revemop

10.33532/revemop.e202212 eISSN 2596-0245

Análise da produção escrita de questões de matemática do Vestibular 2020 da Universidade Estadual de Londrina

Gabriel dos Santos e Silva

Daniela Harmuch

Resumo: Este artigo tem por objetivo analisar as produções escritas de Matemática do Vestibular 2020 da Universidade Estadual de Londrina disponibilizadas na revista Diálogos Pedagógicos da própria instituição, além de propor intervenções a partir dessas produções escritas que poderiam ser utilizadas em aulas de matemática como pontos de partida para oportunizar a aprendizagem. Para tanto, discute-se uma perspectiva de avaliação que visa subsidiar os processos de ensino e de aprendizagem, tomada como prática de investigação e oportunidade de aprendizagem. A análise da produção escrita dessas questões possibilitou observar que as intervenções do professor em aulas de matemática são essenciais para auxiliar os estudantes a aprenderem a partir de suas próprias produções e para que o professor possa obter informações a respeito de como os estudantes lidam com as questões de matemática.

Palavras-chave: Educação Matemática. Avaliação da Aprendizagem Escolar. Análise da produção escrita em matemática.

Written production analysis of mathematics questions of the 2020 entrance exam of the Universidade Estadual de Londrina

Gabriel dos Santos e Silva
Professor do Instituto Federal do Paraná (IFPR), campus Capanema, Capanema, Paraná, Brasil.
http://orcid.org/0000-0002-7527-7763
gabriel.santos22@gmail.com

Daniela Harmuch
Doutoranda do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL), Londrina, Paraná, Brasil.
http://orcid.org/0000-0002-0796-9493
dharmuch@yahoo.com.br

Recebido em 27/12/2021
Aceito em 23/01/2022
Publicado em 25/04/2022

Abstract: This article aims to analyze the written productions of Mathematics of the 2020 entrance exam of the *Universidade Estadual de Londrina*, available in the journal *Diálogos Pedagógicos* of the institution itself, in addition to proposing interventions to these written productions that could be used in mathematics classes as a starting point to create opportunities for learning. Therefore, an assessment perspective that aims to support the teaching and learning processes is discussed, taken as a practice of investigation and learning opportunity. The analysis of the written production of these questions made it possible to observe that the teacher's interventions in mathematics classes are essential to help students learn from their own productions and so that the teacher can obtain information about how students deal with the questions of math.

Keywords: Mathematics Education. Assessment of Scholar Learning. Written production analysis in mathematics.

Análisis de la producción escrita de preguntas matemáticas del examen de admisión de 2020 de la Universidade Estadual de Londrina

Resumen: Este trabajo tiene como objetivo analizar las producciones escritas de Matemáticas de Vestibular 2020 de la *Universidade Estadual de Londrina*, disponibles en la revista *Diálogos Pedagógicos* de la propia institución, además de proponer intervenciones a partir de esas producciones escritas que podrían ser utilizadas en las clases de matemáticas como punto de partida para generar oportunidades. para aprender. Para eso, se discute una perspectiva de evaluación que tiene como objetivo apoyar los procesos de enseñanza y aprendizaje, tomado como una práctica de investigación y oportunidad de aprendizaje. El análisis de la producción escrita de estas preguntas permitió observar que las intervenciones del docente en las clases de matemáticas son fundamentales para ayudar a los estudiantes a aprender de sus propias producciones y para que el docente pueda obtener información sobre cómo los estudiantes manejan las preguntas de matemáticas.

Palabras clave: Educación Matemática. Evaluación del aprendizaje escolar. Análisis de la producción escrita en matemáticas.

1 Introdução

A Avaliação da Aprendizagem Escolar, presente nas práticas escolares, é um dos temas de estudo do Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação Matemática e Avaliação (GEPEMA) da Universidade Estadual de Londrina (UEL). Este grupo tem defendido uma perspectiva de avaliação como prática de investigação e como oportunidade de aprendizagem que visa superar práticas que ainda consideram avaliação como sinônimo de prova, feita apenas ao fim de um período escolar ou ao término de um determinado conteúdo.

A avaliação como prática de investigação e como oportunidade de aprendizagem utiliza a produção escrita dos estudantes como uma fonte de informações para que o professor possa obter indícios a respeito dos processos de aprendizagem, de ensino e de avaliação. Nesse sentido, a análise da produção escrita é uma estratégia de avaliação (e de ensino) que pode ser tomada como “uma alternativa para a (re)orientação da avaliação escolar e (re)orientação da prática pedagógica e como uma possibilidade para a implementação da avaliação numa perspectiva de prática de investigação” (SANTOS, 2014, p. 23).

Todos os anos, a Coordenadoria de Processos Seletivos da Universidade Estadual de Londrina (COPS) publica uma revista, denominada Diálogos Pedagógicos, com objetivo de

> não só mostrar o resultado das provas do Processo Seletivo Vestibular da Universidade Estadual de Londrina (UEL), mas também promover uma leitura que oriente a preparação dos(as) candidatos(as) para o Vestibular de nossa Universidade. Há mais de dez anos, a Coordenaria de Processos Seletivos (COPS) da UEL disponibiliza esta revista como um canal de comunicação com todos aqueles(as) envolvidos com o Vestibular: profissionais de ensino, alunos(as) e público em geral (DIÁLOGOS PEDAGÓGICOS, 2021, p. 5).

Nessa revista, são disponibilizadas as questões das duas primeiras fases do vestibular da UEL, bem como as expectativas de respostas comentadas. Além disso, como a segunda fase contém questões abertas, a Diálogos Pedagógicos apresenta produções escritas dos estudantes com comentários.

Neste trabalho, as produções escritas de Matemática disponibilizadas na revista Diálogos Pedagógicos referentes ao Vestibular 2020 da UEL serão discutidas por meio da análise da produção escrita. Além disso, serão propostas intervenções a partir das produções escritas, supondo que as resoluções disponibilizadas na revista poderiam ser utilizadas em aulas de matemática como ponto de partida para oportunizar aprendizagem.

2 Avaliação da Aprendizagem Escolar e análise da produção escrita em matemática

Um dos principais objetivos da Avaliação da Aprendizagem Escolar, de acordo com autores que a estudam em uma perspectiva formativa, é a de subsidiar os processos de ensino de aprendizagem (BARLOW, 2006; DE LANGE, 1999; HADJI, 1994; LUCKESI, 2011). De acordo com Hadji (1994), um dos objetivos da avaliação é informar ao professor as condições sob as quais ocorrem as aprendizagens dos estudantes, além de auxiliá-los a compreender o andamento de seus percursos, suas dificuldades e êxitos.

Nesse sentido, a avaliação pode ser entendida como um processo pelo qual professor e estudantes são informados a respeito dos andamentos dos processos de ensino e aprendizagem, para que possam tomar decisões educacionais. Adotar a avaliação como prática de investigação significa entendê-la como

> um processo de buscar conhecer ou, pelo menos, obter esclarecimentos, informes sobre o desconhecido por meio de um conjunto de ações previamente projetadas e/ou planejadas, processo no qual se procura seguir rastros, vestígios, esquadrinhar, ir à pista do que é observável, conhecido (BURIASCO; FERREIRA; CIANI, 2009, p. 81).

Entender a avaliação como prática de investigação implica não analisar apenas as respostas dadas às tarefas de avaliação, mas sim aos caminhos percorridos, como os procedimentos e estratégias escolhidos para a resolução da tarefa. Desse modo, rompe-se com a crença de que as questões de matemática só têm uma resolução ou resposta.

Uma das práticas associadas à avaliação como prática de investigação é a análise da produção escrita. De acordo com Santos (2014, p. 23), a análise da produção escrita "pode ser tomada como um conjunto de ações frente à produção escrita dos alunos que possibilita ao professor obter informações para conhecer e compreender o processo de aprendizagem dos alunos, planejar e executar intervenções de modo a auxiliá-los".

Além disso,

> o professor, por meio da análise da produção escrita dos estudantes, pode obter vários "retratos" de um mesmo processo, em tempos e condições diferentes. Retratos que possibilitarão que ele questione qual matemática os estudantes estão aprendendo, que entendimento estão tendo do que é trabalhado em sala de aula, quais dificuldades estão

> apresentando, bem como o que pode ser feito para que estas sejam superadas por eles (VIOLA DOS SANTOS; BURIASCO, 2011, p. 6).

Outra maneira de compreender a avaliação como um processo que subsidia a aprendizagem e o ensino é adotá-la como oportunidade de aprendizagem. Pedrochi Junior (2018, p. 63) considera que avaliação como oportunidade de aprendizagem é um “meio de o professor observar os processos de aprendizagem dos alunos e intervir”. Nesse sentido, a avaliação passa a ser um meio pelo qual o professor oferece oportunidades aos estudantes para que aprendam.

3 Encaminhamentos metodológicos

Para esta pesquisa, foram utilizadas as doze produções escritas das quatro questões abertas de matemática da segunda fase do Vestibular 2020 da Universidade Estadual de Londrina, disponíveis em Diálogos Pedagógicos (2021). A princípio, buscou-se a revista do Vestibular 2021, por ser a mais recente. Entretanto, devido à pandemia do Covid-19 no Brasil, essa edição da prova do vestibular não teve questões abertas e, portanto, a revista não teve produções escritas de candidatos. Desse modo, foi escolhido o Vestibular 2020.

Na revista, as resoluções dos estudantes são classificadas como satisfatórias, parcialmente satisfatórias ou insatisfatórias. Optou-se por manter essa denominação neste artigo, ainda que sejam feitas algumas ressalvas à classificação.

Então, para a análise da produção escrita, cada resolução foi analisada individualmente, tomando como base as ações descritas por Santos (2014). Primeiro, efetuou-se uma leitura de cada produção escrita; em seguida, foram elaboradas inferências a respeito do que os estudantes escreveram; depois, buscou-se fazer interpretações acerca das resoluções para, enfim, elaborar possíveis intervenções, caso aquelas produções escritas fossem trabalhadas em um contexto de aulas de matemática.

Entende-se que, por serem produções escritas provenientes de uma prova de vestibular, não é possível fazer intervenções ou dar encaminhamentos didáticos aos estudantes que as produziram. Porém, entende-se que este artigo visa fornecer subsídios aos professores para que possam utilizar a análise da produção escrita em aulas de matemática e para tomarem as intervenções propostas como inspiração para uma avaliação como prática de investigação e oportunidade de aprendizagem.

4 Análise da produção escrita das questões do Vestibular 2020 da UEL

As seções seguintes apresentam uma análise de todas as produções escritas de matemática disponibilizadas pela revista para compor o material. Portanto, serão apresentadas as análises de cada produção individualmente e, em seguida, sugestões de intervenções e por fim, uma análise geral da questão.

