tiene status de conjetura).*
P2	*Mostrar que la regularidad que intenta reflejar la tarea, no se cumple para números naturales de una y tres cifras.*	***-PROCEDIMIENTOS:*** *-Observación de casos particulares de números naturales de una y tres cifras.* *-Multiplicar un número natural de una cifra por 101.* *-Multiplicar un número natural de tres cifras por 101.* ***-PROPIEDADES:*** ***Emergente:*** *-"Esto solo sucede con los números de dos cifras"* ***-ARGUMENTOS:*** *-Expresan a partir de un ejemplo, que si se hace la multiplicación de un número de una cifra no se pueden lograr el resultado, ya que aparece un cero en el medio:* $3 \times 101 = 303$. *-Por otro lado, expresan que si se multiplica un número de tres cifras por 101, tampoco se cumple la regularidad, a través de un ejemplo:* $333 \times 101 = 33633$. ***-LENGUAJE:*** *-Simbólico aritmético:* *Este tipo de lenguaje está presente cuando se muestra un caso particular, mediante objetos aritméticos, en el caso de que se multiplica un número de una y tres cifras.* *-Coloquial:* *Cuando se argumenta porque la regularidad presentada por la tarea, no se cumple para números de una y tres cifras.*	***Generalización-particularización*** *Luego, de haber generalizado que la regularidad se cumple para cualquier número natural, se considera un caso particular de un número de una cifra por un lado y por el otro, un número de tres cifras, para mostrar que la regularidad sólo se cumple para números naturales particulares, en este caso, se entiende que dicho razonamiento está ligado a números de dos cifras.* ***De argumentación,*** *ligado a un proceso no deductivo.* ***Materialización-idealización*** *Ligado a la búsqueda de un ostensivo (objetos aritméticos,* $3 \times 101 = 303$, $333 \times 101 = 33633$*) para hacer pública la idea de que no se cumple la regularidad para números naturales de una y tres cifras.* ***De enunciación,*** *el alumno expresa que solo sucede lo mismo a cualquier número natural, pero de dos cifras (se reformula la conjetura planteada en P1, tiene status de conjetura).* ***De comunicación****, el alumno utiliza un lenguaje específico para expresar su práctica matemática.*

P3	*Intentar escribir la regularidad encontrada en términos algebraicos y validarla.*	***-DEFINICIONES:*** *-Expresiones algebraicas.* ***-PROCEDIMIENTOS:*** *-Se aplica el algoritmo tradicional de la multiplicación para obtener el resultado del producto de un número de dos cifras y 101.* *-Luego, se expresa la propiedad en términos algebraicos de dos maneras posibles, pensando en el número de dos cifras -por ejemplo 25- y su representación.* ***-PROPIEDADES:*** ***Disponible:*** "$\boldsymbol{xy \cdot 101 = xyxy}$" *O equivalentemente, utilizan la expresión:* "$x \cdot 101 = xx$". ***-ARGUMENTOS:*** *-Se valida la propiedad a partir del algoritmo tradicional de la multiplicación.* ***-LENGUAJE:*** ***-Simbólico algebraico:*** *Es el tipo de lenguaje preponderante en esta práctica.*	***Materialización-idealización:*** *Es posible identificar dos momentos de materialización para hacer pública la propiedad encontrada:* *-Cuando se utiliza el ostensivo "xy" para representar un número de dos cifras.* *-Y por otro lado, cuando se utiliza el ostensivo "x" para representar un número de dos cifras.* *Ambas expresiones, ligadas pensando el ejemplo del número 25, que el alumno refleja en su práctica.* ***Representación-significación:*** *El alumno le otorga un significado a las expresiones "xy", "x".* ***Descomposición-reificación:*** *Se unifica todo lo realizado, pensando en un proceso de construcción desde la P1, hasta el momento, para enunciar y validar la propiedad encontrada.* ***De argumentación,*** *se utiliza el algoritmo tradicional de la multiplicación para validar la propiedad encontrada.* ***De comunicación,*** *el alumno utiliza un lenguaje específico para expresar su práctica matemática.*

Fuente: Elaboración del futuro profesor Estudiante A.

