

## Introdução de Frações nos Anos Iniciais: a Percepção do Docente

Neide da Fonseca Parracho Sant'Anna  
Silvana Pires Fonseca Mandarinó

**Resumo:** Este estudo trata da introdução do ensino de frações a partir do reconhecimento de sua condição numérica apoiado em sua representação na reta numérica. As possibilidades de desenvolver a introdução ao ensino de frações, através da construção precisa do conceito, a partir das percepções e conhecimentos de professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental são discutidas. Apresenta-se análise por professores com experiência no ensino de Matemática no 4º ano do Ensino Fundamental de um protótipo de caderno de atividades para essa introdução. Esses professores compuseram dois Grupos Focais para fazer uma análise coletiva do conjunto de atividades. Eles avaliaram a proposta a partir dos seus conhecimentos conceituais sobre o tema e de suas experiências práticas na introdução ao ensino de frações em sala de aula e sugeriram alterações nas atividades.

**Palavras-chave:** Frações. Ensino de Frações. Número Racional. Reta Numérica.

## Introduction of Fractions in the Early School Years: the Perception of the Teachers and their Qualification

**Abstract:** The present study deals with the introduction to the teaching of fractions based on the recognition of their numerical condition supported by their representation on the numeric line. The possibilities of developing the introduction to fractions, through a precise construction of the concept, from the perceptions and knowledge of teachers of the early years of Elementary School are discussed. An analysis by teachers experienced in teaching mathematics in the 4th year of a prototype of workbook for such introduction is presented. These teachers composed two Focus Groups to make a collective analysis of the set of activities. The teachers evaluated the viability of the proposal from their conceptual knowledge on the subject and their practical experiences in introducing fractions in the classroom and suggested changes in the activities.

**Keywords:** Fractions. Teaching fractions. Rational number. Number line.

## Introducción de Fracciones en los Primeros Años Escolares: la percepción de los docentes y su calificación

**Resumen:** Este estudio trata de la introducción a la enseñanza de fracciones a partir del reconocimiento de su condición numérica apoyado en su representación en la recta numérica. Se discuten las posibilidades de desarrollar la introducción de fracciones, a través de una construcción precisa del concepto, a partir de las percepciones y conocimientos de docentes de la Enseñanza Fundamental. Se presenta un análisis de docentes experimentados en la enseñanza de matemáticas en el 4º año de prototipo de cuaderno de trabajo para dicha introducción. Estos docentes formaron dos Grupos Focales para hacer un análisis colectivo del conjunto de actividades. Evaluaron la viabilidad de la propuesta a partir de su conocimiento conceptual sobre el tema y sus experiencias prácticas en la introducción de fracciones en aula y sugirieron cambios en las actividades.

**Palabras clave:** Fracciones. Enseñanza de Fracciones. Número Racional. Recta Numérica.

**Neide da Fonseca Parracho Sant'Anna**  
Doutora em Educação pela Pontifícia  
Universidade Católica do Rio de Janeiro,  
Professora do Colégio Pedro II, Rio de  
Janeiro-RJ, Brasil.

 <http://orcid.org/0000-0002-2142-1547>  
✉: [nfos@gmail.com](mailto:nfos@gmail.com)

**Silvana Pires Fonseca Mandarinó**  
Mestre em Práticas de Educação Básica  
pelo Colégio Pedro II, Professora do  
Colégio Pedro II, Rio de Janeiro-RJ,  
Brasil.

 <http://orcid.org/0000-0002-0843-3690>  
✉: [piresmandarino@gmail.com](mailto:piresmandarino@gmail.com)

Recebido em xx/x/2022  
Aceito em xx/x/2022  
Publicado em 25/12/2022

## 1 Introdução

O processo de ensino dos números racionais traz como ponto de partida a introdução ao ensino de frações nos anos iniciais do Ensino Fundamental (EF). Para a efetivação desse trabalho, inspirado na fala de autores que discorrem sobre esse conteúdo como também na dissertação “FRAÇÃO: UM NOVO NÚMERO, UM NOVO DESAFIO – A introdução ao ensino de frações nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental” (MANDARINO, 2019), são adotados alguns caminhos, entre os quais destacamos: i. apresentar as frações a partir da repartição de objetos contínuos (chocolate, bolo, pizza, por exemplo), sendo essa uma das opções didáticas mais encontradas; ii. apresentar as frações por meio da repartição de conjuntos discretos (fichas coloridas, tampinhas de garrafa, quantidade de alunos da turma), opção apresentada, por exemplo, por pesquisadores da Unicamp e do Projeto Fundão nos anos 1980, Santos e Rezende (2011), em geral desdobrada como um segundo passo que dá continuidade ao processo iniciado pelo item anterior; iii. apresentar as frações a partir de sua representação na reta numérica, opção defendida por Wu (2011), Sant’Anna et al. (2013) e Mandarino (2019).

Hung-Hsi Wu, do Departamento de Matemática da Universidade da Califórnia, Berkeley, há muitos anos vem propondo para o ensino de Matemática uma visão, em que o ensino de frações tem importância fundamental. Sua proposta, consolidada em Wu (2011), baseia-se em trabalhar o conceito de fração como número na reta numérica. Seguindo esse fundamento, Sant’Anna et al. (2013) desenvolvem uma estratégia de ensino de frações em que a identificação de fração como número é realizada inicialmente na medição de segmentos de reta.

Sant’Anna et al. (2013) demonstram que a familiarização com o campo algébrico é alcançada com mais facilidade quando o conceito de fração é trabalhado como proposto, favorecendo a identificação de fração como número pelo uso de sua representação na reta numérica. A pesquisa a este respeito permanece intensa (LAZIĆ et al., 2017; HURST et al., 2020; BRAITHWAITE et al., 2021). Permanece incontroversa nessa pesquisa a importância do desenvolvimento da fundamentação geométrica para a intuição do conceito de fração e a necessidade de criação de atividades que fortaleçam a aprendizagem nesses moldes (ABRAMOVICH, 2020; BRAITHWAITE et al., 2020; BRAITHWAITE et al., 2022). Este artigo analisa as percepções dos professores dos anos iniciais do EF sobre as dificuldades que eles podem ter com relação a este terceiro dos caminhos metodológico-conceituais acima citados. Com esta análise se procura responder os seguintes questionamentos: Como contribuir com os professores para executarem o processo de introdução ao ensino das frações como extensão natural dos

números inteiros? Como oferecer aos professores dos anos iniciais suporte que propicie aprofundamento teórico relativo às frações e ao seu ensino? Quais as possibilidades do trabalho de introdução ao ensino de frações, construindo seu conceito na reta numérica? Que saberes, na perspectiva de Tardif (2002), são necessários ao professor para a aplicação de uma proposta de introdução ao ensino de frações baseada na reta numérica?

Assim, a lacuna que esta pesquisa visa a preencher é a da falta de informação sobre a percepção dos professores quanto à viabilidade do ensino de frações como proposto por Wu (2011). Para isto um conjunto de atividades para o desenvolvimento do processo de ensino/aprendizagem do conceito de fração a partir de sua representação na reta numérica foi apresentado e analisado por Grupos Focais de professores do Colégio Pedro II com experiência no ensino de Matemática no 4º ano do EF, objetivando avaliar a viabilidade da realização dessa proposta no cotidiano da sala de aula. Foram convidados professores, com experiência docente no 4º ano do EF, para fazerem observações baseadas em suas experiências docentes, relacionadas ao conjunto de atividades proposto.

Na continuação, este artigo se desenvolve da seguinte forma. Na seção seguinte, a formulação conceitual do problema da introdução de frações é feita. Na Seção 3, é caracterizada a situação atual do ensino de frações nos anos iniciais do ensino fundamental. A Seção 4 apresenta a abordagem metodológica para o estudo, baseada na construção de um protótipo de caderno de atividades e na análise do mesmo em grupos focais. A Seção 5 detalha o protótipo do caderno de atividades. A seção 6 analisa os resultados das discussões nos grupos focais. Finalmente, a Seção 7 colige conclusões.

