

Conhecimento de Probabilidade de alunos do Ensino Médio após o ensino

José António Fernandes
Bruno Marx Braga

Resumo: Neste artigo estuda-se o conhecimento em Probabilidade de alunos brasileiros do ensino médio, após terem frequentado as aulas de Probabilidade. No estudo participaram 203 alunos do 3.º ano do ensino médio, que frequentavam uma escola pública e uma escola privada da região de Brasília. Os alunos resolveram várias questões de Probabilidades, das quais vamos aqui analisar duas. Em ambas as questões, de entre dois acontecimentos, os alunos deviam identificar o mais provável ou se eram ambos igualmente prováveis. Em termos de resultados, verificou-se um fraco desempenho dos alunos, claramente pior no caso dos alunos da escola pública. Fundamentalmente, os alunos basearam as respostas corretas na determinação de probabilidades ou na comparação do número de casos favoráveis, enquanto as respostas incorretas resultaram da equiprobabilidade de obter qualquer face do dado, ignorar a ordem dos resultados, comparar o número de bolas brancas e pretas e comparar probabilidades simples.

Palavras-chave: Probabilidade. Conhecimento. Experiências aleatórias compostas. Ensino Médio.

The Probability knowledge of Secondary School students after teaching

Abstract: This article studies the knowledge on Probability of Brazilian secondary school students, after having attended Probability classes. 203 students from the 3rd year of secondary school participated in the study, who attended a public school and a private school in the region of Brasília. The students solved several Probability questions, of which we will analyse two here. In both questions, between two events, the students were asked to identify the most likely or whether both were equally likely. In terms of results, there was a poor student performance, clearly worse in the case of public-school students. Fundamentally, students based the correct answers on determining probabilities or comparing the number of favourable cases, while incorrect answers resulted from the equiprobability of getting any side of the die, ignoring the order of results, comparing the number of white and black balls, and comparing simple probabilities.

Keywords: Probability. Knowledge. Random compound experiments. Secondary school.

Conocimiento de Probabilidad de estudiantes de Bachillerato después de la enseñanza

Resumen: En este artículo estudiamos el conocimiento de estudiantes brasileños de bachillerato en Probabilidad, después de haber asistido a clases de probabilidad. El estudio involucró a 203 alumnos de último año de bachillerato, que frecuentaban una escuela pública y una escuela privada de la región de Brasília. Los estudiantes resolvieron varias preguntas de Probabilidad, de las cuales vamos a analizar dos aquí. En ambas preguntas, entre dos sucesos, los estudiantes tenían que identificar el más probable o si ambos eran igualmente probables. En cuanto a los resultados, hubo un bajo rendimiento de los estudiantes, claramente peor en el caso de los estudiantes de escuelas públicas. Fundamentalmente, los estudiantes basaban las respuestas correctas en determinar probabilidades o comparar el número de casos favorables, mientras que las respuestas incorrectas resultaban de la equiprobabilidad de obtener cualquier lado del dado, ignorar el orden de los resultados, comparar el número de bolas blancas y negras y comparar probabilidades simples.

Palabras clave: Probabilidad. Conocimiento. Experimentos aleatorios compuestos. Bachillerato.

José António Fernandes

Doutor em Educação pela
Universidade do Minho (UMinho).
Professor associado aposentado da
Universidade do Minho (UMinho), Braga,
Portugal.

 <https://orcid.org/0000-0003-2015-160X>
 jfernandes@ie.uminho.pt

Bruno Marx Braga

Mestre profissional em Matemática pela
Universidade de Brasília (UnB). Professor
do Instituto Federal de Brasília (IFB),
Brasília, DF, Brasil..

 <https://orcid.org/0000-0002-7579-4592>
 1957380@etfbsb.edu.br

Recebido em 03/08/2023

Aceito em 10/12/2023

Publicado em 21/12/2023

1 Introdução

A Teoria de Probabilidades é uma área científica relativamente recente, pelo menos quando comparada com outras áreas da matemática, como seja os Números, a Geometria e a Álgebra. Foi apenas no século XVII que as Probabilidades se instituíram como domínio científico, mais precisamente, segundo consta, em resultado da correspondência mantida entre Fermat e Pascal em 1654. Por outro lado, no seu desenvolvimento, assistiu-se à proliferação de várias escolas, cada uma com uma perspetiva diferente do conceito de probabilidade, como referem Batanero, Henry e Parzyz (2005). Ora, este surgimento mais recente e a existência de várias interpretações podem dificultar a aquisição do conceito de probabilidade.