4.1. Questão 1

A primeira questão da segunda fase do vestibular da UEL está no Quadro 1.

Quadro 1 - Questão 1 da segunda fase do Vestibular 2020 da Universidade Estadual de Londrina

Um agricultor tinha uma quantidade M de mudas de hortaliças para replantar em uma quantidade C de canteiros. Pensou em plantar 8 mudas de hortaliças em cada um dos canteiros, mas, dessa forma, sobrariam 32 mudas de hortaliças sem plantar. Tentou reorganizar o pensamento simulando o plantio de 12 mudas de hortaliças em cada um dos canteiros. Desse modo, todas as hortaliças seriam plantadas, porém sobrariam 8 canteiros sem muda alguma plantada. Finalmente, organizou o plantio da seguinte forma: 10 mudas de hortaliças de cor verde-escuro por canteiro, ocupando metade da quantidade de canteiros, e 8 mudas de hortaliças de cor verde-claro por canteiro, ocupando a outra metade da quantidade de canteiros. Assim, todas as mudas de hortaliças seriam plantadas e nenhum canteiro ficaria vazio. A partir das informações desse problema, determine a quantidade de mudas de hortaliças de cor verde-escuro e de cor verde-claro. Apresente os cálculos realizados na resolução desta questão.

Fonte: Revista Diálogos Pedagógicos (2021, p. 141).

As expectativas de resposta são apresentadas na Figura 1.

A primeira produção escrita apresentada na revista (Figura 2) foi considerada pela equipe de correção como satisfatória.

Figura 1 – Expectativas de resposta da Questão 1

QUESTÃO 1 – EXPECTATIVA DE RESPOSTA

Conteúdo programático: Sistemas lineares. Resolução e discussão de um sistema linear.

Resposta esperada:

Sejam C a quantidade de canteiros e M a quantidade de mudas de hortaliças, então

$$\begin{cases} 8C + 32 = M \\ 12(C - 8) = M \end{cases} \quad \text{OU} \quad \begin{cases} 8C = M - 32 \\ 12C = M + 12 \times 8 \end{cases}$$

$$8C + 32 = 12C - 96$$
$$128 = 4C$$
$$C = \frac{128}{4}$$
$$C = 32$$
$$M = 8 \times 32 + 32 = 288$$

Portanto, existem 32 canteiros e 288 mudas de hortaliças.

Como são 32 canteiros, podemos distribuir:

- 16 canteiros com mudas de hortaliças verde-escuras que equivalem a 160 mudas (16 × 10 = 160)
- 16 canteiros com mudas de hortaliças verde-claras que equivalem a 128 mudas (16 × 8 = 128)

Totalizando 288 mudas de hortaliças.

Resposta alternativa b):

Por tentativa e erro.

Quantidade de Canteiros	Quantidade de Mudas $8 \cdot C + 32$	Quantidade de canteiros subtraído 8 e multiplicado por 12 é igual a M
1	$8 \cdot 1 + 32 = 40$	
2	$8 \cdot 2 + 32 = 48$	
3	$8 \cdot 2 + 32 = 48$	
10	$8 \cdot 10 + 32 = 112$	$(10 - 8) \cdot 12 = 24$
15	$8 \cdot 15 + 32 = 152$	$(15 - 8) \cdot 12 = 84$
20	$8 \cdot 20 + 32 = 192$	$(20 - 8) \cdot 12 = 144$
30	$8 \cdot 30 + 32 = 272$	$(30 - 8) \cdot 12 = 264$
32	$8 \cdot 32 + 32 = 288$	$(32 - 8) \cdot 12 = 288$

Resposta alternativa c):

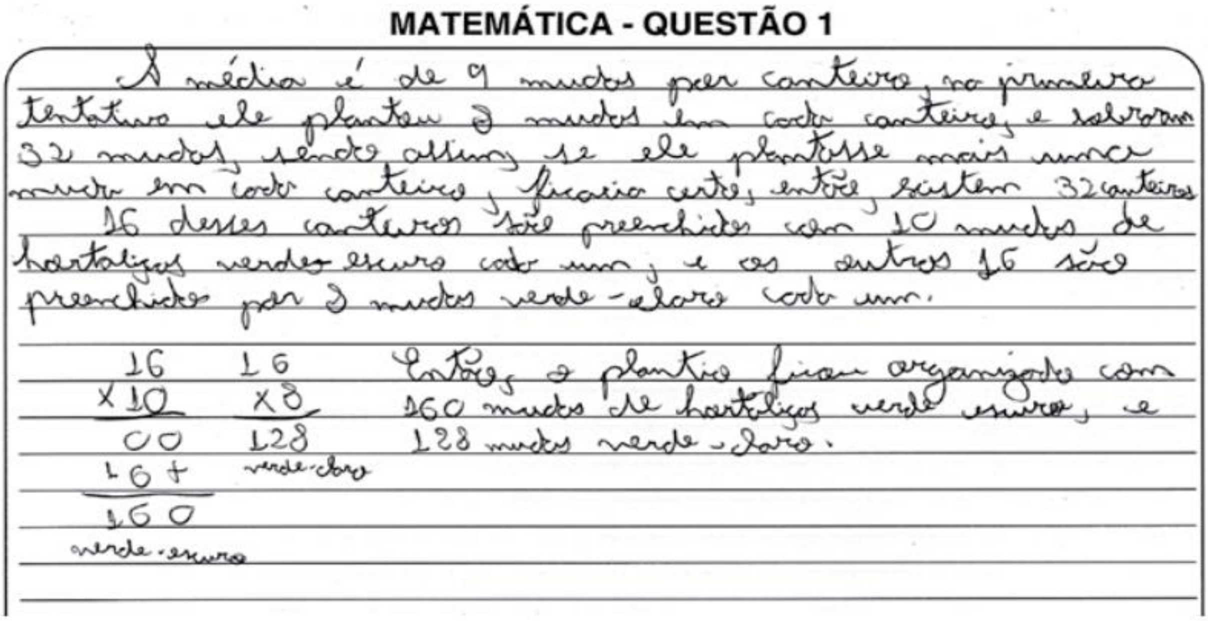
$$\begin{cases} 10 \cdot \dfrac{C}{2} + 8 \cdot \dfrac{C}{2} = M \\ 5C + 4C = M \\ 9C = M \qquad (i) \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} 8C = M - 32 \\ M = 8C + 32 \qquad (ii) \end{cases}$$

De (i) e (ii), tem-se

$$9C = 8C + 32$$
$$C = 32 \text{ e } M = 288$$

Fonte: COPS (2019).

Figura 2 - primeira resolução da Questão 1


MATEMÁTICA - QUESTÃO 1

A média é de 9 mudas por canteiro, na primeira tentativa ele plantou 8 mudas em cada canteiro, e sobraram 32 mudas, sendo assim se ele plantasse mais uma muda em cada canteiro, ficaria certo, então existem 32 canteiros 16 desses canteiros são preenchidos com 10 mudas de hortaliças verde escuro cada um, e os outros 16 são preenchidos por 8 mudas verde-claro cada um.

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times 10 \\ \hline 00 \\ 16+ \\ \hline 160 \end{array}$$
verde-escuro

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times 8 \\ \hline 128 \end{array}$$
verde-claro

Então, o plantio ficou organizado com 160 mudas de hortaliças verde escuro, e 128 mudas verde-claro.

Fonte: Revista Diálogos Pedagógicos (2021, p. 142).

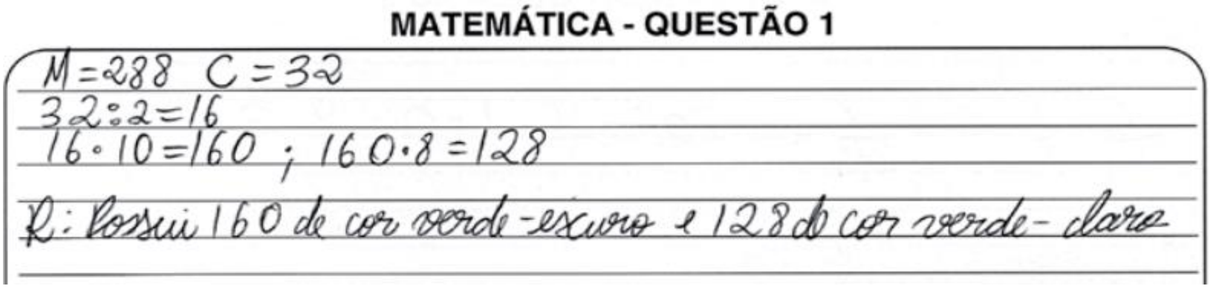
Na produção, pode-se observar que o estudante adota uma estratégia aritmética para resolver a questão. Na resolução, é utilizado o conceito de média, possivelmente obtido a partir da seguinte informação do enunciado: “Finalmente, organizou o plantio da seguinte forma: 10 mudas de hortaliças de cor verde-escuro por canteiro, ocupando metade da quantidade de canteiros, e 8 mudas de hortaliças de cor verde-claro por canteiro, ocupando a outra metade da quantidade de canteiros”. Em seguida, o estudante afirma que “na primeira tentativa ele plantou 8 mudas em cada canteiro, e sobraram 32 mudas”. Como cada canteiro deve ter, em média, 9 mudas, ele precisaria plantar uma muda (das 32 que sobraram) por canteiro para a média ser 9. Desse modo, a quantidade de canteiros deve ser 32.

A estratégia adotada na Figura 2 difere-se das resoluções esperadas anunciadas nas expectativas de resposta. Esta é uma característica de tarefas que podem ser utilizadas em uma perspectiva de avaliação que permite que o sujeito mostre o que sabe e que não está a serviço de uma perspectiva de avaliação em que o estudante deve reproduzir o que o professor faz ou apresentar apenas conteúdos e fórmulas memorizados.

Entretanto, em uma situação de sala de aula, o professor poderia explorar a produção escrita do estudante a fim de promover alguma aprendizagem a partir dela. Por exemplo, o professor pode propor que o estudante pense em outra forma de representar os dados da questão, utilizando símbolos (formalizados ou não) ou por meio de expressões algébricas. Nesse ínterim, o professor pode auxiliar o estudante a resolver a questão por meio de um sistema de equações, tornando sua estratégia de resolução mais formal.

A segunda resolução apresentada na revista (Figura 3) é considerada como parcialmente satisfatória.

Figura 3 - segunda resolução da Questão 1


MATEMÁTICA - QUESTÃO 1

M=288 C=32
32:2=16
16·10=160 ; 160·8=128
R: Possui 160 de cor verde-escuro e 128 de cor verde-claro

Fonte: Revista Diálogos Pedagógicos (2021, p. 143).