## **2. Pressupostos teóricos do ensino de frações**

Sant'Anna et al. (2013) apresentam uma estratégia de ensino, partindo da proposta de Wu (2011), que tem como primeiro componente introduzir o conceito de fração como medida de comprimento de segmento de reta, visando a conduzir o aluno à conceptualização de fração como número. Uma característica que merece atenção nesta apresentação de fração é que frações e números inteiros são tratados em “pé de igualdade”. Busca-se evitar, desse modo, uma descontinuidade conceitual perturbadora para os alunos. Os problemas associados a esta descontinuidade já estão documentados desde as pesquisas de Hart (1981).

O primeiro problema vem do conhecimento do professor. Um professor é um sujeito que traz conhecimentos que se refletem no “saber fazer”. A relação do docente com os saberes que

ele ensina deve passar pela compreensão da natureza do que se ensina. Assim é que, para Tardif (2002), essa relação deve basear-se no saber do próprio professor e não constituir o encontro com um conjunto descontínuo de verdades a se transmitir.

Compreender a essência do que se ensina abre para o professor possibilidades de explorar de forma múltipla um determinado conteúdo que, não se encerrando em si mesmo, faz parte de uma rede que integra diferentes saberes inserido na dinâmica do dia a dia do cidadão. Segundo Morin (2001, p. 15), a disciplina precisa ser ao mesmo tempo aberta e fechada, promovendo conhecimento dinâmico. É preciso que se conheça, simultaneamente, o todo e as partes. É um desafio para a escola e seus professores entender a Matemática como uma rede que integra conhecimentos que transcendem o ensino de procedimentos mecanizados, principalmente nas séries iniciais, onde está a base da alfabetização Matemática (NACARATO et al., 2009, p. 32).

Também, Shulman (1986) afirma que qualquer conhecimento a ser considerado para a prática docente deve ter como ponto de partida o conhecimento de conteúdo. A partir desta premissa, o professor pode passar a ser autor de sua própria prática docente. Apesar de toda a importância atribuída aos números racionais e às frações, há muito tempo são apontadas dificuldades para quem ensina e para quem aprende conceitos relacionados a esse campo numérico, o que vai na contramão da orientação de Shulman (1992, p. 117) de que “o professor precisa conhecer profundamente aquilo que vai ensinar”.

Tradicionalmente, o primeiro contato dos estudantes com as frações é realizado pelos professores dos anos iniciais. Grande parte desses professores, com formação em Pedagogia, não tiveram em seu curso de licenciatura a oportunidade de um estudo mais aprofundado dos conceitos desse campo numérico que, como já comentado, não é simples. Os saberes para realização desse trabalho, em muitos momentos, são aprendidos na prática, na troca com seus pares e na oferta de atividades que objetivem a formação continuada do professor em serviço.

Por questões como essas, o processo de ensino do número fracionário precisa ser organizado de forma cuidadosa, levando em conta os conceitos matemáticos, suas diferentes representações, as etapas de sua construção e o nível sócio cognitivo dos estudantes.

A complexidade que envolve a construção do conceito de fração levou alguns pesquisadores a buscar identificar e analisar concepções e competências de professores que atuavam nos anos iniciais e finais do EF no que diz respeito ao conceito de fração. Santos (2005) buscou saber se é possível reconhecer as concepções relacionadas aos significados atribuídos às frações por professores generalistas dos anos iniciais e pelos licenciados em Matemática que

atuam nos anos finais do EF. Ele observou certa inconstância nos saberes trazidos pelos professores de ambos os grupos. Canova (2006), por sua vez, verificou que as concepções dos professores dos anos iniciais de forma geral, se restringiam ao significado parte-todo, considerando principalmente quantidades contínuas. Enquanto os professores dos anos finais acabam por explorar situações mais variáveis relacionadas à fração. Canova (2006) considera ser necessária a ampliação conceitual por parte de professores que trabalham com fração no EF.

Silva (2007) considera ser necessário ampliar a percepção conceitual da fração tanto na formação inicial quanto na formação continuada de professores que ensinam Matemática. Apesar das muitas pesquisas voltadas para a formação continuada de professores, a autora considera também relevante a realização de pesquisas que discutam a formação inicial.

A formação inicial de professores pedagogos, no que se refere às práticas de ensino de Matemática, em geral, não explora satisfatoriamente o ensino de fração, apresentando pouca problematização sobre o assunto. Este fato demanda a necessidade de investigações que aprofundem suas implicações nas práticas dos professores que serão responsáveis pelo ensino de Matemática nos anos iniciais do EF. Cyrino e Oliveira (2014) falam de professores que estão dando aulas de Matemática, mas não tiveram oportunidade de aprender, discutir e refletir sobre seus conceitos, “professores que não tiveram acesso à informação a respeito de elementos, conceitos, temas matemáticos, nem oportunidade ou estímulo a discussão e a reflexões cuja preocupação fosse às implicações dessas ideias no ensino e na aprendizagem da Matemática (CYRINO e OLIVEIRA, 2014, p. 62)”. Conforme Cyrino e Oliveira (2014), diante da fragilidade de conhecimento, os professores acabam tornando-se profissionais inseguros quando têm que explorar conteúdos com frações, números racionais, proporcionalidade.

Além de Hart (1981), em Ma (1999) se encontra ampla evidência da complexidade relacionada ao processo de ensino das frações. Esta complexidade é disfarçada com representações simplificadas. Conforme Nunes e Bryant (1997):

Com as frações as aparências enganam. Às vezes as crianças parecem ter uma compreensão completa das frações e, ainda assim, não a têm. Elas usam os termos fracionais certos; elas falam sobre frações coerentemente; elas resolvem alguns problemas fracionais; mas diversos aspectos cruciais das frações ainda lhes escapam. De fato, as aparências podem ser tão enganosas que é possível que alunos passem pela escola sem dominar as dificuldades das frações, e sem que ninguém perceba. Uma forma comum de apresentar as crianças às frações é mostrar-lhes todos divididos em partes, alguns dos quais distinguidos do resto, por exemplo, pintados. As crianças são informadas que o número total de partes é o denominador, então, o número de partes pintadas é o numerador. Esta introdução, junto com alguma instrução sobre algumas regras para calcular, permite que as crianças transmitam a impressão de que sabem muito sobre fração. (NUNES; BRYANT, 1997, p. 191)

Romanatto (1999) ressalta que:

O número racional é um assunto considerado importante na escolaridade básica de matemática e o modo como se apresenta para os alunos tal tópico tem se revelado na maioria das vezes como um obstáculo para a sua plena compreensão. Um dos aspectos que pode justificar tal situação é a própria complexidade com o que esse assunto se manifesta. O número racional deve ser entendido como uma teia de relações nas quais noções, princípios e procedimentos matemáticos distintos são construídos ou adquiridos por meio de diferentes contextos. Este estudo pressupõe que a plena compreensão do número racional passa por um trabalho significativo em todos os contextos em que tal assunto está presente. Isso porque, em cada contexto, a noção de número e as operações matemáticas devem ser reconceitualizadas em relação ao número natural. Relações como medida, quociente, razão, operador multiplicativo, probabilidade e número são “personalidades” que o número racional assume, representadas por notações, da forma  $a/b$ , decimal e percentual. (ROMANATTO, 1999, p. 37)

Sobre esta forma de abordagem parcial dos significados das frações, afirma Merlini (2005, p. 209) que “não garante que o aluno construa o conhecimento desse conceito”.