Consideramos que el análisis de objetos primarios realizado por este estudiante en su cuadro se aproxima bastante al pretendido en nuestro análisis a priori, aunque podemos determinar algunas “distancias”, a las que haremos referencia a continuación y que consideramos pueden estar relacionadas a su forma de haber resuelto el problema. También se reconocen una variedad importante de procesos duales, aunque se naturalizan ciertas funciones semióticas que dan cuenta de los significados personales puestos a funcionar por este grupo de estudiante del secundario. Más específicamente, podemos detectar que:

- Si bien puede determinar los principales objetos primarios que se ponen a funcionar o que emergen de la práctica, observamos algunas dificultades vinculadas a los argumentos y las propiedades. En P1, por ejemplo, no se considera el argumento implícito en la práctica que lleva a los estudiantes a plantear la conjetura emergente a partir de la observación de casos particulares, el hallazgo de una regularidad (ocurre lo mismo) y su generalización (aunque si se reconoce este proceso de particularización-generalización en la columna 3 de la tabla). En P3, por otra parte, considera como propiedades disponibles: “xy x 101 = xyxy” y “x x 101

= xx”, siendo que las mismas, expresadas en esos términos algebraicos, en realidad, emergen de la práctica, luego de realizar la “prueba” a través del algoritmo tradicional de la multiplicación. Tampoco se expresan las propiedades disponibles que sustentan el algoritmo y que se utilizan implícitamente en dicha práctica.

- En relación a los procesos, observamos que puede determinar algunos de los que consideramos esenciales en esta práctica; aunque, por ejemplo:

- En P1, en relación al proceso de representación-significación, se debe tener en cuenta que para dar respuesta al problema, el estudiante no sólo debe otorgar un significado a los ejemplos que se proponen en la consigna sino también (aunque sea implícitamente) a la expresión “lo mismo”, algo que el estudiante A naturaliza. Así como también el significado que este grupo de estudiantes del secundario otorga al producto de un número por 101.

- En P1, en relación al proceso de particularización-generalización, si bien logra identificar que a partir de los casos particulares propuestos por la tarea, se generaliza la regularidad para cualquier número natural, no se reconoce que se plantea una argumentación general partiendo de un “número cualquiera” y que luego se particulariza la misma para el caso del 25.

- En P1, en relación al proceso de materialización-idealización, se reconocen como ostensivos sólo a los objetos aritméticos (al caso particular) para mostrar la idea de que la regularidad se cumple para todo número natural, sin explicitar que dicha idea se materializa también con una explicación coloquial previa al ejemplo.

- En P2, hay procesos de representación-significación que se naturalizan, por ejemplo, el significado que los estudiantes le otorgan al 3 como un representante de la clase de números de una cifra, así como al 333, que se significa como un representante de un número de 3 cifras. Y a ambos como números que tienen un número de cifras distinto de dos.

- En P3, cuando se hace referencia al proceso de materialización-idealización, si bien se plantea el uso de los ostensivos “xy” y “x” para materializar al número de dos cifras, no se explicitan los ostensivos “xy x 101 = xyxy” y “x x 101 = xx” que materializan la propiedad emergente.

- En P3, cuando refiere al proceso de representación-significación, aunque reconoce que a la expresión “xy” se le otorga un significado, no explicita cuál, ni tampoco qué significado se le otorga, por ejemplo, a las expresiones “xyxy” o “xy x 101= xyxy”.