Na resolução apresentada, o estudante afirma que M = 288 e C = 32, ou seja, que há 288 mudas e 32 canteiros, mas não apresenta os cálculos necessários para encontrar estes valores. Os valores apresentados são corretos, porém não há indícios da estratégia utilizada pelo estudante para encontrá-los. A partir dos valores dados, são apresentados os cálculos necessários para determinar sua resposta: “Possui 160 de cor verde-escuro e 128 de cor verde-claro”.

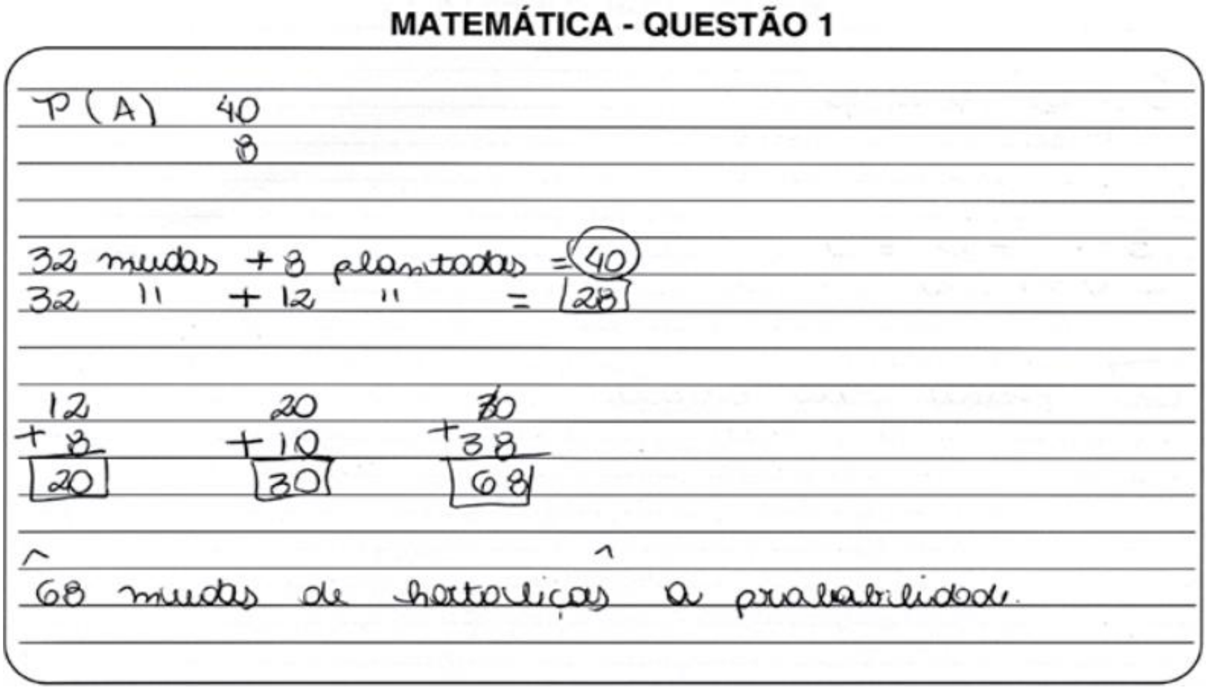
Em uma perspectiva de correção em que se considera apenas as soluções, a resolução deveria ser considerada satisfatória, tendo em vista que o estudante determina as quantidades corretas de mudas verde-escuras e verde-claras. Porém, há um comando no enunciado da questão que diz: “Apresente os cálculos realizados na resolução desta questão” e, portanto, a resolução passou a ser considerada parcialmente satisfatória.

Em um contexto de avaliação externa, sobretudo no do vestibular, nada se pode fazer com uma produção como a da Figura 3. Entretanto, em aulas de matemática, em uma perspectiva de avaliação formativa, o professor pode intervir no trabalho do estudante solicitando que apresente os cálculos e, a partir da apresentação dos cálculos, fazer outras intervenções que julgar conveniente.

Além disso, na resolução da Figura 3, o estudante escreve “160.8 = 128”, o que não representa uma igualdade correta. No contexto da resolução, é possível inferir que o estudante quis escrever “16.8 = 128”, mas por algum motivo acabou acrescentando um zero, tornando o 16 um 160. Como não se tem acesso ao estudante, não é possível confirmar se esta inferência é correta, mas no caso de aulas na perspectiva da avaliação formativa, é possível que o professor converse com o estudante e busque descobrir se de fato foi isso que ocorreu.

Por fim, a terceira produção escrita apresentada na revista (Figura 4) foi considerada insatisfatória.

Figura 4 - terceira resolução da Questão 1


MATEMÁTICA - QUESTÃO 1

P(A) 40
8

32 mudas + 8 plantadas = 40
32 " + 12 " = $\boxed{28}$

12 + 8 = $\boxed{20}$ 20 + 10 = $\boxed{30}$ 30 + 38 = $\boxed{68}$

68 mudas de hortaliças a probabilidade.

Fonte: Revista Diálogos Pedagógicos (2021, p. 143).

A resolução apresentada utiliza a notação “P(A)”. Ao analisar a produção, inicialmente, imaginou-se que P poderia representar plantio ou outra palavra relacionada ao contexto, ainda que “P(A)” formalmente esteja associado ao conceito de probabilidade. Entretanto, o estudante apresenta a palavra “probabilidade” na resposta. Não foi possível inferir o motivo pelo qual o estudante optou por trabalhar com probabilidade na resolução. Também não foi possível identificar o motivo que levou o estudante a escrever que “32 mudas + 12 plantadas = 28”, sendo que 32 + 12 = 44 e não 28.

Em uma aula de matemática, na perspectiva da avaliação formativa, o professor poderia conversar com o estudante para tentar entender por que foi escolhida a probabilidade como estratégia para resolver a questão. Uma possibilidade seria o professor perguntar ao estudante qual(is) elemento(s) do enunciado remetem à probabilidade.

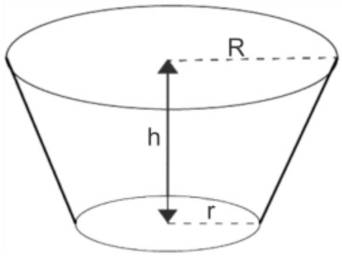
De maneira geral, a Questão 1 possibilita que os estudantes a resolvam por diferentes estratégias (menos ou mais formais). Em um contexto de avaliação externa, isso dá aos alunos a oportunidade de mostrarem o que sabem, mobilizando diferentes estratégias. Já no contexto de aulas de matemática, permite que o professor auxilie os estudantes a tornarem suas estratégias mais formais (como proposto a partir da produção da Figura 2) e a compreender as estratégias adotadas pelo estudante, auxiliando-o a explicitar melhor suas estratégias de resolução (como proposto a partir da produção da Figura 3) ou a repensar suas escolhas (como proposto a partir da produção da Figura 4).

4.2. Questão 2

A segunda questão da segunda fase do vestibular da UEL está no Quadro 2.

Quadro 2 - Questão 2 da segunda fase do Vestibular 2020 da Universidade Estadual de Londrina

Foram construídas cisternas em uma comunidade localizada no sertão nordestino, em pontos estratégicos, para que os moradores daquela localidade pudessem se abastecer de água, principalmente na época das secas. As cisternas foram construídas com formato de tronco de cone, com as seguintes medidas: o raio da base inferior mede 1 m, o raio da base superior mede 2 m e a altura mede 1,5 m, como mostra a figura a seguir.



Na época de secas, caminhões-pipas abastecem essas cisternas. Esse tipo de caminhão possui um tanque de armazenamento de água em formato cilíndrico, com 2 metros de diâmetro e 8 metros de comprimento.
Despreze as espessuras dos materiais dos quais são feitos as cisternas e o tanque do caminhão-pipa e suponha que as cisternas estejam completamente vazias de água e o tanque completamente cheio, considere ainda que não há desperdício algum de água.
Nessas condições, quantos tanques de caminhões-pipas completamente cheios de água são necessários para abastecer, no mínimo, 17 cisternas?
Apresente os cálculos realizados na resolução desta questão.

Fonte: Revista Diálogos Pedagógicos (2021, p. 144).

As expectativas de resposta são apresentadas na Figura 5.

Figura 5 – Expectativas de resposta da Questão 2

QUESTÃO 2 – EXPECTATIVA DE RESPOSTA

Conteúdo programático: Geometria Plana. Figuras geométricas: circunferência e círculo. Áreas de círculos. Geometria Espacial. Sólidos: corpos redondos (cilindro, cone). Cálculo de áreas e volumes. Proporção.

Resposta esperada:

Sejam V_c a capacidade de cada cisterna e V_t a capacidade do tanque do caminhão-pipa.

- Como a cisterna tem formato de tronco de cone, seu volume pode ser calculado por meio da fórmula:

$$V = \frac{\pi \cdot h}{3} \cdot (R^2 + R \cdot r + r^2)$$

em que R é o raio da maior base circular, r é o raio da menor base circular e h é a altura do tronco de cone. Assim, cada cisterna tem volume:

$$V_c = \frac{\pi \cdot 1,5}{3} \cdot (2^2 + 2 \cdot 1 + 1)$$
$$V_c = \frac{1,5\pi}{3} \cdot 7$$
$$V_c = 3,5\pi \text{ m}^3$$

Realizando a conversão, cada m^3 comporta 1000 L (litros) de água, logo, a capacidade da cisterna é de 3500π L de água ou, aproximadamente, 10990 L (considerando $\pi \approx 3,14$).

- Como o tanque do caminhão pipa tem formato cilíndrico, seu volume pode ser calculado por meio da fórmula:

$$V_t = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

em que r é o raio da base e h é a altura do cilindro. Assim, cada tanque do caminhão-pipa tem volume:

$$V_t = \pi \cdot 1^2 \cdot 8$$
$$V_t = 8\pi \text{ m}^3$$

Realizando a conversão, cada m^3 comporta 1000 L de água, logo, a capacidade do tanque do caminhão-pipa é de 8000π L de água ou, aproximadamente, 25120 L (considerando $\pi \approx 3,14$).

- Realizando as comparações: cada caminhão-pipa é capaz de abastecer 2 cisternas, isto é,

$$\frac{V_t}{V_c} = \frac{8\pi\ m^3}{3,5\pi\ m^3} \approx 2,28 \qquad \text{OU} \qquad \frac{V_t}{V_c} = \frac{25120}{10990} \approx 2,28$$

Assim, para abastecer 17 cisternas,

1 cisterna – 3,5π m^3
17 cisternas – 59,5π m^3

e

1 tanque de caminhão-pipa – 8π m^3
8 tanques de caminhão-pipa – 64π m^3

são necessários 8 tanques de caminhão-pipa.