No mesmo sentido, Abraão (2016):

Além da significação do número racional em forma de número decimal, mais presente no dia a dia e mais intuitiva, há de se considerar o conceito de racional em forma de fração. [...] A integração entre aspectos procedimentais e conceituais pode permitir a construção de auxiliares simbólicos e operatórios na constituição do conhecimento matemático. Assim, não vejo como defendem alguns educadores, priorizar a forma decimal em detrimento da forma fracionária. Entendo que o conceito de número racional só pode ser compreendido na articulação cognitiva das suas diferentes representações, sejam decimais ou fracionárias e as diferentes ideias que as acompanham. (ABRAÃO, 2016, p. 683)

Os múltiplos significados com que a fração é apresentada aos alunos: parte-todo, quociente, medida, operador multiplicativo, número com o intuito de fazê-los compreender o significado das frações (DAVID e FONSECA, 2005; LOPES, 2008; GETENET e CALLINGHAM, 2021; STRAMEL, 2021), acaba por construir ideias fragmentadas que se misturam sem dar garantias de que se compreendam essas construções e suas relações (BANTING, 2020; WU, 2020). A proposta de Wu é, ao invés de acumular diferentes aproximações através de vários conceitos imprecisos, construir o conceito de fração de forma precisa, a partir da reta numérica.

### 3 Frações no Livro Didático do 4º. Ano

O livro didático se constitui em importante recurso de consulta e suporte para o desenvolvimento do trabalho escolar tanto para professores como para alunos. De acordo com Lopes (2007, p. 208), o livro didático por vezes assume o papel de “versão didatizada do

conhecimento para fins escolares e/ou com o propósito de formação de valores”, podendo apontar caminhos metodológicos e concepções de ensino, identidade e/ou visões de mundo.

Embora o livro didático seja mais um dos recursos utilizados pelos professores do Colégio Pedro II, sendo um colégio público pertencente à rede federal de ensino, opta por selecionar e receber do Programa Nacional do Livro Didático livros didáticos entre outros materiais. A seleção destes livros, para o EF I no Colégio Pedro II, passa por um processo de escolha que reúne o parecer da coordenação de área e dos professores que compõem às equipes deste segmento de ensino. Tal processo visa buscar entre os livros aprovados, oferecidos pelo programa, aquele que melhor se adéqua às propostas metodológicas do colégio.

Ao final de cada processo de escolha, os professores e o coordenador de área decidem-se por uma coleção que será adotada por todo o segmento por um período de quatro anos consecutivos. Alguns dos professores que participaram dos grupos focais trabalharam ou ainda trabalham com esses três livros didáticos selecionados. Eles se constituíram, nos últimos sete anos, como material de apoio didático para os professores e ainda serão usados por mais três anos. Por essa razão, discute-se aqui o encaminhamento proposto por esses livros para a introdução ao conteúdo fração. Esta breve descrição não se constitui em uma análise dos livros e dos princípios que norteiam sua construção, mas, apenas, uma apresentação de características com as quais se facilita a identificação da alternativa aqui proposta.

Os livros adotados para o 4º ano, em sequência cronológica, codificados para posterior identificação, foram os seguintes: Livro A: Coleção Fazendo e Compreendendo MATEMÁTICA (2013-2015) - Autoras: Lucília Bechara Sanches e Manhucia P. Liberman; Livro B: Projeto COPERA Matemática (2016-2018) - Autoras: Eliane Reame e Priscila Montenegro; Livro C: Matemática Ligamundo (2019-2022) - Autora: Eliane Reame.

No Livro A, há todo um capítulo dedicado somente a introdução às frações e posterior aprofundamento, que explora a fração de unidades de medida usuais (ex: meio tanque de gasolina; meia receita; um quarto de hora). Já nos livros B e C, o capítulo onde se encontram as frações traz, além delas, conteúdos relacionados à Geometria (ex: medida de ângulos; fracionamento de figuras poligonais). E é, a partir da integração desses conteúdos que se inicia a exploração do conteúdo fração nesses dois últimos livros, fazendo uso das mesmas atividades.

Todos eles acabam por explorar o significado parte/todo. Nesse tipo de exploração as frações são apresentadas a partir da repartição em partes iguais de objetos contínuos (chocolate,

bolo, pizza, por exemplo) com posterior aprofundamento na repartição de conjuntos discretos (quantidade de alunos, quantidade de carrinhos em uma coleção etc.).

A forma de exploração apresentada pelos livros acima dispostos difere da proposta que trazemos com esse trabalho de pesquisa, que propõe um passo anterior ao proposto por eles encaminhado. Propomos a introdução à fração a partir de seu significado numérico, explorando sua representação na reta numérica a partir do que os alunos já conhecem sobre essa representação para os números naturais e sobre conhecimentos empíricos a respeito de metades, terços, quartos, etc., extraídos do cotidiano escolar e de suas vivências fora da escola.

#### **4. A escolha metodológica**

A intenção da investigação foi conhecer a visão do professor que atua diretamente com os alunos no processo de ensino do conteúdo explorado. Assim, buscou-se aproximar todas as etapas de desenvolvimento da pesquisa do principal objetivo deste trabalho: *“Compreender as possibilidades do trabalho de introdução ao ensino de frações, construindo seu conceito na reta numérica, a partir das percepções e conhecimentos de professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental”*.

A base para o desenvolvimento da pesquisa foi o protótipo de um Caderno de Atividades para alunos do 4º ano do EF construído em Mandarino (2019). Nas atividades descritas neste protótipo, a reta numérica é explorada como recurso para a introdução ao ensino de frações.

De natureza aplicada, a pesquisa visou a oferecer alternativas que possam permear o processo de ensino/aprendizagem das frações ao longo do EF. É uma pesquisa exploratória (GIL, 2007): através da participação em Grupos Focais de professores que reúnem experiência prática com o problema da pesquisa, busca-se a explicitação do problema a partir da familiaridade com ele.

Grupo focal é uma técnica de coleta de dados orientada por pressupostos metodológicos fundamentados em diferentes linhas teóricas que validam a sua utilização em pesquisas (KIND, 2004). Ele é basicamente constituído por: i. um mediador, que participa orientando o conteúdo dos debates propostos no Grupo; ii. um observador, que não participa das atividades propostas, anota impressões e ações que considera importantes para a análise/avaliação das atividades; iii. os participantes convidados.

Há consenso entre pesquisadores que os Grupos Focais não devam ser compostos por um número elevado de participantes para que a dinâmica do grupo, que pressupõe a participação de todos, não seja prejudicada. Entretanto, há divergências em relação ao número mínimo de participantes. Em alguns casos, admite-se a composição de “minigrupos”, para que as questões discutidas possam ser analisadas com maior profundidade. Ainda de acordo com Kind (2004), devem ser organizados pelo menos dois grupos para cada tema que será discutido. Embora a quantidade de grupos seja menos importante do que a qualidade ou riqueza das discussões. A interação dentro dos grupos pode fomentar respostas interessantes ou novas.

Esse formato permite intermediar as conversas, com falas “provocativas”, na busca de argumentações que possam aproximar o conteúdo das discussões dos objetivos do trabalho. Além da presença de uma das pesquisadoras como mediadora, foi possível contar com um observador externo, responsável pelo registro das gravações, cujos comentários, como um elemento a mais, trouxeram reforço aos potenciais de análise e categorização dos resultados obtidos.

O atual Projeto Político Pedagógico Institucional (PPPI) do Colégio Pedro II está de acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) no que se refere à introdução ao ensino formal das frações no 4º ano. Esta condição, aliada à existência de equipes de professores com experiência docente distribuídas por diferentes campi, referendaram a escolha desta instituição de ensino como espaço para a realização da pesquisa de campo.

Foram reunidos Grupos Focais em dois de um total de cinco campi do Colégio, a seguir identificados como Grupo A e Grupo B. A identidade dos participantes foi preservada. No corpo do trabalho, eles são identificados por números associados a letras que correspondem ao seu campus de origem, identificado pela letra A ou B.