- En relación a los conflictos semióticos detectados por este estudiante, el mismo expresa lo siguiente:

Con respecto a la práctica 1, puede evidenciarse un conflicto semiótico efectivo que puede expresarse con la dificultad que tienen los alumnos al no entender la regularidad que intenta mostrar los ejemplos de la tarea. Es decir: en cuanto el conflicto semiótico efectivo, los alumnos tienen la dificultad de otorgarle significado a los ejemplos mostrados en la tarea, dado que los alumnos tienden a decir -observando la producción matemática de este grupo en particular- que la regularidad expuesta se cumple para cualquier número natural. Lo cual está asociado al proceso de significación-representación. Por otro lado, también respecto a la práctica 1, puede evidenciarse otro conflicto semiótico asociado al proceso de particularización-generalización dado que los alumnos tienen la dificultad de observar de antemano, que la regularidad mostrada en la tarea no se cumple para números de una y tres cifras, conjeturando a partir de los ejemplos de la tarea, que se cumple con cualquier número natural. Y por último, respecto a las prácticas 2 y 3, si bien pueden identificarse dificultades a priori, desde mi punto de vista no ocurren en el sistema de prácticas desplegados por los estudiantes.

Las dificultades que tiene este estudiante para determinar y expresar los conflictos semióticos efectivizados en esta resolución, están vinculadas a ciertos procesos que naturalizó en su análisis de la práctica. Por una parte, no están claramente expresados los conflictos que plantea, dado que no se trata de que los estudiantes “no entiendan” o no puedan otorgar significado a los ejemplos de la tarea, sino de que el significado que les otorgan (como productos de números naturales por 101…) es lo que los lleva a generalizar la regularidad a todos los naturales. Tampoco se reconoce el conflicto que este grupo de estudiantes evidencia en la explicación coloquial que dan en P1, que no es válida para cualquier natural. Por otra parte, no hace referencia al conflicto que tiene este grupo de estudiantes para materializar el significado de la expresión “lo mismo” y para evocar la propiedad emergente de manera coloquial. Tampoco hace referencia al conflicto presente en P2, cuando los estudiantes pretenden justificar que “solo ocurre para números de 2 cifras”, mostrando que no se cumple para números de 1 y de 3 cifras, sin tener en cuenta los números de más de 3 cifras. No se mencionan las dificultades que parecen tener los estudiantes en P3 para materializar de manera simbólico-algebraica el producto de un número natural de dos cifras por 100.

6. Conclusiones generales de la implementación de la tarea formativa

En este apartado, intentaremos recuperar algunos de los aspectos que consideramos relevantes y recurrentes en la resolución de la tarea formativa por parte de los estudiantes del curso donde fue implementada esta tarea:

- Se observaron dificultades, en general, en los futuros profesores para determinar la intencionalidad didáctica de proponer este problema en el aula de la escuela secundaria, así como también en algunos casos para determinar la intencionalidad de cada ítem en particular. Atribuimos la primera de estas dificultades al hecho de que, para los estudiantes del profesorado, la intención de resolver un determinado problema, en general, se asocia a la adquisición de un mayor conocimiento sobre un contenido conceptual determinado que se está trabajando y no al desarrollo de ciertas capacidades de razonamiento, como lo son las de formular conjeturas y validarlas. También vinculamos esta dificultad con la manera habitual de resolver problemas de este tipo, donde se plantea una propiedad y se demuestra deductivamente, lo que queda claramente expuesto en las resoluciones presentadas al problema en el ítem 1.

- No se observaron dificultades para determinar las unidades de análisis de las prácticas realizadas por los estudiantes del secundario, pero si algunos inconvenientes para expresar la intencionalidad de los mismos en cada práctica, dado que la mayoría resume, en este lugar del cuadro (Columna 2) los procedimientos realizados por los estudiantes, más que la intención que tienen y que los llevan a utilizar dichos procedimientos.
- Respecto a la identificación de algunos de los objetos primarios:

- los estudiantes del profesorado, en general, pudieron determinar los procedimientos, las definiciones y el lenguaje utilizado en cada unidad de práctica.