Resposta alternativa:

Volume da cisterna

$$V_c = \frac{\pi \cdot 1,5}{3} \cdot (2^2 + 2 \cdot 1 + 1)$$
$$V_c = \frac{1,5 \cdot 3}{3} \cdot 7$$
$$V_c = 10,5 \text{ m}^3$$

Volume do tanque do caminhão-pipa

$$V_t = \pi \cdot r^2 \cdot h$$
$$V_t = 3 \cdot 1^2 \cdot 8$$
$$V_t = 24 \text{ m}^3$$

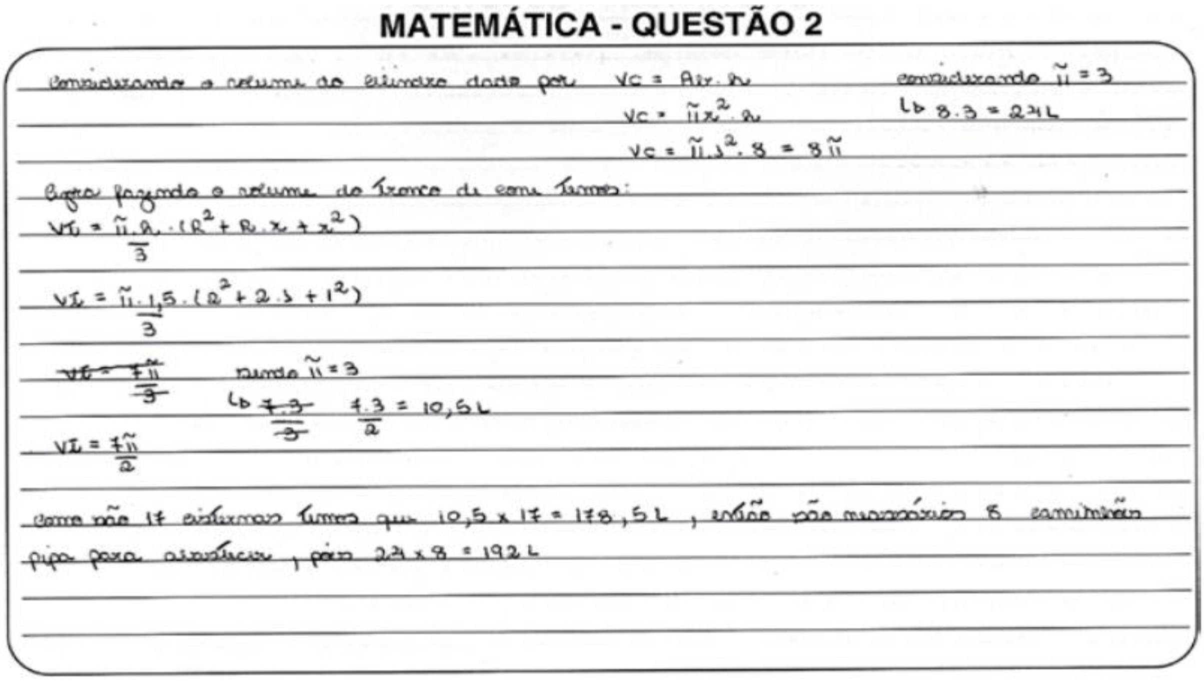
Considerando $\pi = 3$, temos que cada tanque abastece 2,28 cisternas. Assim, são necessários 8 tanques de caminhão-pipa para abastecer 17 cisternas.

Fonte: COPS (2019).

A primeira produção escrita apresentada na revista (Figura 6) foi considerada pela equipe de correção como satisfatória.

Na resolução, o estudante apresenta as fórmulas do volume do cilindro e do volume do tronco de cone. Em seguida, substitui os valores apresentados no enunciado em ambas as fórmulas, considerando π = 3 e encontrando os volumes 24 L e 10,5 L, respectivamente. Então, o estudante afirma que 17 cisternas terão 10,5 x 17 = 178,5 L e, portanto, “são necessários 8 caminhões pipa para abastecer, pois 24 x 8 = 192”.

Figura 6 - primeira resolução da Questão 2



Fonte: Revista Diálogos Pedagógicos (2021, p. 145).

Embora a resolução tenha sido considerada satisfatória, há alguns aspectos a serem discutidos na produção da Figura 6. Primeiro, destaca-se que o estudante, ao calcular o volume dos sólidos, apresentou a resposta em litros e não em metros cúbicos. Entende-se que é comum que os estudantes (e professores de matemática) confundam os conceitos de volume e capacidade. Porém, a produção escrita do estudante é uma oportunidade para que sejam discutidos os conceitos de capacidade e volume e sua relação. Além disso, a conversão feita pelo estudante está incorreta, pois considerou que 1 m³ equivale a 1 L, quando, na verdade, 1 m³ equivale a 1000 L.

Um segundo ponto interessante a se destacar na produção escrita é que o estudante considerou que π = 3, assim como foi feito na resposta alternativa das expectativas de respostas. Outros estudantes podem ter adotado π = 3,14, π = 3,1, apenas utilizado π nos cálculos ou podem ter existido outras possibilidades.

No caso da Questão 2, tanto a conversão incorreta feita pelo estudante (1 m³ equivale a 1L), quanto a escolha de adotar π = 3, não influenciam no resultado final, visto que uma das etapas envolve calcular o quociente entre a capacidade dos tanques dos caminhões-pipa e a capacidade de uma cisterna. Nessa etapa, então, o produto por 1000 no cálculo das duas capacidades e o arredondamento no valor de π faz com que o quociente desses números seja 1. Desse modo, para os cálculos, não importa o valor de π adotado pelos estudantes, bem como não multiplicar por 1000 o volume não influencia no resultado. Isso não significa que considerar 1 m³ equivale a 1 L seja correto, mas que não influenciou na solução. Essa discussão pode ser feita com os estudantes como uma oportunidade de discutirem a respeito da relação entre multiplicação e divisão.

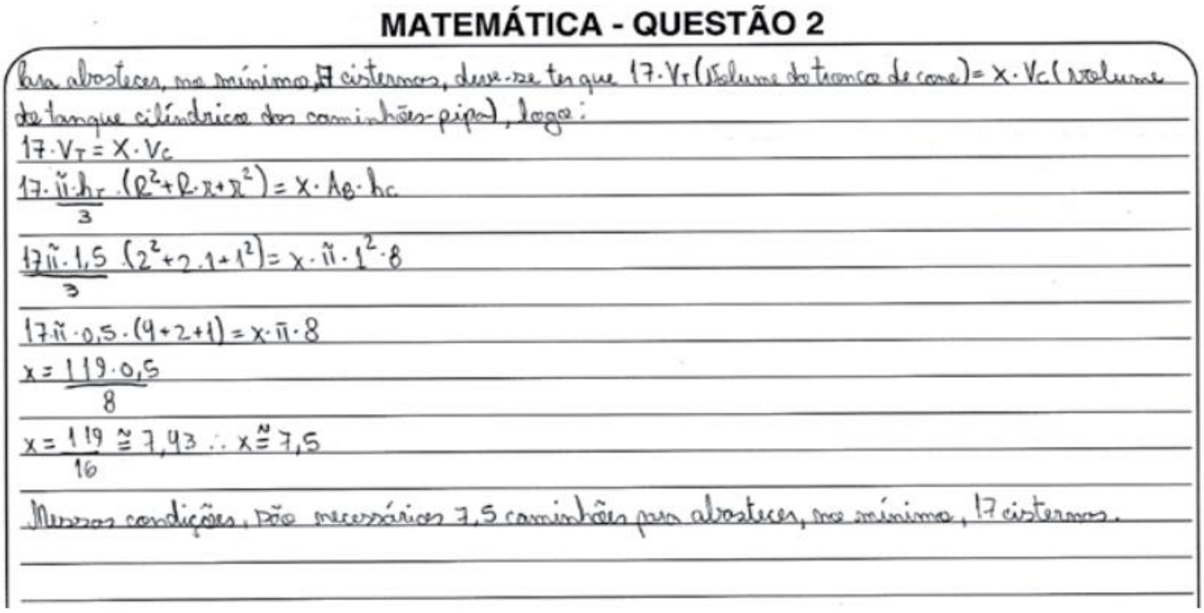
Não foi possível identificar na revista o motivo pelo qual a produção escrita foi considerada como satisfatória, uma vez que foi adotado 1 m³ equivale a 1 L, apenas encontra-se a explicação seguinte:

> A produção é considerada satisfatória porque o candidato apresenta uma estratégia correta para resolver o problema, apresentando adequadamente os procedimentos necessários e corretos para a obtenção dos volumes da cisterna e do tanque do caminhão-pipa. Além disso, calcula corretamente o volume total necessário para o abastecimento das 17 cisternas e a quantidade mínima de tanques de caminhões-pipas com volume correspondente que as abasteceriam (DIÁLOGOS PEDAGÓGICOS, 2021, p. 146).

A segunda produção apresentada na revista (Figura 7) foi considerada como parcialmente satisfatória.

Na resolução, o estudante escreve a expressão $17.V_T = x.V_C$, em que V_T e V_C representam os volumes do tronco de cone e do cilindro, respectivamente. Infere-se que x representa a quantidade de caminhões necessários para encher as cisternas. Então, o estudante substitui V_T e V_C pelas fórmulas do volume do tronco de cone e do cilindro, respectivamente, substitui os valores e determina que $x \cong 7,43\ldots$ e conclui que $x \cong 7,5$, apresentando como resposta: “nessas condições, são necessários 7,5 caminhões para abastecer, no mínimo, 17 cisternas.