Para participar dos grupos, foram selecionados professores com experiência docente no ensino de Matemática no 4º ano do EF de pelo menos dois anos e ser licenciado em Pedagogia e/ou ter o antigo Curso Normal. O Quadro 1, a seguir, permite observar a formação acadêmica e o tempo de atividade docente dos professores participantes dos Grupos Focais. Nela se verifica que todos têm considerável experiência docente. Este, como todos os quadros desta seção, é resultante de elaboração pelas próprias autoras deste estudo com base nas informações produzidas na pesquisa.

Quadro 1 - PROFESSORES: FORMAÇÃO E EXPERIÊNCIA

Prof.	Normal	Licenciatura	Especialização/Pós	Mestrado	Doutorado	I(*)	II(**)
A1		Pedagogia	Educação Matemática	Educação		02	10
A2		Pedagogia	Gestão Escolar	Educação		04	07
A3		Pedagogia/Letras	Alfabetização	Educação		06	20
B1	X	Pedagogia	Psicologia			03	15
B2		Pedagogia	Educação Infantil e Educação Ambiental	Educação	Educação	05	27
B3	X	Matemática	Cálculo e Álgebra			08	38

(\*) Tempo de experiência com o ensino de Matemática no 4º ano do EF - contado em anos.

(\*\*) Tempo total de magistério - contado em anos.

Fonte: Mandarino (2019)

Uma primeira versão do protótipo do Caderno de Atividades foi apresentada a dois professores, não docentes do Colégio, em um encontro presencial com a pesquisadora, onde todos os exercícios foram resolvidos e analisados. O objetivo desse encontro foi o de testar preliminarmente os exercícios e os seus enunciados, com a intenção de ajustá-los aos objetivos a que se propõem. Os professores participantes desse encontro são licenciados em Pedagogia e concentram vasta experiência no ensino de Matemática no 4º ano de EF, uma delas também é licenciada em Matemática. Esses professores não participaram dos resultados da pesquisa, assumiram a função de revisores das questões elaboradas, trazendo algumas sugestões para a reorganização e ajuste de algumas das atividades.

Nos encontros, tanto no Grupo A quanto no Grupo B, houve a ausência justificada de um professor. Apesar dessas ausências os encontros transcorreram conforme programado com os grupos sendo compostos por três professores em cada.

As atividades foram orientadas pela seguinte sequência:

1. Conversa geral sobre frações, com mediação apoiada em questões como:

a) Como vocês associariam as frações ao conjunto dos números racionais?

b) Segundo a BNCC, o ensino formal das frações deve ter seu início no 4º ano do EF. Vocês acham que só nesse momento as noções sobre número fracionário têm seu início na escola? Comentem.

c) O que é fração para vocês? Será que o grupo propõe um conceito?

d) Vocês consideram importante construir com os alunos retas numéricas para representar os números naturais e as frações? Por quê?

2. Cada professor recebeu, a seguir, uma cópia do protótipo do Caderno de Atividades e foi convidado a analisar individualmente a proposta metodológica e as atividades. Foi sugerido que, se desejassem, fizessem anotações no material recebido.

3. Passado o tempo determinado para a análise, os professores foram convidados a falar sobre o material analisado. Algumas questões foram levantadas para nortear as discussões:

a) Vocês reconhecem a representação fracionária na reta numérica como um possível facilitador para a compreensão do conceito numérico de uma fração?

b) Vocês consideram que ao passar do conjunto dos números inteiros (números naturais) para o conjunto das frações costuma haver algum tipo de quebra de continuidade entre esses dois conjuntos?

c) Consideram possível iniciar o ensino formal de frações com apoio na reta numérica?

d) Consideram que o material apresentado se adéqua ao que se propõe?

4. Após esgotados os itens anteriores, os professores foram convidados a fazer, se assim o desejassem, uma fala final sobre a proposta apresentada.

5. Ao final do encontro a mediadora agradeceu a contribuição e participação de todos.

6. Logo após o encontro, a mediadora ouviu e anotou as colocações feitas pelo observador sobre suas impressões e registros referentes aos encontros.

Ao resumir a descrição dos encontros, pode-se dizer que as conversas ocorridas ora seguiram a objetividade de um roteiro, ora se desdobraram subjetivamente em falas e ideias externadas pelos professores.

## **5 O protótipo de caderno de atividades**

O protótipo era formado por um conjunto de seis atividades, constituída cada uma delas de diversos componentes. Cada atividade foi construída com um objetivo próprio. Os objetivos das atividades são resumidamente descritos a seguir.

Atividade Introdutória: Recordar a utilização da Reta Numérica. Esta atividade estava incluída no protótipo como uma primeira atividade, mas, acabou, por recomendação dos professores de ambos os grupos, sendo redirecionada para a preparação dos professores, por usar termos como segmento de reta e semirreta. Restaram, então, como atividades do futuro Caderno de Atividades:

1ª. Atividade: Exemplificar diferentes significados das representações numéricas, Expressar a contagem de uma ou mais unidades na reta numérica e mostrar que podemos contar quantidades menores que a unidade.

2ª. Atividade: Lidar com o fracionamento de unidades de referência, relacionar as frações com a unidade de referência, mostrar a representação na reta numérica da unidade de referência, dos inteiros e das frações.

3ª. Atividade: Fixar conceitos estudados nas atividades anteriores.

4ª. Atividade: Estabelecer frações como parte de um todo contínuo ou de certa quantidade de unidades, usar a reta numérica para a identificação de frações equivalentes, mostrar na reta numérica que frações menores que a unidade fica entre os pontos zero e um.

5ª. Atividade: Usar a reta numérica como um recurso visual para a comparação de frações, ordenar as frações, a partir da observação de suas representações na reta, e voltar a usar a reta numérica para estabelecer equivalência entre frações.

Para cada uma das atividades foram incluídas no Caderno de Atividades orientações para o seu desenvolvimento, de modo a ir ampliando gradualmente o domínio conceitual dos alunos, tomando por base, a partir da segunda, os resultados da realização das anteriores.

Para o desenvolvimento da primeira atividade o professor é orientado a primeiro, fazer os alunos buscarem as diferentes situações práticas em que os números aparecem naturalmente. Depois o professor é orientado a chamar a atenção dos alunos para a possibilidade de escolha da unidade de referência mais apropriada a cada objetivo de contagem. Finalmente o professor tratará das possibilidades de representação, chegar à representação na reta numérica, primeiro de números inteiros, chegando finalmente a partes da unidade.

Na segunda atividade, o aluno é conduzido a avaliar a possibilidade do fracionamento de alguns elementos tomados como unidade de referência e a relacionar a unidade de referência com suas partes e vice-versa. Com esta atividade, o conceito de fração como número já se torna claro pela sua representação na reta numérica.

Na terceira atividade, o aluno identifica a unidade na reta numérica, a sucessão dos inteiros. A seguir passa a lidar com o fracionamento da unidade em partes iguais. Com isto verifica a representação das frações na reta numérica em acréscimo aos números inteiros.

Na quarta atividade, o aluno continua a realizar a divisão da unidade em partes iguais e a sua representação na reta numérica. Para levar à fixação do conceito, parte-se agora de um exemplo concreto.

Finalmente, a quinta atividade já envolve a representação de frações menores e maiores que a unidade. Nesta atividade, o aluno já encontra diferentes formas de chegar ao mesmo número fracionário (frações equivalentes) e a comparação de frações.

A Atividade 5 é apresentada no Anexo 1. Nesta atividade se destaca a possibilidade da representação na reta numérica facilitar a comparação das frações entre si e com a unidade e a compreensão da equivalência de frações de diferentes denominadores.

## **6 Análise e resultados avaliativos da aplicação**

Bardin (2006) define a análise de conteúdo como um “conjunto de técnicas de análise das comunicações”. Lançamos mão dessa metodologia de análise para compreender e processar os dados colhidos durante a realização da pesquisa. Buscamos adotar procedimentos relacionados a essa metodologia, considerando três passos fundamentais previstos por Bardin: i. pré-análise; ii. exploração do material; iii. tratamento dos resultados.