Apesar de ser uma área científica relativamente recente, a sua importância não tem deixado de aumentar, sendo usada para efetuar previsões num mundo cada vez mais complexo e imprevisível. A crescente relevância das probabilidades na vida das pessoas e na sociedade, em geral, tem despoletado o incremento do seu ensino nas escolas de muitos países. No caso do Brasil, a Probabilidade faz parte dos programas escolares de matemática ao longo de todo o ensino básico (BRASIL, 2017).

Com o aumento do estudo da Probabilidade na escola, novos desafios são colocados aos professores e aos alunos. No caso dos professores, importa que eles tenham uma formação que lhes permita ensinar Probabilidade de forma adequada, enquanto no caso dos alunos importa saber quais as aprendizagens que eles atingem e as dificuldades que eles sentem, aspetos esses que são fundamentais se pretendemos melhorar a qualidade do ensino e da aprendizagem.

Com a publicação do trabalho pioneiro de Piaget e Inhelder (1951), na sua obra *La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant*, assiste-se a um interesse crescente pelo ensino e aprendizagem da Probabilidade, sendo muita e diversificada a investigação realizada desde então. Existem variados estudos sobre o conhecimento em Probabilidade dos alunos de diferentes níveis de escolaridade, como por exemplo: o estudo de Batanero e Borovcnik (2016), relativo ao ensino médio; o estudo de Cardeñoso, Moreno, García-González e Jiménez-Fontana (2017), envolvendo futuros professores do ensino médio; os estudos de Fernandes (1990, 2000), envolvendo alunos do ensino fundamental e médio; o estudo de Fischbein e Schnarch (1997), envolvendo alunos do ensino fundamental, médio e futuros professores de matemática; e os estudos de Fernandes (2018) e de Fernandes e Gea (2018), envolvendo futuros professores dos primeiros anos escolares. Em todos estes estudos constatou-se que os alunos sentiram dificuldades várias nos conteúdos probabilísticos estudados.

No presente estudo analisam-se as resoluções de duas questões de Probabilidades, mais precisamente de comparação de probabilidades em experiências compostas por alunos do ensino médio, no que respeita às respostas dadas pelos alunos e aos raciocínios por eles desenvolvidos no processo de obtenção das respostas. Comparativamente com os estudos antes referidos, neste estudo inquiriram-se os alunos sobre duas questões, uma referente ao contexto de um dado e outra relativa ao contexto de extração de bolas de um saco, relacionando-se o tipo de resposta (correta e incorreta) com tipo de escola (pública e privada) e com o tipo de raciocínio adotado para a obtenção dessa resposta.

Seguidamente, nas próximas secções, apresenta-se o enquadramento teórico do estudo, nele discutindo os estudos prévios sobre o conhecimento dos alunos em Probabilidade, informa-se sobre o método de pesquisa seguido no estudo, analisam-se os dados resultantes das resoluções dos estudantes e apresentam-se os resultados obtidos e, por fim, sintetizam-se as principais conclusões do estudo e extraem-se algumas implicações didáticas.

2 Enquadramento teórico

No presente estudo, pretende-se que os alunos identifiquem, de entre dois acontecimentos, aquele que é mais provável ou se são ambos igualmente prováveis, portanto, implicando a comparação de probabilidades ou outro raciocínio, como seja a comparação dos casos favoráveis. Nestas situações-problema, em que se comparam acontecimentos em experiências compostas, a investigação tem demonstrado que os alunos apresentam muitas dificuldades, muitas mais do que no caso dos acontecimentos em experiências simples (e.g., CONTRERAS; ESTRADA; DÍAZ; BATANERO, 2010; FERNANDES, 2000; GREEN, 1982; WATSON, 2005).

O desempenho revelado pelos alunos nos estudos sobre concepções erradas, designadas também por ideias intuitivas erradas, é paradigmático, sendo muito profundas as dificuldades por eles experimentadas. No caso do estudo de Fernandes (1990), em que foi aplicado um questionário centrado nas heurísticas probabilísticas (TVERSKY; KAHNEMAN, 1982), enquanto estratégias de resolução simplificadas de situações-problema, além da falácia da conjunção (TVERSKY; KAHNEMAN, 1983), em que se atribui à probabilidade da interseção de dois acontecimentos um valor superior à probabilidade de um dos seus acontecimentos, concluiu-se que alunos do 11.º ano (sem ensino de Probabilidade) e futuros professores de matemática (com ensino de Probabilidade) revelaram muitas dificuldades e, globalmente, não se verificaram diferenças estatisticamente significativas entre o valor do erro cometido por estes dois grupos de alunos no questionário. Este resultado é particularmente preocupante na medida em que o ensino de Probabilidade não produziu um efeito significativo sobre o erro cometido por esses alunos.