- Se advirtieron, sin embargo, algunos inconvenientes para identificar los argumentos, particularmente en P1, donde sólo se considera el argumento dado para el caso particular de 25, no reconociéndose como tal ni el argumento implícito que lleva a elaborar su primer conjetura ni la explicación coloquial que el grupo de estudiantes de secundario plantea previamente: *"Porque por ejemplo si hacés un número multiplicado por 100 sólo se le debe agregar dos ceros y multiplicando por 101 se le debe sumar el número que elegimos para multiplicar".* Consideramos que esto puede deberse a que el tipo de argumentación que se considera relevante en el marco de las asignaturas cursadas en su carrera, son aquellas pruebas expresadas en cierto lenguaje simbólico-aritmético o simbólico-algebraico, sin considerar que pueden existir otros tipos de argumentos, que no revisten el carácter de demostración y que no están expresadas formalmente en un lenguaje algebraico, pero que pueden tener un carácter de prueba para estudiantes del secundario.

- También se observaron algunas dificultades vinculadas a la identificación de las propiedades disponibles. Lo que queda claro es que, en los análisis, los estudiantes pueden recuperar con facilidad aquellas propiedades que los estudiantes del secundario explicitaron en sus prácticas, por ejemplo, que "al multiplicar un número por 100 sólo se le debe agregar dos ceros", pero tienen inconvenientes para identificar algunas propiedades que están implícitas en la práctica, por ejemplo en P3, las propiedades que sustentan el algoritmo de la multiplicación. Otra de las dificultades más relevantes de los análisis realizados es expresar las propiedades emergentes de una manera en que los estudiantes del secundario no plantean, por ejemplo, el estudiante B, declara como conjetura emergente en P1: "$\forall x\ con\ x\ número\ natural: x \cdot 101 = xx$" o por ejemplo, en el caso de P3: "$\forall x, y \in [0,9]: xy \cdot 101 = xyxy$", recurriendo a ostensivos que los estudiantes del secundario no utilizan, por ejemplo los cuantificadores, el símbolo de pertenencia y el intervalo. En este sentido, se advierte una sobre-significación de lo que los estudiantes del secundario realmente dicen y hacen.

- En relación a los procesos:

  - los estudiantes del profesorado pudieron detectar que se transitaron en esta práctica por ciertos procesos de particularización-generalización, por ejemplo, en P1, cuando, a partir de los ejemplos dados en la consigna del problema se establece que la regularidad se cumple para todos los números naturales, o en P2 cuando se particulariza tomando los ejemplos de números de 1 y 3 cifras para dar cuenta que la regularidad no se cumple para todos los naturales, pero no pudieron dar cuenta de este proceso en P1 en el momento en que los estudiantes plantean una argumentación general partiendo de un "número cualquiera" y luego particularizaron la misma para el caso del 25. Esto pone de manifiesto la complejidad de entender la relación dialéctica de este proceso dual.

  - Los futuros profesores tuvieron, en general, problemas para reconocer procesos de representación-significación, en tanto proceso que se debe transitar necesariamente en esta práctica al tener que otorgar un significado a los ejemplos dados en la consigna e implícitamente a la expresión "lo mismo" u otorgar un contenido al producto de un número por 101, cuestiones que la mayoría naturaliza. Tampoco reconocen que se significan ciertos números como representantes de clases de números de dos cifras, de una cifra, de tres cifras, por ejemplo, lo que pone de manifiesto la dificultad de reconocer intensivos de diferente grado de generalidad.

  - En relación al proceso de materialización, lo reconocen cuando se utiliza un ostensivo aritmético para expresar ejemplos o contraejemplos, u ostensivos algebraicos para expresar un número natural de dos cifras pero no reconocen la utilización de otros ostensivos coloquiales que se utilizan para materializar proposiciones o argumentaciones.

  - Se notan también dificultades para reconocer el proceso de descomposición-reificación necesario para lograr esta práctica, que a veces se homologa con el de particularización-generalización.

- En relación a los conflictos semióticos, la mayoría puede identificar aquellos ligados a la sobregeneralización realizada por los estudiantes en P1, ligada al significado que se atribuye a los ejemplos de la consigna, pero, en general, tienen dificultades para determinar y explicar otros conflictos mencionados en nuestro análisis a priori. Esto lo atribuimos, como ya hemos mencionado, a la naturalización de ciertos procesos no reconocidos en sus análisis y a su propia actividad matemática desarrollada ante el pedido de resolución personal de la tarea.