Ao longo da pré-análise, organizamos uma estratégia de atividades para a interpretação dos dados colhidos e definimos os seguintes procedimentos: i. escuta e transcrição das gravações; ii. observação das anotações que os professores fizeram no protótipo do Caderno de Atividades; iii. anotações e destaque para pontos que evidenciavam convergências e divergências de conteúdo.

O segundo passo, Exploração do Material, teve como ponto de partida as anotações e observações dos encontros. Leitura e releituras do material obtido se fizeram necessárias para dar forma às categorias que iam sendo criadas e recriadas, em um movimento que buscava relação entre os apontamentos destacados e a teoria trazida como aporte para esse trabalho. As falas dos professores e as ideias nelas contidas, ao serem categorizadas, confirmavam ou alteravam hipóteses iniciais e ideias construídas a partir do referencial teórico estudado.

No terceiro e último passo, buscamos dar significado e validade à interpretação dos dados objetivos e subjetivos, fazendo uma leitura “flutuante”, como define Bardin (2006).

O processo de investigação sobre a relação perguntas versus respostas/falas nos possibilitou interpretar e, por vezes, intuir o significado contido na subjetividade de alguns

momentos de fala. Buscamos desvendar o que poderia estar por trás de comentários aparentemente simples, mas sutis. Para validar os resultados desse processo de inferência, nos debruçamos no cruzamento de informações comuns aos temas abordados. Dado o nosso desejo de manter uma perspectiva unívoca de trabalho, a volta aos marcos teóricos que a fundamentaram e a repetida leitura de seu objetivo nos ajudaram a dar sentido à interpretação dos dados.

A formação e experiência dos professores que participaram da pesquisa influenciaram diretamente em colocações relacionadas às propostas de atividades apresentadas. Em determinados momentos, professores declaravam ter dúvidas sobre a abordagem do conteúdo em algumas questões. As “falas” a seguir, transcritas das gravações feitas durante as atividades do grupo, comprovam essa observação:

Eu sempre apresento para eles fração como um número, mas assim, não tenho essa clareza de conceito, isso é muito específico... (professor A3)  
[...] aqui, nessa questão, vê aí se estou errada, vocês que são da Matemática... (professor B1)

Discussões relacionadas à carência de um conhecimento mais aprofundado do conteúdo explorado surgiram durante o encontro. Foram descritas algumas dúvidas relacionadas ao tratamento dado a alguns aspectos explorados, como também, em relação às estratégias para abordagem do conteúdo.

Nas respostas relacionadas à formalização da introdução ao ensino de frações, houve unanimidade entre os professores ao afirmarem que o ensino de frações começa nos primeiros anos escolares de maneira empírica e que o ensino estruturado de fração tem seu início no 4º ano escolar.

Quanto à conceituação de fração, inicialmente, os professores descreveram a forma de trabalho que desenvolvem ao abordarem esse conteúdo com seus alunos. As falas a seguir transcritas ilustram a insegurança dessa conceituação:

[...] isso é muito específico, se falam muitas coisas, mas assim, não tenho esse conhecimento, estou tentando aqui alcançar qual seria o motivo, mas eu apresento a eles como um número que não dá pra ser representado pelos números naturais, então a gente precisa de outras formas de se organizar pra representar aquele número que não “existe”. (Grupo A - professor A3)  
[...] essa relação parte todo, é o que a gente acaba trabalhando lá no 4º ano. Mas a questão da fração como divisão, como operador, como razão, e mais algumas ideias, ficam todas acumuladas ali no 5º ano, muitas vezes não são bem trabalhadas ou nem são trabalhadas. (Grupo B - professor B3)

Apesar da dificuldade apresentada pelos professores em dissociar o conceito e os significados que atribuem às frações do trabalho realizado com os alunos, à medida que a conversa nos grupos ia se desenvolvendo, novas falas expandiam às primeiras ideias

complementando, conforme entendimento dos professores, o conceito e os significados que traziam sobre frações. A seguir, destacamos algumas dessas falas:

[...] número que representa uma parte de um inteiro ou que representa o inteiro ou até mais de um inteiro dependendo da fração. Ou partes do todo, ou todas as partes (Grupo A – professores A1 e A2)

[...] a fração abre esse universo da criança perceber que existe algo entre o 0 e o 1 ao explorarmos suas diferentes representações. (Grupo B – professores B1 e B2)

Os resultados dessa etapa do trabalho estão apresentados nos quadros seguintes. No Quadro 2 foram elencados os significados atribuídos às frações que foram trazidos pelos professores.

**Quadro 2 – Conceito de Fração**

Significado Professor	Parte/todo contínuo e discreto (*)	Quociente entre duas grandezas (*)	Medida	Operador	Número
A1	X				X
A2	X				X
A3	X				X
B1	X	X			X
B2	X	X	X		X
B3	X	X	X	X	X

(\*) Significados atribuídos às frações citados no PPPI 2017 do Colégio Pedro II, na seção: **2.2.4 – Quarto ano**; Matemática – Eixos temáticos: Números e Operações; pp. 29 e 30.

Fonte: Mandarin (2019)

No Quadro 2 podemos ainda observar que todos os professores apontaram o significado de parte/todo e de número. E, embora o significado Quociente faça parte do PPPI específico do 4<sup>a</sup> ano, foi citado por apenas 50% dos professores.

No decorrer da segunda etapa, perguntamos aos professores se costumam fazer uso da reta numérica ao trabalharem com os números naturais e com as frações no 4<sup>o</sup> ano. Desta forma, buscamos compreender: i. o como; ii. os objetivos; iii. a frequência do uso da reta numérica. Ainda nessa etapa, perguntamos aos professores o que pensavam sobre a proposta de introduzir o ensino formal de fração a partir de sua representação na reta numérica. As informações obtidas

foram organizadas nos quadros 3, 4 e 5. Entre os quadros, comentários e impressões foram feitos com a intenção de complementar e trazer mais clareza às informações neles transcritas.

Todos os professores afirmaram usar a reta numérica no trabalho com os números naturais dando continuidade a um trabalho que tem início no 3º ano do EF. Afirmaram ainda, que trabalham a representação das frações explorando a comparação que fazem entre elas e os números naturais. Poucos professores afirmaram fazer uso das possibilidades de exploração e aprofundamento relacionados ao trabalho com os números na reta numérica. Tais afirmações foram organizadas no Quadro 3.

Quadro 3 - Uso da Reta Numérica – 4º ano do EF

Contexto / Conteúdo	Introdução	Representação	Aprofundamento Conceitual	Comparação entre números naturais e frações
Números Naturais		A1; A2; A3; B1; B2; B3		A1; A2; A3; B1; B2; B3
Frações	B3	A2; A3; B1; B2; B3	B2; B3	

Fonte: Mandarinino (2019)

No Quadro 4 foram destacadas as respostas dos professores quanto ao tipo de aproveitamento que fazem ao usarem a reta numérica para representar e explorar os números naturais. A maior parte deles afirmou explorar as operações de adição e subtração. Uma porção menor disse explorar também: a multiplicação, regularidades do conjunto dos múltiplos e a divisão como reversibilidade da multiplicação (quantos cabem).

Quadro 4 - Uso da Reta Numérica - Números Naturais

Exploração / Professores	Ordenar/ Comparar	Explorar Regularidades	Operações			Frequência (*)		
			(+) (-)	(x) Múltiplo	(÷) Quantos Cabem	B	M	A
A1	X	X	X					X
A2	X	X	X				X	
A3	X	X				X		
B1	X	X	X	X			X	
B2	X	X	X	X	X			X
B3	X	X	X	X	X			X

(\*) Com relação à frequência, adotou-se a seguinte codificação: **B**– baixa; **M**– média; **A**– alta.