Os resultados problemáticos obtidos no estudo de Fernandes (1990), confirmam-se e complementam-se no estudo de Fischbein e Schnarch (1997). Neste estudo, como já foi referido antes, participaram alunos do ensino fundamental, do ensino médio e futuros professores de matemática, todos sem ensino de Probabilidade, que foram confrontados com várias situações contraintuitivas, portanto, promotoras de despoletar concepções erradas. Enquanto principal conclusão do estudo, salienta-se que os alunos aderiram em percentagens elevadas a concepções erradas para obterem as suas respostas e, em muitos itens do questionário, assistiu-se a uma adesão semelhante às concepções erradas em todos os grupos etários ou mesmo a um aumento da adesão às concepções erradas com o aumento da idade. Este resultado implica que as concepções erradas dos alunos devem ser enfrentadas no ensino, pois o seu desenvolvimento cognitivo espontâneo não se mostrou eficaz para as ultrapassar.

No estudo de Fernandes (2001), em que estiveram envolvidos 204 alunos do 8.º ano e 209 do 11.º ano, verificou-se que esses alunos sentiram muitas mais dificuldades na comparação de probabilidades em experiências compostas do que em experiências simples. Considerando o número total de respostas corretas dos itens relativos a experiências simples e a experiências compostas, observaram-se diferenças estatisticamente significativas entre o 8.º e o 11.º ano, quer nas experiências simples, quer nas experiências compostas, favoráveis aos alunos do 11.º ano. Já entre os alunos 11.º ano, verificou-se que o ensino de Probabilidade, por que 105 deles tinha passado, não determinou diferenças estatisticamente significativas tanto no caso das experiências simples como nas experiências compostas. Conclui-se, assim, que o avanço no nível de escolaridade beneficiou a seleção das respostas corretas, mas o mesmo não aconteceu com o ensino de Probabilidade, tal como também aconteceu nos estudos, antes referidos, de Fernandes (1990) e de Fischbein e Schnarch (1997).

No que respeita às experiências simples, para obterem as respostas corretas, os alunos recorreram a raciocínios aditivos, à comparação de proporções, de casos favoráveis e de probabilidades. Contudo, os raciocínios aditivos (como seja, no caso da comparação de probabilidades em dois sacos com bolas brancas e pretas, comparar o número de bolas brancas, comparar o número de bolas pretas e comparar o número de bolas brancas e pretas) não garantem sempre a escolha da resposta correta, tal como também se constatou no estudo de Green (1982). Excluindo os raciocínios aditivos, verificou-se que os alunos do 11.º adotaram, sistematicamente, mais esses raciocínios. No caso das respostas incorretas, para além dos raciocínios aditivos que conduziram a respostas corretas e incorretas, dependendo do item em questão, salientou-se o raciocínio ambos os acontecimentos são possíveis. Este raciocínio foi mais referido pelos alunos do 8.º ano para justificar a equiprobabilidade dos dois acontecimentos pelo facto de ambos serem possíveis, pela impossibilidade de prever o resultado numa única extração/lançamento ou devido à sorte.

Já em relação às experiências compostas, as respostas corretas dos alunos basearam-se nos raciocínios comparar o número de casos favoráveis, comparar as probabilidades dos acontecimentos e maior dificuldade/facilidade em obter resultados iguais/ diferentes nos vários lançamentos. Excluindo este último raciocínio, que é um raciocínio menos fiável em garantir a seleção da resposta correta e de natureza claramente intuitiva, verificou-se que foram novamente os alunos do 11.º ano que adotaram mais frequentemente aqueles raciocínios, embora, neste caso, com frequências muito inferiores às das experiências simples. Já quanto aos restantes raciocínios, salienta-se a não consideração da ordem, a adesão a fatores causais e ambos os acontecimentos são possíveis. A não consideração da ordem foi adotado apenas por alunos do 11.º ano e implica a descrição incompleta do espaço amostral, conduzindo à afirmação da equiprobabilidade. Já adesão a fatores causais, raciocínio adotado pelos alunos de ambos os anos escolares, conduziu a respostas corretas e incorretas. Por último, o raciocínio de que ambos os acontecimentos são possíveis foi adotado por cerca de metade ou mais dos alunos do 8.º ano, muitos mais do que do 11.º ano, e levou os alunos a afirmarem a equiprobabilidade dos acontecimentos.