7. Reflexiones finales

En función de las consideraciones planteadas en el punto anterior, se desprende que los futuros profesores en Matemática tienen dificultades para reconocer la potencialidad de este tipo de problemas que habilitan el funcionamiento de procesos de elaboración y validación de conjeturas, y que deben ser tenidos en cuenta por su valor formativo para desarrollar estas actividades inherentes y fundamentales del quehacer matemático.

También muestra que la adquisición de la competencia de análisis ontosemiótico por parte de los estudiantes del profesorado conlleva ciertas dificultades, algunas de las cuales consideramos que están relacionadas a sus formas de concebir y naturalizar la actividad matemática.

Sin embargo, y a pesar de estas dificultades, consideramos que desarrollar esta competencia es fundamental para los futuros profesores dado que les permite:

- tomar conciencia de la complejidad ontosemiótica de la práctica matemática que se puede desplegar ante problemas de este tipo.
- reconocer que las resoluciones planteadas por los estudiantes de la escuela secundaria se diferencian de las propias por la puesta en funcionamiento y la emergencia de diferentes objetos primarios: no sólo procedimientos distintos, sino también propiedades/conjeturas y argumentos diferentes regulados por un lenguaje particular.
- comprender que los procesos de elaboración y de validación de conjeturas no sólo está atravesado por el reconocido proceso de generalización que exige la enunciación de ciertas proposiciones matemáticas, sino que el mismo depende de poder transitar con éxito por otros procesos, como los de materialización, significación y reificación, lo cual pone en evidencia la densidad de dichos procesos en la actividad matemática que se despliega.
- explicar ciertas dificultades de los estudiantes de secundario en relación a la enunciación y la argumentación, en términos de conflictos semióticos vinculados a los procesos mencionados en los puntos anteriores (y no como ausencia de conocimiento por parte de los estudiantes).

La actividad formativa desarrollada en este trabajo para los estudiantes del último año del profesorado permite llevar adelante un proceso de reflexión didáctico-matemático que apunta a una mayor comprensión de las prácticas de estudiantes de la escuela secundaria vinculadas a la argumentación y la prueba. Consideramos que este tipo de actividad ayuda a mejorar las condiciones de los futuros docentes para recuperar y poner en diálogo las producciones de los estudiantes de secundario, reflexionar con ellos sobre lo realizado y pensar intervenciones que ayuden a superar conflictos semióticos identificados. En otras palabras, contribuye a modificar la posición del futuro profesor, instalándolo en una problemática particular, pero esencial, de su próxima labor profesional. Por todo lo anterior reconocemos la necesidad de continuar indagando experiencias como la presentada en este trabajo, a fin de contribuir al desarrollo de conocimiento didáctico-matemático en la formación inicial del profesor.

Referencias bibliográficas

BOERO, Paolo; DOUEK, Nadia; MORSELLI, Francesca; PEDEMONTE, Bettina. Argumentation and proof: a contribution to theoretical perspectives and their classroom implementation. En: **34TH CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION**, 2010, Belo Horizonte, Brazil. Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education., Belo Horizonte, Brazil: PME, 2010, p 179–204.

BOERO, Paolo; GARUTI, Rosella; LEMUT, Enrica. Approaching theorems in grade VIII: Some mental processes underlying producing and proving conjectures, and conditions suitable to enhance them. En: BOERO, Paolo (Ed.), **Theorems in school: From history, epistemology and cognition to classroom practice.** Rotterdam, Los Países Bajos: Sense, 2007, p. 249-264.

BURGOS, María; GIACOMONE, Belén; GODINO, Juan Diaz; NETO, Teresa. Desarrollo de la competencia de análisis ontosemiótico de futuros profesores de matemáticas mediante tareas de proporcionalidad. En: BADILLO, E; CLIMENT, N; FERNÁNDEZ, C. Y GONZÁLEZ, M.T. (Eds.), **Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional.** Salamanca: Ediciones Universidad Salamanca, 2019, p. 241-261. Disponible en: http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/documentos/Burgos_Giacomone_Godino&Neto_2019.pdf Acceso 10 may.2021.