Figura 7 - segunda resolução da Questão 2


MATEMÁTICA - QUESTÃO 2

Para abastecer, no mínimo, 17 cisternas, deve-se ter que $17 \cdot V_T$ (Volume do tronco de cone) $= x \cdot V_c$ (volume do tanque cilíndrico dos caminhões-pipa), logo:

$17 \cdot V_T = X \cdot V_c$

$17 \cdot \frac{\pi \cdot h_T}{3} \cdot (R^2 + R \cdot r + r^2) = x \cdot A_B \cdot h_c$

$\frac{17\pi \cdot 1,5}{3} (2^2 + 2 \cdot 1 + 1^2) = x \cdot \pi \cdot 1^2 \cdot 8$

$17 \cdot \pi \cdot 0,5 \cdot (4+2+1) = x \cdot \pi \cdot 8$

$x = \frac{119 \cdot 0,5}{8}$

$x = \frac{119}{16} \cong 7,43 \therefore x \cong 7,5$

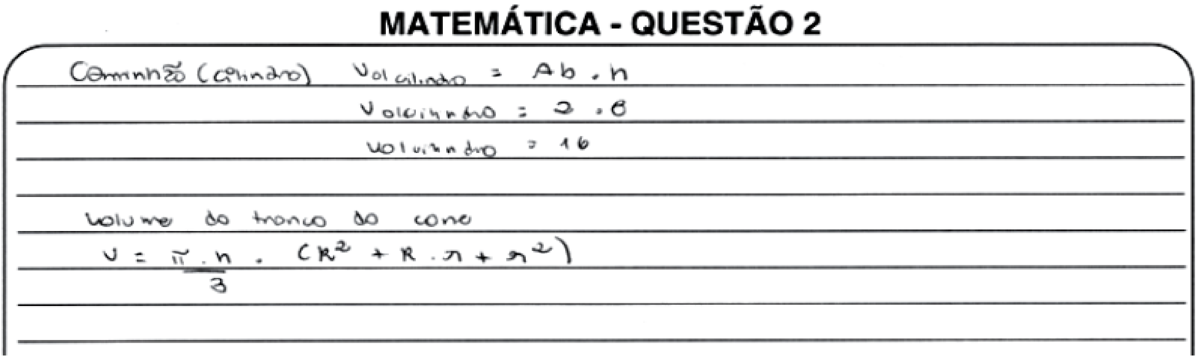
Nessas condições, são necessários 7,5 caminhões para abastecer, no mínimo, 17 cisternas.

Fonte: Revista Diálogos Pedagógicos (2021, p. 146).

Entende-se que a produção do estudante foi considerada como parcialmente satisfatória por apresentar 7,5 como resposta ao invés de 8. Na divisão de dois números em que se tem a ideia de medir, como no caso da Questão 2, o quociente da divisão pode ser utilizado para dar resposta à questão ou pode ser arredondado para o maior inteiro mais próximo ou para o menor inteiro mais próximo para ser solução, a depender da natureza da grandeza solicitada (ROCHA; SILVA, 2019). Neste caso, a quantidade de caminhões é uma grandeza discreta e deve ser representada por um número natural e não por um número decimal. No contexto de aulas de matemática, o professor pode utilizar a produção escrita da Figura 7 para discutir isso com os estudantes.

A terceira produção referente à Questão 2 (Figura 8) é considerada como insatisfatória.

Figura 8 - terceira resolução da Questão 2


MATEMÁTICA - QUESTÃO 2

Caminhão (cilindro) Vol cilindro = Ab . h

Volcilindro = 2 . 8

Volcilindro = 16

Volume do tronco do cone

$V = \frac{\pi \cdot h}{3} \cdot (R^2 + R \cdot r + r^2)$

Fonte: Revista Diálogos Pedagógicos (2021, p. 146).

Na produção escrita da Figura 8, o aluno apresenta as fórmulas do volume do cilindro e do tronco de cone e substitui A_b e h por 2 e 8, respectivamente, na fórmula do volume do cilindro. Observa-se que o estudante mostra saber quais fórmulas devem ser utilizadas, mas não dá sequência à resolução da questão.

Além disso, o estudante utiliza o número 2 como se representasse a área da base do cilindro. Infere-se que o número 2 foi identificado pelo estudante no enunciado como aquele que representa o raio da base do cilindro. Nesse sentido, em um contexto de aulas de matemática, o professor poderia perguntar ao estudante o que o 2 representa, qual o significado de A_b na fórmula e qual a relação entre o raio da base e a área da base. Caso o estudante não saiba responder às perguntas, o professor pode propor uma pesquisa ou abrir a discussão para a turma.

As produções escritas da Questão 2 revelam que, em geral, para resolver corretamente a questão, é necessário identificar as fórmulas de cada figura geométrica citada no enunciado. Além disso, observa-se que o contexto da questão é necessário para avaliar a resposta final, sendo que a grandeza solicitada influencia no arredondamento a ser feito no valor encontrado. Esse tipo de questão pode promover um ambiente de discussão e aprendizagem em um contexto de avaliação formativa.

4.3. Questão 3

A terceira questão da segunda fase do vestibular da UEL está no Quadro 3.

Quadro 3 - Questão 3 da segunda fase do Vestibular 2020 da Universidade Estadual de Londrina

Em uma prova, por um erro de impressão, uma das questões apareceu da seguinte forma: Determine a solução da equação $\frac{\quad}{2x+1} - \frac{1}{x} = 0$ no conjunto dos números reais positivos.   Sabe-se que o numerador apagado é um número inteiro positivo.   Considerando que o conjunto solução da equação contém números reais maiores ou iguais a 1, determine o numerador apagado.   Apresente os cálculos realizados na resolução desta questão.

Fonte: Revista Diálogos Pedagógicos (2021, p. 147).

As expectativas de resposta são apresentadas na Figura 9.

Figura 9 – Expectativas de resposta da Questão 3

QUESTÃO 3 – EXPECTATIVA DE RESPOSTA

Conteúdo programático: Polinômios e Equações Algébricas. Equações algébricas: definição, conceito de raiz, multiplicidade de raízes. Números naturais e números inteiros: operações e propriedades. Inequações.

Resposta esperada:

Seja A o número inteiro positivo apagado. Assim, temos a seguinte equação:

$$\frac{A}{2x+1} - \frac{1}{x} = 0$$

que é equivalente à equação:

$$\frac{A \cdot x - (2x+1)}{(2x+1)x} = 0$$

A existência da equação depende que $x \neq 0$ e $x \neq -\frac{1}{2}$. Além disso, a solução da equação é dada por:

$$\begin{gathered} A \cdot x - (2x+1) = 0 \\ Ax - 2x - 1 = 0 \\ x(A-2) - 1 = 0 \\ x(A-2) = 1 \\ x = \frac{1}{A-2} \end{gathered}$$

Note que $A \neq 2$ e que o conjunto solução da equação contém números maiores ou iguais a 1, logo,

$$\begin{gathered} \frac{1}{A-2} \geq 1 \\ \frac{1}{A-2} - \frac{A-2}{A-2} \geq 0 \\ \frac{1-A+2}{A-2} \geq 0 \\ \frac{3-A}{A-2} \geq 0 \end{gathered}$$

Assim, $A \in (2, 3]$. Como $A \neq 2$ e A é inteiro, resta apenas $A = 3$.
Portanto, a solução da equação é $x = \frac{1}{A-2} = 1$, e o numerador apagado é o número 3.

Resposta alternativa: Seja A o número inteiro positivo apagado. Assim, temos a seguinte equação:

$$\frac{A}{2x+1} - \frac{1}{x} = 0$$

que é equivalente à equação:

$$\frac{A}{2x+1} = \frac{1}{x}$$

A existência da equação depende que $x \neq 0$ e $x \neq -\frac{1}{2}$. Além disso, a solução da equação é dada por:

$$\begin{gathered} A \cdot x = 2x + 1 \\ Ax - 2x = 1 \\ x(A-2) = 1 \\ x = \frac{1}{A-2} \end{gathered}$$

Note que $A \neq 2$ e que as soluções para x devem ser maiores ou iguais a 1, logo podemos construir a tabela a seguir.

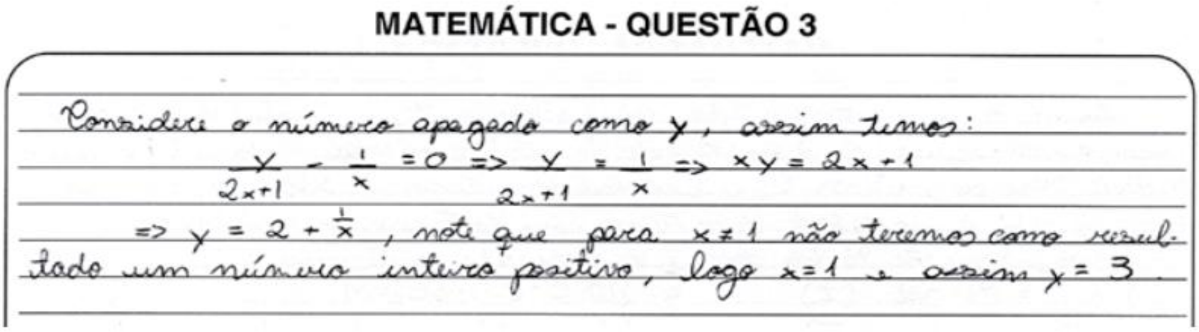
A	x
1	-1
2	$-$
3	1
4	$\frac{1}{2}$
5	$\frac{1}{3}$

Como A é inteiro e positivo, a única solução é $A = 3$, que é o numerador apagado e $x = 1$.

Fonte: COPS (2019).

A primeira produção escrita apresentada na revista (Figura 10) foi considerada pela equipe de correção como satisfatória.

Figura 10 - primeira resolução da Questão 3


MATEMÁTICA - QUESTÃO 3

Considere o número apagado como y, assim temos:

$\frac{y}{2x+1} - \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \frac{y}{2x+1} = \frac{1}{x} \Rightarrow xy = 2x+1$

$\Rightarrow y = 2 + \frac{1}{x}$, note que para $x \neq 1$ não teremos como resultado um número inteiro positivo, logo $x = 1$ e assim $y = 3$.

Fonte: Revista Diálogos Pedagógicos (2021, p. 149).

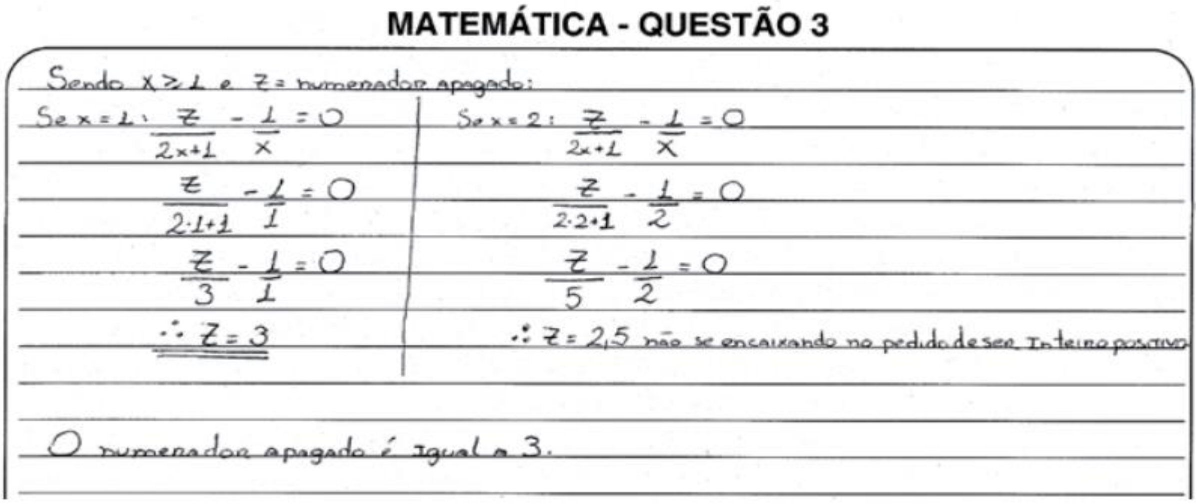
A resolução apresentada na Figura 10 adota, inicialmente, a estratégia proposta nas expectativas de respostas (Figura J), tomando y como o valor do numerador apagado. Entretanto, ao chegar na expressão $xy = 2x + 1$, o estudante efetua uma divisão por x nos dois membros da igualdade, encontrando a expressão $y = 2 + \frac{1}{x}$. Então, o estudante analisa a expressão, afirmando que “para x ≠ 1 não teremos como resultado um número inteiro positivo, logo x = 1 e assim y = 3.