Fonte: Mandarinino (2019)

O Quadro 5 se refere ao uso da reta numérica no 4º ano para a representação e exploração conceitual das frações. Houve uma diferença entre as respostas dos professores do Grupo A e do Grupo B. Os do Grupo B afirmaram explorar conceitos relacionados às frações no 4º ano, enquanto os do Grupo A relataram que fazem pouco uso da reta para frações nesse ano escolar. Sustentaram que todo movimento de maior exploração da reta para frações se dá no 5º ano. Eles justificaram este fato afirmando que no PPPI do Colégio aparece explicitamente o uso da reta para as frações no 5º ano. O que o PPPI dispõe é:

Identificar e produzir frações equivalentes, pela observação das representações gráficas e das regularidades nas escritas numéricas. (Matemática - 4º ano – p.152).  
Localizar, na reta numérica, números racionais nas formas decimal e fracionária. (Matemática - 5º ano – p.200).

**Quadro 5 - Uso da Reta Numérica no 4º ano – Frações**

Exploração Professor	Comparação	Equivalência	Operações		Frequência (*)		
			(+)/(-) Homogênea	(+)/(-) Heterogênea	B	M	A
A1	X	X	X			X	
A2	X		X			X	
A3	X				X		
B1	X	X	X			X	
B2	X	X	X				X
B3	X	X	X	X			X

(\*) Nas operações, homogênea e heterogênea se referem a denominadores iguais e diferentes, respectivamente.

(\*\*) Com relação à frequência, adotou-se a seguinte codificação: **B**– baixa; **M**– média; **A**– alta.

Fonte: Mandarino (2019)

Na sequência dos trabalhos da etapa 2, muito se falou das vantagens da exploração do trabalho com a reta numérica para as frações, embora os professores, na sua maioria, tenham admitido que na dinâmica do dia a dia façam pouco uso desse recurso. A seguir, destacamos algumas falas que ilustram as vantagens evidenciadas pelos professores:

[...] foi bem legal fazer esse trabalho. Aqueles que conseguiam entender a lógica de colocar aquela determinada fração naquele lugar da reta, acho que conseguiam ter uma compreensão melhor do todo. (professor A2)

Eu acho que a reta também é um elemento que acaba comprovando as hipóteses que eles têm sobre os números, porque muitas vezes eles veem um número com valor grande no numerador ou denominador e eles têm dificuldade de relacionar com a quantidade que ele realmente representa e aí, quando ele localiza aquilo ali na reta, eu acho que acaba comprovando ou não uma hipótese que ele tinha inicialmente do quanto aquilo valia. (professor A1)

Para finalizar esta etapa associando o que foi conversado sobre frações na etapa 1 e sobre o uso da reta numérica na etapa 2, a mediadora fez a seguinte proposição:

Vocês acham que seria possível, de repente, a gente começar a construir o trabalho com fração partindo da hipótese de representá-la como um número na reta, aproveitando o conhecimento que já trazem da representação dos números naturais? (Grupos A e B - mediadora)

Apesar de os professores, nesse momento do trabalho, já terem ideia que o material a ser apresentado teria alguma coisa a ver com reta numérica e fração, ficaram muito surpresos com a proposta do uso da reta numérica trazida como sugestão para a introdução ao ensino de fração no 4º ano. Pararam para tentar imaginar como seria começar o trabalho formal com as frações a partir de sua representação na reta numérica. E logo vieram perguntas e comentários que foram intermediados por falas da mediadora:

Você diz antes da gente trabalhar a questão de parte todo? (Grupo A – Professor A1)  
 Sim, antes da exploração da representação gráfica da fração, da relação parte todo, de sua notação matemática mais comum, antes mesmo daquele modelo “numerador/denominador”. (Grupo A – mediadora)

Você diz assim... antes de ter trabalhado com a representação gráfica, antes de ter trabalhado ou representado, por exemplo, a notação matemática de  $\frac{2}{3}$ ? (Grupo B – professor B3)

Sim, antes da exploração daquele modelo “numerador/denominador. Assim, começaríamos a partir do conhecimento que eles já trazem de metade, terça parte, um meio, um terço... se a gente começasse a explorar essas ideias representando-as na reta, confrontando com o conhecimento que eles já têm sobre a representação dos naturais na reta? (Grupo B – mediadora)

É... acho que assim está escrito numa receita, meia xícara... a palavra meia, MEIA, uma xícara é no 1, 2 xícaras no 2, ondo e é que você colocaria meia xícara? Aí ele teria que colocar entre o 0 e o 1. O que seria  $\frac{1}{4}$  da xícara? Em que lugar ficaria? Mas teria que ser em palavras, né? (Grupo B – professor B3)

A conversa entre a mediadora e os professores continuou em ambos os Grupos. Em meio a ela, a mediadora ponderou, junto aos professores, que essa proposta não nega um trabalho posterior, semelhante ao que já vem sendo feito atualmente no dia a dia da sala de aula. Essa proposta seria um “pontapé inicial”, um trabalho para introduzir, de maneira formal, o ensino de fração no 4º, acentuando seu significado numérico.

A princípio os professores se mostraram reticentes com relação à proposta sugerida. Ficaram curiosos para entender como seria abordar as frações dessa forma, sem que nenhum dos passos habitualmente explorados por eles tenham sido trabalhados com os alunos. Apesar das dúvidas iniciais com relação à proposta, os professores se mostraram receptivos em conhecê-la.

Na terceira e última etapa da condução dos Grupos focais foi entregue a cada um dos professores uma cópia do protótipo do Caderno de Atividades. Em um primeiro momento, foi dado um tempo para que os professores fizessem uma análise pessoal do protótipo. Em seguida, foi aberto um debate para que comentassem suas impressões e análises acerca do material

observado. A seguir os professores foram questionados separadamente quanto a: i. a viabilidade da proposta metodológica; ii. a viabilidade de sua aplicação dentro do programa hoje existente; iii. a adequação do material. Todos os professores responderam afirmativamente às três perguntas.

Essa etapa do trabalho foi muito rica em trocas, diálogos, elucidação de dúvidas e sugestões para aprimoramento do material. A surpresa inicial e dúvidas dos professores sobre começar o ensino de fração com o apoio em sua representação na reta numérica foram se dissipando à medida que eles iam observando e comentando sobre o material. À medida que liam o material e resolviam os exercícios, iam compreendendo a proposta e se mostravam animados com as possibilidades de trabalho trazidas pelas atividades. Comentaram que representações na reta numérica, apesar de sua natureza abstrata, permitem ao aluno “ver” características e propriedades das frações. Ao comparar às representações das frações com as já conhecidas representações dos números naturais na reta, os professores afirmaram perceber no cotidiano escolar que seus alunos acabariam reconhecendo a condição numérica das frações.

Ficou claro que todos esses professores desejam experimentar novos caminhos para a introdução ao ensino de fração. Demonstraram entender que o trabalho, como desenvolvido hoje, pautado em tendências de livros didáticos e em documentos oficiais que priorizam alguns atributos das frações em detrimento de outros, não garante proficiência aos alunos para os futuros desdobramentos associados à aprendizagem de novos conceitos e ao uso social das frações. Todos fizeram uma avaliação positiva sobre a proposta de iniciar o ensino formal de fração no 4º ano explorando, em um primeiro momento, a sua representação na reta numérica. A fala de um professor do Grupo B, de certa forma, resume a ideia geral que os professores construíram sobre o desenvolvimento dessa proposta metodológica:

Eu acho que o principal objetivo desse trabalho é o aluno entender que fração não é só uma relação de parte e todo, que ela é um o número! Se eu tenho 1 chocolate, o que eu tenho é 1 chocolate, se ela tem meio chocolate, a quantidade que ela tem é meio chocolate, e isso é um número, e meio mais meio dá 1... o meio pode ser o resultado de uma operação entre dois números, então ele é número também. Eu acho a proposta desse trabalho importantíssima, até para o professor, que muitas vezes não teve a chance de pensar nisso, né, que acha que o trabalho com a reta numérica é só mais um conteúdo a se trabalhar, mas não é, nesse caso ela faz parte da construção mesmo da ideia. Vai ajudar o aluno a dar significado a uma fração. (professor B3)

Os professores afirmaram ainda que uma proposta como esta é um desafio especialmente para eles, pois precisam se apropriar e aprofundar alguns conceitos com os quais não estão familiarizados. Precisam, também, reestruturar as formas de abordagens e expectativas relacionadas à introdução ao ensino formal de fração no 4º ano.