CAÑADAS, María Consuelo; DEULOFEU PIQUET, Jordi; FIGUEIRAS, Lourdes; REID, David A.; YEVDOKIMOV, Oleksiy. Perspectivas teóricas en el proceso de elaboración de conjeturas e implicaciones para la práctica: tipos y pasos. **Enseñanza de las Ciencias**, v. 26 n. 3, p 431–444, 2008. Disponible en: https://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/132198. Acceso 10 de may. 2021.

DI RICO ENRIQUE; GARCÍA Patricia; ITZCOVICH Horacio; QUARANTA María Emilia. Análisis de registros de clases como espacios de producción de conocimiento matemático y didáctico en la formación docente. En: MOMBELLO, Laura (Comp): **Una mirada sobre la propia práctica: la reflexividad en la docencia desde las experiencias de la UNIPE**. 1a. ed. Ciudad Autónoma de Buenos Aires: UNIPE: Editorial Universitaria, 2018. p 11-24. Disponible en: https://editorial.unipe.edu.ar/colecciones/investigaciones/una-mirada-sobre-la-propia-pr%C3%A1ctica-detail. Acceso: 12 de may.2021

GALLO, Sonia Noemí. **Análisis de procesos argumentativos para elaborar y contrastar conjeturas en la clase de matemática de 4to año de la escuela secundaria.** 2020. Disertación (Tesis Maestría en Didácticas Específicas) Universidad Nacional del Litoral. Santa Fe. Argentina.

GASCON, Josep. El problema de la Educación matemática y la doble ruptura de la Didáctica de la Matemática. **La Gaceta. Real Sociedad Matemática Española**, v..5, n.3, p 673-702, 2002. Disponible en: https://gaceta.rsme.es/abrir.php?id=124. Acceso 10 de may. 2021 a las 20 h.

GIACOMONE, Belén; GODINO, Juan Diaz; BELTRÁN-PELLICER, Pablo. Desarrollo de la competencia de análisis de la idoneidad didáctica en futuros profesores de matemáticas. **Educação e Pesquisa**, v. 44, e172011, 2018. DOI: https://doi.org/10.1590/s1678-4634201844172011

GIACOMONE, Belén; GODINO, Juan Diaz; WILHELMI, Miguel R.; BLANCO, Teresa. F. Desarrollo de la competencia de análisis ontosemiótico de futuros profesores de matemáticas. **Revista Complutense de Educación** v. 29, n. 4, p 1109-113, 2018. DOI: https://doi.org/10.5209/RCED.54880

GODINO, Juan Dìaz. Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 22 n.2.3, p 237–284, 2002. Disponible en: https://revue-rdm.com/2002/un-enfoque-ontologico-y-semiotico/ Acceso : 11 de may de 2021

GODINO, Juan Dìaz. Construyendo un sistema modular e inclusivo de herramientas teóricas para la educación matemática. En: **SEGUNDO CONGRESO INTERNATIONAL VIRTUAL SOBRE EL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO. DEL CONOCIMIENTO Y LA INSTRUCCIÓN MATEMÁTICOS**Actas del segundo CIVEOS, 2017. Disponible en: http:// enfoqueontosemiotico.ugr.es /civeos/godino.pdf

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; BURGOS, M.; GEA, M. M. Una perspectiva ontosemiótica de los problemas y métodos de investigación en educación matemática. **Revemop**, v. 3, p. e202107, 21 jun. 2021.