Ao efetuar operações com os dois membros da equação, o estudante não justifica os passos feitos, embora, matematicamente, não apresentem algum equívoco. Como sua resolução foi considerada satisfatória, o professor poderia, em um contexto de aulas de matemática, propor ao estudante que justifique cada passo adotado na resolução. Nesse sentido, ao explicar a divisão por x nos dois membros da igualdade, o professor pode questionar por que essa operação é válida. Pode-se discutir que dividir expressões algébricas por uma variável ou incógnita pressupõe admitir que essa variável ou incógnita não seja 0, tendo em vista que a divisão por 0 não é definida em matemática. No caso da Questão 3, o valor de x não é 0, nem -0,5, porque esses valores fariam com que a equação proposta não tivesse solução e, por isso, a divisão por x efetuada pelo estudante é válida.

A segunda resolução apresentada na revista (Figura 11) é considerada parcialmente satisfatória.

Na resolução, o estudante toma z como o numerador apagado e, em uma estratégia de tentativa e erro, atribui valores para x para verificar se z é inteiro ou não. Como o enunciado afirma que x ≥ 1, o estudante inicia o procedimento admitindo que x = 1 e encontrando z = 3, um valor inteiro. Em seguida, admite que x = 2 e encontra z = 2,5, um valor não inteiro, concluindo, então, que “o numerador apagado é igual a 3”.

Figura 11 - segunda resolução da Questão 3



MATEMÁTICA - QUESTÃO 3

Sendo $x \geq 1$ e z = numerador apagado:

Se $x = 1$: $\frac{z}{2x+1} - \frac{1}{x} = 0$	Se $x = 2$: $\frac{z}{2x+1} - \frac{1}{x} = 0$
$\frac{z}{2\cdot1+1} - \frac{1}{1} = 0$	$\frac{z}{2\cdot2+1} - \frac{1}{2} = 0$
$\frac{z}{3} - \frac{1}{1} = 0$	$\frac{z}{5} - \frac{1}{2} = 0$
$\therefore z = 3$	$\therefore z = 2{,}5$ não se encaixando no pedido de ser inteiro positivo

O numerador apagado é igual a 3.

Fonte: Revista Diálogos Pedagógicos (2021, p. 149).

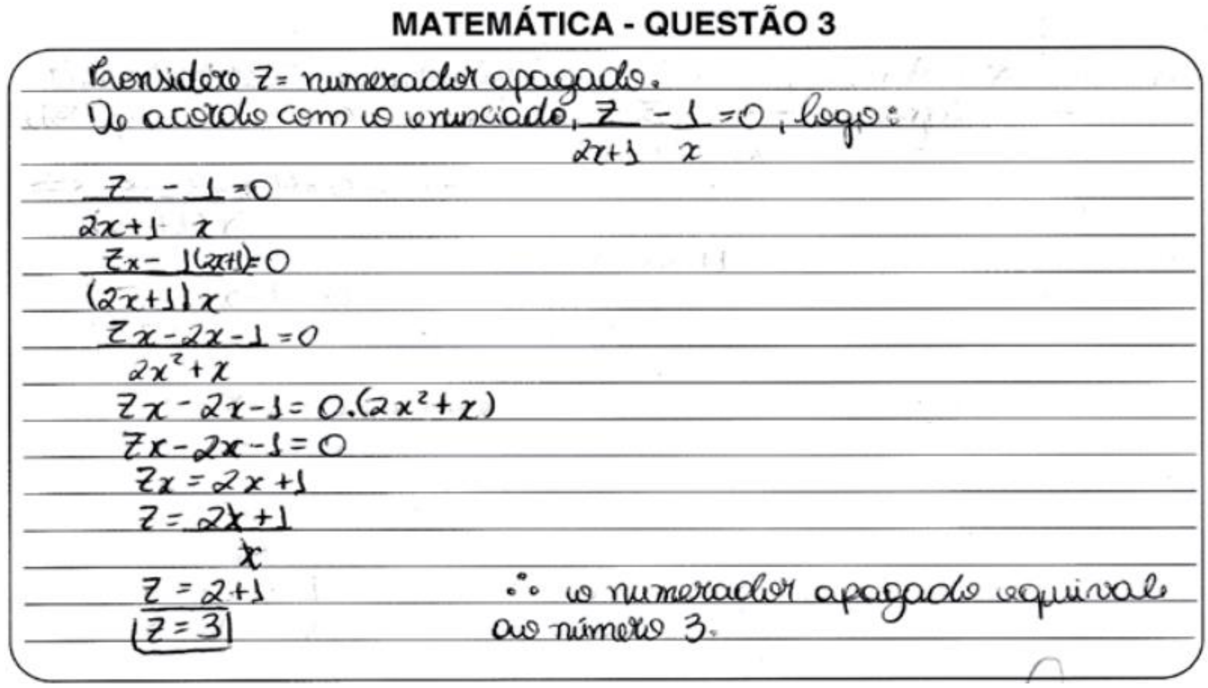
A produção foi considerada como parcialmente satisfatória pela revista, pois “o candidato apresenta uma resposta que satisfaz as condições estipuladas no problema. No entanto, a estratégia adotada é tentativa e erro, que é válida, porém que não conduz a uma solução que garanta a unicidade da resposta” (DIÁLOGOS PEDAGÓGICOS, 2021, p. 149).

Nesse sentido, entende-se que a estratégia escolhida conduz a uma resposta correta, mas que não necessariamente é única. Em um contexto de aulas de matemática, em que o professor pode efetuar intervenções nas produções dos estudantes, pode questionar se existiria algum inteiro maior ou igual a 1 que também implicasse z inteiro. Isso promoveria ao estudante a possibilidade de justificar a unicidade da resposta encontrada. Caso o estudante continuasse testando os próximos valores da sequência de inteiros positivos (3, 4, …), o professor poderia intervir questionando como o estudante faria para testar todos os números.

Essa seria uma oportunidade para que o professor pudesse auxiliar o estudante a utilizar uma estratégia mais formal, trabalhando com as incógnitas da questão e não substituindo números.

A terceira resolução (Figura 12) foi considerada como insatisfatória.

Figura 12 - terceira resolução da Questão 3


MATEMÁTICA - QUESTÃO 3

Considero Z = numerador apagado.

De acordo com o enunciado, $\frac{Z}{2x+1} - \frac{1}{x} = 0$, logo:

$$\frac{Z}{2x+1} - \frac{1}{x} = 0$$

$$\frac{Zx - 1(2x+1)}{(2x+1)x} = 0$$

$$\frac{Zx-2x-1}{2x^2+x} = 0$$

$$Zx-2x-1 = 0.(2x^2+x)$$

$$Zx-2x-1 = 0$$

$$Zx = 2x+1$$

$$Z = \frac{2x+1}{x}$$

$$Z = 2+1$$

$$\boxed{Z=3}$$

∴ o numerador apagado equivale ao número 3.

Fonte: Revista Diálogos Pedagógicos (2021, p. 150).

Na resolução apresentada, o estudante procede como na expectativa de resposta, tomando z como o numerador apagado. Porém, em determinado momento, o estudante considera que a expressão $z = \frac{2x+1}{x}$ é equivalente a z = 2 + 1, simplificando o x do numerador com o x do denominador. Por fim, o estudante conclui que “o numerador apagado equivale ao número 3”.

Observa-se que a resposta apresentada na Figura 12 é, de fato, a resposta que resolve a questão, ou seja, o numerador apagado foi 3. Entretanto, a resolução apresenta um erro que, por ocasião dos números utilizados na questão, pode conduzir a uma resposta correta. Se a questão fosse objetiva e não se tivesse acesso à resolução, não seria possível identificar o erro e não se poderia fazer nada para que o estudante pudesse refletir a esse respeito.

Além disso, em aulas de matemática, se o professor corrigir as resoluções dos estudantes, levando em conta apenas suas respostas, possivelmente não identificaria tal erro. Isso ressalta a importância, na análise da produção escrita, de que o professor investigue as produções dos estudantes, identificando o que mostram saber e qual sua compreensão a respeito dos procedimentos matemáticos. No caso da produção escrita apresentada, o que o estudante mostra saber é, matematicamente, incorreto. Então, em um contexto de aulas de matemática, o professor poderia fazer intervenções para o estudante se dar conta de que $z = \frac{2x+1}{x}$ não é equivalente a z = 2 + 1.

Para isso, o professor pode propor que o estudante analise a fração algébrica $\frac{2x+1}{x}$, pedindo que o estudante adote x = 5 e calcule o valor do numerador e do denominador dessa fração. Nesse caso, o numerador é 11 e o denominador 5, fazendo com que a fração seja $\frac{11}{5}$, que é diferente de 3. Para outros valores de x isso também acontece, exceto para x = 1.