Todos estes resultados atestam a importância de ouvir os professores sobre as possibilidades que percebem, e as suas limitações, para a implantação de uma abordagem para o ensino de frações em que se busca contribuir para a efetiva aprendizagem do conceito com a exploração da representação na reta numérica.

## **7 Conclusão**

Compreender e explorar o conceito de fração é um processo complexo. Para as frações podem ser atribuídos múltiplos significados, explorados nos diferentes anos escolares com maior ou menor aprofundamento. Estudiosos das áreas de Educação Matemática e professores que dão aula de Matemática nos anos iniciais do EF corroboram essa afirmação ao identificarem e relatarem dificuldades apresentadas por professores e alunos no processo de ensino/aprendizagem de frações ao longo de toda a Educação Básica e posterior vida cidadã.

Este trabalho se voltou para o momento escolar onde os primeiros passos são dados em direção à aprendizagem de frações que, por recomendação da BNCC, se inicia no 4º ano do EF. Neste contexto, nos debruçamos na busca de uma forma diferente de intermediar este processo de ensino e de aprendizagem reconhecidamente crítico dentro do contexto escolar.

Trazemos como resultado deste trabalho um Caderno de Atividades que aponta um passo anterior ao processo de formalização do ensino de frações: explorar o significado numérico das frações através de sua representação na reta numérica. Para tanto, propomos a exploração e desdobramento junto aos alunos dos conceitos que já trazem sobre a representação dos números naturais na reta numérica e o conhecimento empírico sobre números fracionários como: metade, terça parte, um quarto...

Para uma discussão da proposta trazida no Caderno de Atividades, foram organizados Grupos Focais compostos por professores de anos iniciais do EF com experiência docente no 4º ano deste segmento escolar. Nestes encontros, as atividades apresentadas como ponto de partida foram analisadas e comentadas pelos professores participantes, que sugeriram algumas adaptações.

À medida que liam o material e resolviam os exercícios, os professores iam compreendendo a proposta e se mostravam animados com as possibilidades de trabalho trazidas pelas atividades. Finalmente, reconheceram a validade da proposta a eles apresentada. Passaram

a discutir alternativas de implementação e aspectos que passavam a compreender da importância da introdução precisa do conceito de fração.

Comentaram, então, que representações na reta numérica, apesar de sua natureza abstrata, permitem ao aluno “ver” características e propriedades das frações e, afinal, perceber a condição numérica das frações. Afirmaram ainda que a execução de uma proposta como esta constituía para eles um desafio, pois sentiam necessidade de aprofundar conceitos com os quais não estavam familiarizados.

Ainda durante os encontros com os professores, se observou a carência de um conhecimento mais aprofundado do conteúdo para a exploração dessa nova proposta. Muitos contextos fazem presentes os números fracionários, em suas diferentes formas de representação. Com esta pesquisa, se ajudou a compreender a importância da formação adequada do professor para lidar com as várias oportunidades de contextualização. Acreditamos que ela pode contribuir para minimizar as dificuldades relacionadas à compreensão e uso das frações dentro e fora da escola.

**Nota 1. Autoria.** Este artigo se estrutura sobre dissertação de mestrado produzida pela segunda autora sob a orientação da primeira.

**Nota 2. Agradecimento.** As autoras agradecem contribuições dos revisores da revista, cujas recomendações melhoraram substancialmente o artigo, permanecendo, naturalmente, de inteira responsabilidade das autoras todas as imperfeições que subsistam.

## 8 Referências

ABRAHÃO, Ana Maria Carneiro. Frações e Decimais: compreender para ensinar números racionais. **Revista do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul**, 9 (21). Sessão Temática. 2016.

ABRAMOVICH, Sergei. **IMVI Open Mathematical Education Notes**, 10 (2), 33-43, 2020.

BANTING, Nat. Proposing a Standard Algorithm to Divide Fractions. **Australian Mathematics Education Journal**, 2 (3), 9-32, 2020.

BARDIN, Laurence. **Análise de conteúdo** (REGO, Luis Antero & PINHEIRO, Augusto, trads). Lisboa: Edições 70, 2006. (Obra original publicada em 1977).

BRAITHWAITE, David William e SIEGLER, Robert Stuart. Putting fractions together. **Journal of Educational Psychology**, 113 (3) 556-571, 2020. doi: 10.1037/edu0000477

BRAITHWAITE, David William, SPRAGUE, Lauren e SIEGLER, Robert. Toward a unified theory of rational number arithmetic. **Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition**. 2021. doi: 10.1037/xlm0001073

BRAITHWAITE, David William, McMULLEN, Jake e HURST, Michele Ann. Cross-notation knowledge of fractions and decimals. **Journal of Experimental Child Psychology**, 213, 105210, 2022. doi: 10.1016/j.jecp.2021.105210

CANOVA, Raquel Factori. **Crença, concepção e competência dos professores do 1º e 2º ciclos do ensino Fundamental com relação à fração**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. 2006.

CYRINO, Maria Cristina de Costa Trindade e OLIVEIRA, Laís Maria Costa Pires. Aprendizagens a Respeito do Raciocínio Proporcional em uma Comunidade de Prática de Professores Matemática. **Anais do VI Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, Pirenópolis-GO. 2014.

DAVID, Maria Manuela Martins Soares e FONSECA, Maria da Conceição Ferreira Reis. Sobre o conceito de número racional e a representação fracionária. **Presença Pedagógica**, 1 (1), 59-71, 2005.

GETENET, Seyum e CALLINGHAM, Rosemary. Teaching interrelated concepts of fraction for understanding and teacher's pedagogical content knowledge, **Mathematics Education Research Journal**, 33 (2), 201–221, 2021.

GIL, Antonio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. Ed. São Paulo: Atlas, 2007.

HART, Kathleen. **Children's Understanding of Mathematics, 11-16**. London: John Murray, 1981.

HURST, Michelle Ann, MASSARO, Marisa e CORDES, Sara. Fraction Magnitude: Mapping Between Symbolic and Spatial Representations of Proportion. **Journal of Numerical Cognition**, 2020, 6 (2), 204-230. <https://doi.org/10.5964/jnc.v6i2.285>

KIND, Luciana. Notas para o trabalho com a técnica de grupos focais. **Psicologia em Revista**, Belo Horizonte, 10 (15), 124-136, 2004.

LAZIĆ, Bojan, ABRAMOVICH, Sergei, MRĐA, Mirela e ROMANO, Daniel Abraham. On the teaching and learning of fractions through a conceptual generalization approach. **International Electronic Journal of Mathematics Education**, 12 (3), 749-767, 2017.

LOPES, Alice Casimiro. **Currículo e Epistemologia**. Ijuí - RS: Ed. Unijuí. 2007.

LOPES, Antonio José. O que nossos alunos podem estar deixando de aprender sobre frações, quando tentamos lhes ensinar frações. **BOLEMA – Boletim de Educação Matemática**, 31 (21), 1-22, 2008.

MA, Liping. **Knowing and teaching elementary mathematics: teacher's understanding of fundamental mathematics in China and the United States**. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates. 1999.

MANDARINO, Silvana Pires Fonseca. **FRAÇÃO: UM NOVO NÚMERO, UM NOVO DESAFIO – A introdução ao ensino de frações nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental**. Dissertação (Mestrado em Práticas de Educação Básica). Rio de Janeiro: Colégio Pedro II, 2019.