GODINO, Juan Diaz; BATANERO, Carmen; FONT, Vicenç.The ontosemiotic approach to research in mathematics education. **ZDM. The International Journal on Mathematics Education**, v 39 n 1–2, p 127–135, 2007 . (Versión ampliada en español en: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf). Acceso 11 de may. 2021

GODINO, Juan Diaz.; GIACOMONE, Belén; BATANERO, Carmen; FONT, Vicenç. Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. **Bolema**, v. 31, n. 57, p 90-113, 2017 . DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05

GODINO, Juan Diaz; RIVAS, Hernán; ARTEAGA, Pedro, LASA, Aitzol; WILHELMI, Miguel R. Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico-semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v.34 n.2/3, p 167-200, 2014.

ETCHEGARAY, Silvia Catalina; MARKIEWICZ, María Elena; GIACOMONE, Belén. El análisis ontosemiótio: una herramienta didáctica para la formación del profesor de matemática. **Contextos de Educación** (Uni Río Editora) v. 26 p. 97-110, 2019. Disponible en: http://www2.hum.unrc.edu.ar/ojs/index.php/contextos/article/view/950. Acceso: 12 de may. 2021

LARIOS OSORIO, Victor. Demostraciones y conjeturas en la escuela media. **Revista electrónica de Didáctica de las Matemáticas**, v. 3, p 45-55, 2001. Disponible en: https://es.scribd.com/document/426157116/Demostraciones-y-conjeturas-en-la-escuela-media-pdf. Acceso: 12 de may. 2021

MARKIEWICZ, María Elena. **El rol del razonamiento plausible en la enseñanza de la matemática.** Disertación (Tesis Maestría en Didáctica de la Matemática). Universidad Nacional de Río Cuarto, Argentina, 2005.MARKIEWICZ, María Elena y ETCHEGARAY, Silvia Catalina.Un espacio para el razonamiento conjetural en la formación inicial de profesores. **Revista De Educación Matemática**, 27. 2008. Disponible en: https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/article/view/10188. Acceso el 12 de may.2021

PANIZZA, Mabel. **Razonar y conocer. Aportes a la comprensión de la racionalidad matemática de los alumnos**. Bs. As. Argentina: Libros del Zorzal, 2005.

POCHULU, Marcel; FONT, Vicenç; RODRÍGUEZ, Mabel. Desarrollo de la competencia en análisis didáctico de formadores de futuros profesores de matemática a través del diseño de tareas. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa Relime**, v. 19 n. 1, p 71-98, 2016. . DOI: 10.12802/relime.13.1913.

SADOVSKY, Patricia; SESSA, Carmen: Enseñanza de la matemática. Un camino para mejorar los aprendizajes. **Instituto Nacional de Investigación docente del Ministerio de Educación de la Nación**. n. .2, p. 11-15, 2011. Disponible en: http://dgescorrientes.net/REVISTA_SEPTIEMBRE_2011_INFD.pdf

SAIZ, Irma Elena; ETCHEGARAY, Silvia Catalina. **Módulo: Enseñanza de la Aritmética, Especialización docente de Nivel Superior en Enseñanza de la Matemática en la Educación Secundaria** (Ministerio de Educación y Deportes de la Nación. Instituto Nacional de Formación Docente). 2015.

STYLIANIDES, Andreas; BIEDA, Kristen N.; MORSELLI, Francesca. Proof and argumentation in mathematics education research. En: GUTIÉRREZ, Angel; LEDER Gilah C. y BOERO, Paolo (Eds). **The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education,** Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers, *2016, p 315-351,* Disponible en: https://www.researchgate.net/publication/319143947_The_Second_Handbook_of_Research_on_the_Psychology_of_Mathematics_Education. Acceso: 10 de may 2021

STYLIANIDES, Gabriel J.; STYLIANIDES, Andrea J. Research-based interventions in the area of proof: the past, the present, and the future **Educ Stud Math** 96 p 119–127, 2017. DOI 10.1007/s10649-017-9782-3

VARGUESE, Thomas. Secondary-level Student Teachers' Conceptions of Mathematical Proof. **Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers: The Journal**. Vol 1, Jun. 2009. Disponible en: http://www.k-12prep.math.ttu.edu/journal/1.contentknowledge/volume.shtml. Acceso 10 may 2021.