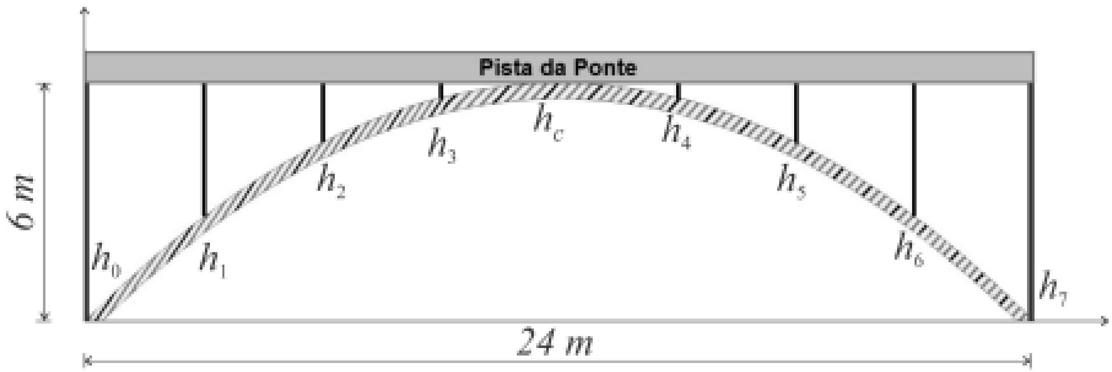
As três resoluções apresentadas para a Questão 3 tiveram como resposta que o numerador apagado é 3, ainda que uma seja considerada satisfatória, uma parcialmente satisfatória e uma insatisfatória. Isso denota que as correções com base apenas na resposta final fazem com que o professor tenha poucos indícios sobre a aprendizagem dos estudantes e reforça que a produção escrita é uma fonte rica de informações para que o professor conduza suas intervenções e suas aulas.

4.4. Questão 4

A quarta questão da segunda fase do vestibular da UEL está no Quadro 4.

Quadro 4 - Questão 4 da segunda fase do Vestibular 2020 da Universidade Estadual de Londrina

Uma ponte, composta de pista, colunas e base de sustentação, será construída conforme a figura a seguir.



A pista da ponte é paralela ao solo e é apoiada por colunas de sustentação h_0, h_1, h_2, h_3, h_c, h_4, h_5, h_6 e h_7 perpendiculares à pista e que possuem duas extremidades: na pista e na base de sustentação, a qual possui formato parabólico, cujo lugar geométrico coincide com parte do gráfico de uma função polinomial de segundo grau da forma $f(x) = ax^2 + bx^2 + c$, com $a \neq 0$.

Suponha que as colunas têm espaçamentos iguais entre elas, que o comprimento da coluna central h_c é zero, que a pista da ponte tem 24 metros de comprimento e que sua altura é de 6 metros em relação ao solo.

Admitindo que as espessuras das colunas, da pista, do solo e da base de sustentação são desprezíveis, determine os comprimentos das colunas de sustentação h_1 e h_5.

Apresente os cálculos realizados na resolução desta questão.

Fonte: Revista Diálogos Pedagógicos (2021, p. 150).

As expectativas de resposta são apresentadas na Figura 13.

Figura 13 – Expectativas de resposta da Questão 4

QUESTÃO 4 – EXPECTATIVA DE RESPOSTA

Conteúdo programático: Relações e funções: domínio, contradomínio, imagem e gráficos, crescimento e decrescimento. Função quadrática. Coordenadas cartesianas na reta e no plano. Sistemas lineares.

Resposta esperada:

Primeiro vamos determinar a função quadrática cujo gráfico representa a base de sustentação da ponte.

Como $f(x) = ax^2 + bx^2 + c$, podemos reescrever a função para o seguinte tipo:

$$f(x) = (a+b)x^2 + c$$

Escolhendo adequadamente um sistema de coordenadas façamos:

Caso 1:

$$f(-12) = 0, \qquad f(0) = 6, \qquad f(12) = 0$$

Assim, obtemos um sistema de equações:

$$\begin{cases} (a+b)(-12)^2 + c = 0 \\ (a+b)(0)^2 + c = 6 \\ (a+b)(12)^2 + c = 0 \end{cases} \quad \text{cuja solução é } (a+b) = -\frac{1}{24} \text{ e } c = 6$$

Então a função neste caso é dada por $f(x) = -\frac{1}{24}x^2 + 6$

Assim podemos obter:

$$h_1 = 6 - f(9) = 6 - \left(\left(-\frac{1}{24}\right)9^2 + 6\right) = \frac{81}{24} = \frac{27}{8}$$
$$h_5 = 6 - f(6) = 6 - \left(\left(-\frac{1}{24}\right)6^2 + 6\right) = \frac{36}{24} = \frac{3}{2}$$

Portanto, as colunas h_1 e h_5 medem respectivamente, 27/8 e 3/2 metros.

Caso 2:

$$f(-12) = -6, f(0) = 0 \text{ e } f(12) = -6$$

Assim obtemos um sistema de equações:

$$\begin{cases} (a+b)(-12)^2 + c = -6 \\ (a+b)(0)^2 + c = 0 \\ (a+b)(12)^2 + c = -6 \end{cases} \quad \text{cuja solução é } (a+b) = -\frac{1}{24} \text{ e } c = 0$$

Então a função neste caso é dada por $f(x) = -\frac{1}{24}x^2$

Assim podemos obter:

$$h_1 = |f(-9)| = \left|\left(-\frac{1}{24}\right)(-9)^2\right| = \left|-\frac{81}{24}\right| = \frac{27}{8}$$
$$h_5 = |f(6)| = \left|\left(-\frac{1}{24}\right)(6)^2\right| = \left|-\frac{36}{24}\right| = \frac{3}{2}$$

Portanto, as colunas h_1 e h_5 medem respectivamente, 27/8 e 3/2 metros.

Nota: Cabe salientar, que muitos outros sistemas de coordenadas podem ser adotados, como exemplificados nos casos 1 e 2, e desde que sejam escolhidos adequadamente, guardando as devidas razões entre o comprimento máximo da coluna de sustentação ($6m$) e o comprimento da pista da ponte ($24m$), as alturas das colunas de sustentação h_1 e h_5 serão sempre 27/8 e 3/2 metros.

Resposta alternativa:
Vamos aproximar os dados do problema para uma função quadrática convencional do tipo:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Considerando que uma das raízes é a própria origem do plano cartesiano, vamos adotar $x' = 0$ e $x'' = 24$ sabendo que a função atinge seu valor máximo em $x = 12$.
Desta forma, temos

$$f(0) = 0, \qquad f(24) = 0, \qquad f(12) = 6$$

Note que, da primeira igualdade $f(0) = 0$, obtemos $c = 0$. Substituindo as outras duas igualdades em f, geramos o sistema

$$\begin{cases} a \cdot 24^2 + b \cdot 24 = 0 \\ a \cdot 12^2 + b \cdot 12 = 6 \end{cases}$$

que equivale ao sistema

$$\begin{cases} 24a + b = 0 \\ 24a + 2b = 1 \end{cases}$$

Da primeira equação, obtemos $b = -24a$. Substituindo na segunda equação, obtemos:

$$24a + 2(-24a) = 1 \Rightarrow 24a + -48a = 1 \Rightarrow -24a = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{24}$$

e também

$$b = -24a = -24\left(-\frac{1}{24}\right) = 1$$

Então a função f é dada por $f(x) = -\frac{1}{24}x^2 + x$

Vamos calcular h_1 e h_2, que é simétrica à h_5.

Como $f(3) = -\frac{1}{24} \cdot 3^2 + 3 = \frac{21}{8}$, segue que $h_1 = 6 - f(3) = 6 - \frac{21}{8} = \frac{27}{8}$.

Como $f(6) = -\frac{1}{24} \cdot 6^2 + 6 = \frac{9}{2}$, segue que $h_2 = h_5 = 6 - \frac{9}{2} = \frac{3}{2}$, ou seja,

$h_1 = \frac{27}{8}$ metros e $h_2 = h_5 = \frac{3}{2}$ metros.

Fonte: COPS (2019).

A primeira produção escrita apresentada (Figura 14) foi considerada satisfatória.

Figura 14 - primeira resolução da Questão 4

MATEMÁTICA - QUESTÃO 4

Descobrindo a parabola, com 3 pontos conhecidos.
A(0,0) ; B(12,6) ; C(24,0)
Substituindo os pontos de A, tem-se $f(x) = a.0^2 + b.0 + c = 0$,
temos que $c = 0$
Substituindo os pontos de B, tem-se $6 = a.12^2 + b.12$, achando equação 1: $6 = 144a + 12b$.
Substituindo os pontos de C, tem-se $0 = a.24^2 + b24$, achando equação 2: $0 = 576a + 24b$
Escalonando as equações 1 e 2
$\begin{cases} 6 = 144a + 12b & x(-4) \\ 0 = 576a + 24b \end{cases}$ $\begin{cases} 6 = 144a + 12b \\ -24 = 0a + (-24b) \end{cases}$ $-24 = -24b$, logo $b = 1$
Substituindo $b=1$ na equação 1, $6 = 144a + 12$, Temos que $a = \frac{-6}{144}$
Obtemos assim a parabola $f(x) = \frac{-6}{144}x^2 + x$
Tem-se 8 espaçamento iguais em 24m. $24 \div 8 = 3$, tem-se 3m por espaçamento
x do ponto $h1 = 3$, substituindo na parabola, tem que $y = 2,6$. Calculando coluna $h1: 6 - 2,6 = 3,4$
x do ponto $h5 = 18$, substituindo na parabola, tem que $y = 4,5$. Calculando coluna $h5: 6 - 4,5 = 1,5$
Logo, o comprimento da coluna $h1 = 3,4m$ e $h5 = 1,5m$

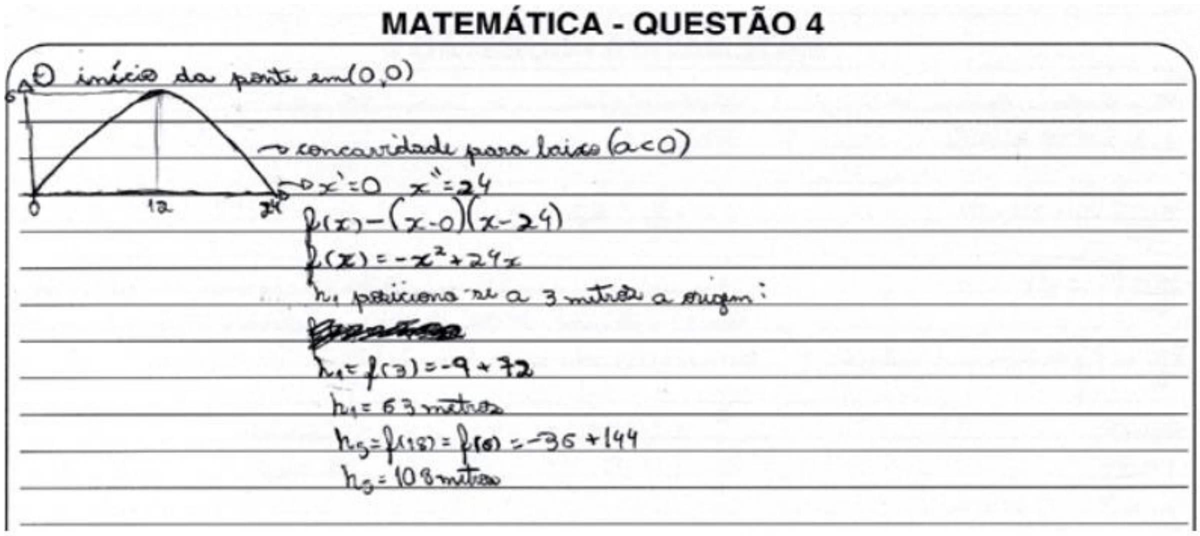
Fonte: Revista Diálogos Pedagógicos (2021, p. 153).