MERLINI DE SOUZA, Vera Lúcia. **O conceito de fração em seus diferentes significados: um estudo diagnóstico com alunos de 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental**. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo. 2005.

MORIN, Edgar. **Os sete saberes necessários à educação do futuro**. São Paulo: Cortez Autores Associados. 2001.

NACARATO, Adair Mendes, MENGALI, Brenda Leme da Silva e PASSOS, Carmen Lúcia Brancaglioni. **A matemática nos anos iniciais do ensino fundamental: tecendo fios do ensinar e do aprender**. Belo Horizonte: Autêntica Editora. 2009.

NUNES, Terezinha e BRYANT, Peter. Compreendendo números racionais. In: Nunes, T. e Bryant, P. **Crianças fazendo Matemática**. Porto Alegre: Artmed. 1997.

REAME, Eliane e MONTENEGRO, Priscila. **Projeto Coopera Matemática**. São Paulo: Editora Saraiva, 2014.

REAME, Eliane. **Matemática Ligamundo**. São Paulo: Editora Saraiva, 2019.

ROMANATTO, Mauro Carlos. Número racional: uma teia de relações. **Zetetiké**, 7 (12), 37- 49. 1999.

SANCHES, Lucília Bechara e LIBERMAN, Manhucia Perelberg. **Fazendo e Compreendendo Matemática**. São Paulo: Editora Saraiva, 2008.

SANT'ANNA, N.; PALIS, G. de L. R.; NEVES, M. A. C. M. Transpondo obstáculos: da Aritmética para a Álgebra, **Zetetiké**, 21 (39), 169-195, 2013.

SANTOS, Aparecido. **O conceito de fração em seus diferentes significados: um estudo diagnóstico junto a professores que atuam no ensino fundamental**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2005.

SANTOS, Vania Maria Pereira e REZENDE, Jovana Ferreira. **Números: linguagem universal**. Rio de Janeiro: Editora UFRJ. 2011.

SHULMAN, Lee. Those who understand: knowledge growth in teaching. **Educational Research**, 15 (2), 4-14, 1986.

SHULMAN, Lee. Ways of seeing, ways of knowing, ways of teaching, ways of learning about teaching. **Journal of Curriculum Studies**, 28, 393-396, 1992.

SILVA, Angélica Fontoura Garcia. **O desafio do desenvolvimento profissional docente: análise da formação continuada de um grupo de professores das séries iniciais do ensino fundamental, tendo como objeto de discussão o processo de ensino e aprendizagem de fração**. Tese (Doutorado em Educação Matemática). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2007.

STRAMEL, Janet. Mathematical Methods for Early Childhood. **Open Educational Resources**. 2. 2021.

TARDIF, Maurice. O professor enquanto “ator racional”. Que racionalidade, que saber, que juízo? In: TARDIF, **Maurice**, **Saberes docentes e formação profissional**. Petrópolis (RJ): Vozes. 2002.

WU, Hung-Hsi. **Understanding Numbers in Elementary School Mathematics**. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2011.

WU, Hung-Hsi. **Rational Numbers to Linear Equations**, Rhode Island, American Mathematical Society, 2020.

**ANEXO 1. ATIVIDADE 5**

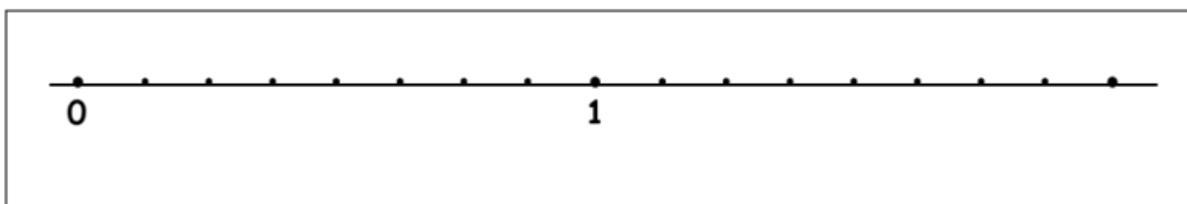
**A Reta Numérica e os Números Fracionários – exercitando e fazendo novas descobertas**

❖ As atividades a seguir contêm alguns desafios. Elas devem ser feitas com atenção, buscando discutir suas respostas com o(a) colega ao lado e consultando o material produzido por vocês até aqui.

1. Use as letras correspondentes a cada número destacado abaixo para representá-los na reta a seguir.

A- dezesseis oitavos	B- dois quartos	C- um meio	
D- um quarto	E- dez oitavos	F- quatro oitavos	G- oito oitavos
Desafio!!! H- três meios			

✓ Observem que cada unidade representada na reta numérica abaixo foi dividida em oito partes iguais. Considerem essas divisões para representar os números.



✓ Agora, coletivamente, vamos conferir nossas marcações e corrigi-las se necessário!

2. Observe as representações feitas por você na reta numérica do exercício 1 e, de acordo com elas, **após a correção**, responda escrevendo os números pedidos.

a) Há número(s) representado(s) menor(es) que uma unidade?

( ) sim                      ( ) não

➤ Se a sua resposta foi sim, qual(is) são esses números?

---

b) Há número(s) representado(s) iguais a uma unidade?

( ) sim ( ) não

➤ Se a sua resposta foi sim, qual(is) são esses números?

---

c) Há número(s) representado(s) maior(es) que uma unidade e menor(es) que duas unidades?

( ) sim ( ) não

➤ Se a sua resposta foi sim, qual(is) são esses números?

---

d) Há número(s) representado(s) igual(is) a duas unidades?

( ) sim ( ) não

➤ Se a sua resposta foi sim, qual(is) são esses números?

---

e) Há número(s) representado(s) maior(es) que duas unidades?

( ) sim ( ) não

➤ Se a sua resposta foi sim, qual(is) são esses números?

---

3. Como já foi dito, cada unidade representada na reta numérica do exercício 1 foi dividida em oito partes iguais. Considerando essas divisões, podemos afirmar que há diferentes frações que correspondem a um mesmo número.

a) Quais são as frações na reta do exercício 1 que correspondem a um mesmo número?

---

➤ Que número é representado pelas mesmas frações? Marque com um (x) a opção correta.

( ) um inteiro

( ) a terça parte do inteiro

( ) a metade do inteiro

( ) um inteiro e meio

( ) dois inteiros

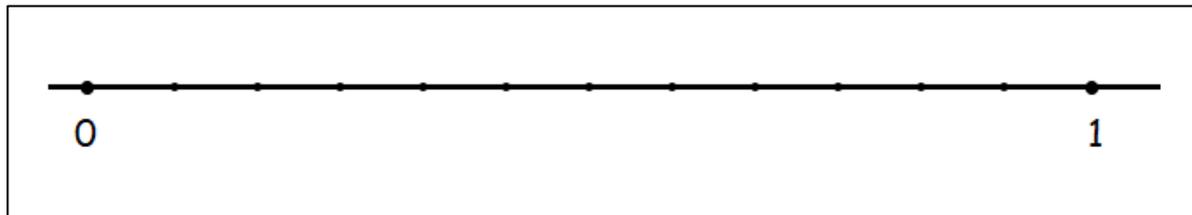
- ❖ Compartilhem, comentem e, caso necessário, revejam sua solução.
- ❖ No espaço abaixo, faça anotações das suas descobertas até aqui.

4. Vocês já sabem que um mesmo número pode ter diferentes representações fracionárias.

a) Represente cada número acima através de sua letra correspondente e descubra quais frações

<b>A • três terços</b>	<b>B • seis sextos</b>	<b>C • três quartos</b>
<b>D • um terço</b>	<b>E • um meio</b>	<b>F • dois terços</b>
<b>G • dois meios</b>	<b>H • quatro quartos</b>	

representam o mesmo número.



- ❖ As frações que representam um mesmo número são chamadas de **FRAÇÕES EQUIVALENTES**.

Escrevam em cada diagrama os grupos de frações equivalentes.