Na resolução, o estudante apresenta as coordenadas dos pontos A, B e C, que representam as interseções da parábola com o eixo x e o vértice da parábola, substitui as coordenadas dos pontos na expressão $f(x) = ax^2 + bx + c$, encontrando $c = 0$ e um sistema linear com solução $a = -\frac{6}{144}$ e b=1. Desse modo, a equação encontrada foi $f(x) = -\frac{6}{144}x^2 + x$. Então, o estudante substitui x por 3 e por 18 (valores que representam as coordenadas x de h_1 e h_5, respectivamente), encontra f(3) e f(18) e efetua 6 – f(3) e 6 – f(18), determinando que “o comprimento da coluna $h_1 = 3{,}4$ m e $h_5 = 1{,}5$ m”.

Observa-se que o estudante resolve a questão com um procedimento semelhante ao adotado na resposta alternativa das expectativas de resposta (Figura O), que utiliza a expressão $f(x) = ax^2 + bx + c$ para expressar a lei de formação da função representada pela parábola e não $f(x) = ax^2 + bx^2 + c$, como proposto no enunciado. Desse modo, em aulas de matemática, o professor poderia propor que o estudante utilizasse $f(x) = ax^2 + bx^2 + c$ em sua resolução e discutir com o estudante quais as diferenças entre as leis de formação encontradas.

A segunda resolução (Figura 15) foi considerada parcialmente satisfatória.

Figura 15 - segunda resolução da Questão 4



Fonte: Revista Diálogos Pedagógicos (2021, p. 154).

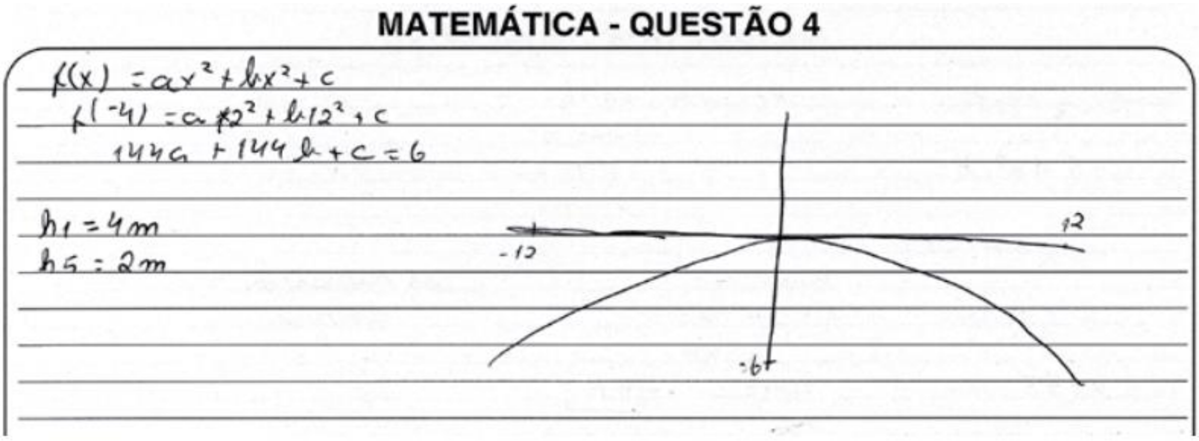
Na resolução apresentada, o estudante esboça o gráfico de uma parábola e escreve: “concavidade para baixo ($a < 0$)”. Identifica que as raízes da equação que representa a lei de formação da função são $x' = 0$ e $x'' = 24$ e escreve $f(x) – (x – 0)(x – 24)$, encontrando uma lei de formação para a função que representa a parábola $f(x) = -x^2 + 24x$. Substitui x por 3 e por 18 (valores que representam as coordenadas x de h_1 e h_5, respectivamente), encontrando $h_1 = 63$ m e $h_5 = 108$ m.

É possível inferir que, ao escrever $f(x) – (x – 0)(x – 24)$, o estudante considerou $a = -1$ como se fosse equivalente a $a < 0$ e esqueceu de apresentar o símbolo “=” entre f(x) e o sinal de –. O fato de ter esquecido de apresentar o símbolo = não influenciou na resolução, mas considerar $a = -1$ fez com que a equação encontrada não fosse a lei de formação da função representada pela parábola da questão.

Então, em um contexto de aulas de matemática, o professor poderia propor ao aluno que apresentasse as coordenadas do vértice da parábola a partir de seu desenho e substituísse os valores na equação encontrada. Como o vértice da parábola do esboço feito pelo aluno é dado pelas coordenadas (12, 6), ao substituir na equação $f(x) = -x^2 + 24x$, o estudante obteria $6 = - 12^2 + 24.12$, ou seja, $6 = - 144 + 288$, o que não é uma igualdade verdadeira. Depois disso, o professor pode aproveitar e discutir com o aluno o valor de a que, apesar de ser negativo, não é necessariamente igual a -1.

A terceira resolução (Figura 16) foi considerada como insatisfatória.

Figura 16 - terceira resolução da Questão 4



Fonte: Revista Diálogos Pedagógicos (2021, p. 154).

Na produção escrita, o estudante esboça uma parábola cujo vértice está na origem do sistema de coordenadas cartesianas. Apresenta, também, a expressão $f(x) = ax^2 + bx^2 + c$ e substitui x por 12, encontrando $f(-4) = a.12^2 + b.12^2 + c$ e 144ª + 144b + c = 6, concluindo que $h_1 = 4$ m e $h_5 = 2$ m.

A produção escrita foi considerada insatisfatória pela revista, pois

> o candidato demonstra apenas uma tentativa de interpretar e abordar o problema. Associa o desenho da ponte à uma parábola com concavidade voltada para baixo e inicia algum procedimento associado a uma função quadrática do tipo convencional, mas sem continuidade (DIÁLOGOS PEDAGÓGICOS, 2021, p. 154).

Em aulas de matemática, o professor poderia propor ao estudante que continuasse sua resolução ou que justificasse cada um dos procedimentos adotados até então para a resolução da questão. Nesse caso, o professor pode auxiliar o estudante a compreender as informações do enunciado, a identificar quais informações seriam utilizadas para resolver a questão e a justificar os passos da resolução.

Embora a Questão 4 tenha apresentado a expressão $f(x) = ax^2 + bx^2 + c$ para representar a lei de formação de uma função quadrática, admitiu como satisfatórias as resoluções em que os candidatos utilizaram $f(x) = ax^2 + bx + c$. Isso denota um aspecto da avaliação em que o professor não quer avaliar as produções dos estudantes a partir de um único ponto de vista, mas levando em consideração suas escolhas e estratégias.

5 Algumas considerações

O objetivo deste artigo era analisar as produções escritas de Matemática do Vestibular 2020 da Universidade Estadual de Londrina disponibilizadas na revista Diálogos Pedagógicos da própria instituição, além de propor intervenções que poderiam ser utilizadas em aulas de matemática como ponto de partida para oportunizar aprendizagem. Para cada resolução de cada questão, foi apresentada uma descrição das estratégias e procedimentos utilizados pelos estudantes, inferências e interpretações sobre suas resoluções e indicações de algumas intervenções possíveis, caso aquelas produções escritas fossem produzidas em aulas de matemática.

Nesse sentido, a análise da produção escrita se mostrou como uma estratégia para a produção de intervenções e discussões em aulas de matemática. Dependendo do envolvimento dos alunos com as intervenções do professor, outros caminhos podem ser percorridos para a condução dos estudantes.

As explorações das resoluções, presentes neste trabalho, com intervenções que oportunizam ao estudante reflexão sobre suas produções, aliadas ao potencial da análise da produção escrita revelada a partir do que o estudante sabe, podem também evidenciar ao professor, a relevância de (re)conhecer estratégias/procedimentos utilizados por estudantes, quais são seus erros e a natureza deles e o modo como estão lidando com as questões, observando caminhos para futuras intervenções a serviço dos processos de ensino e de aprendizagem.

Referências

BARLOW, Michel. **Avaliação escolar**: mitos e realidades. Tradução Fátima Murad. Porto Alegre: Artmed, 2006.

BURIASCO, Regina Luzia Corio de; FERREIRA, Pamela Emanueli Alves; CIANI, Andreia Büttner. Avaliação como prática de investigação (alguns apontamentos). **BOLEMA - Boletim de Educação Matemática**, UNESP - Rio Claro, v. 22, n. 33, p. 69-96, 2009.

COPS. Consulta de Provas e Gabaritos Definitivos, 2019. Provas e Expectativas de Respostas - 2ª FASE. Disponível em: <https://www.cops.uel.br/v2/ProvasGabaritos/ConsultarProvasExpectativas2FaseVestibular/Selecao/245/Fase/2/Atividade/6409>. Acesso em: 27 de dez. de 2021.

DE LANGE, Jan. **Framework for classroom assessment in mathematics**. Madison: WCER, 1999.

DIÁLOGOS PEDAGÓGICOS. Londrina: UEL, 2021. v. 12. Disponível em: <https://www.cops.uel.br/v2/documento.php?id=20>. Acesso em: 05 jan. 2022.

HADJI, Charles. **A Avaliação, Regras do Jogo**. Portugal: Porto Editora, 1994. 190 p.

LUCKESI, Cipriano Carlos. **Avaliação da aprendizagem componente do ato pedagógico.** São Paulo: Cortez, 2011

PEDROCHI JUNIOR, Osmar. **A Avaliação Formativa como Oportunidade de Aprendizagem**: fio condutor da prática pedagógica escolar. 2018. 67f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.

ROCHA, Fernanda Boa Sorte. SILVA, Gabriel dos Santos e. Significados atribuídos às operações com Números Naturais. In: II Congresso Internacional de Ensino (CONIEN), 2019, Cornélio Procópio. **Anais do II Congresso Internacional de Ensino**, 2019.

SANTOS, Edilaine Regina dos. **Análise da produção escrita em matemática**: de estratégia de avaliação a estratégia de ensino. 2014. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2014.

VIOLA DOS SANTOS, João Ricardo; BURIASCO, Regina Luzia Corio de. Análise da produção escrita como estratégia para Licenciatura em Matemática. *In*: XIII CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (XIII CIAEM-IACME). **Anais do XIII CIAEM-IACME**. Recife, 2011.