O raciocínio ambos os acontecimentos são possíveis significa que os alunos afirmam a equiprobabilidade de dois acontecimentos pela razão de serem acontecimentos possíveis. Assim, o facto de ser possível obter dois resultados, porque são resultados que podem ocorrer nas experiências aleatórias ou devido à sorte, leva-os a concluir que os dois acontecimentos são equiprováveis. Trata-se, portanto, de um raciocínio intuitivo e muito limitado no seu alcance para garantir respostas corretas. Lecoutre e Durant (1988) designaram este raciocínio falacioso por “enviesamento de equiprobabilidade”, estudaram-no em diferentes cenários e concluíram que se trata de um raciocínio relativamente persistente. Posteriormente, Cardeñoso et al. (2017) constataram que mesmo futuros professores do ensino médio (de matemática e biologia) aderiram a esta estratégia intuitiva em percentagens muito elevadas. Segundo estes autores, 50% por cento dos estudantes justificaram a estimativa probabilística a partir da equiprobabilidade em quatro ou mais acontecimentos dos 12 totais, o que traduz um uso desmedido do argumento de equiprobabilidade.

Num estudo subsequente, Fernandes e Gea (2018) propuseram a futuros professores dos primeiros anos, com uma formação em Probabilidade semelhante à dos participantes do presente estudo, duas tarefas que incluem, cada uma, um item sobre probabilidades em experiências compostas. No primeiro pedia-se aos alunos para determinarem a probabilidade de selecionar um homem e uma mulher de um grupo com 10 homens e 15 mulheres, enquanto no segundo se pedia para determinar, de entre dois acontecimentos, relativos à extração de duas bolas de um saco, aquele que era mais provável ou se eram igualmente prováveis, item semelhante a uma das questões do presente estudo. Em termos de respostas, verificou-se que responderam corretamente ao primeiro item 42% dos estudantes e ao

segundo item apenas 23%. Para obtenção destas respostas, os alunos recorreram a cálculos numéricos (implicados na definição clássica de probabilidade) e à descrição das diferentes possibilidades através de um diagrama de árvore.

Já as respostas incorretas basearam-se numa maior diversidade de raciocínios, dos quais se salientam a reposição da primeira pessoa ou bola extraída, que não se verificava; a determinação de probabilidades simples, sem as combinar para obter a probabilidade da respetiva experiência composta; não considerar a ordem dos resultados, quando isso era relevante; e adicionar probabilidades de experiências simples. No caso da determinação de probabilidades simples está em jogo o maior número de bolas brancas, que supostamente justificaria ser mais provável obter duas bolas brancas, pois ao maior número de bolas de uma cor corresponde sempre a maior probabilidade de obter uma bola dessa cor.

Além do estudo de probabilidades em experiências simples e compostas, é também importante conhecer o desempenho dos alunos em outros conceitos probabilísticos, como sejam a probabilidade conjunta e a probabilidade condicionada. No estudo de Fernandes, Correia e Contreras (2013) participaram 310 alunos do 9.º ano de escolaridade e nele estudaram-se as suas respostas a uma questão com dois itens de probabilidade conjunta e outros dois de probabilidade condicionada, no contexto de extração de duas bolas de um saco, com e sem reposição. Em relação às respostas, verificou-se que cerca de dois em cada três alunos responderam corretamente aos dois itens de probabilidade condicionada (aqui passível de ser resolvida através da restrição do espaço amostral), enquanto muito poucos alunos responderam corretamente aos dois itens de probabilidade conjunta (6% ou menos). Assim, de forma clara, estes resultados mostram que os alunos, de forma consistente e sistemática, sentiram mais dificuldades no conceito de probabilidade conjunta do que no conceito de probabilidade condicional, tal como também aconteceu no estudo de Watson e Moritz (2002).

Na globalidade dos quatro itens, salientam-se erros dos alunos quando confundem a probabilidade condicionada com a probabilidade conjunta, consideram o número pretendido de bolas ou de casos possíveis, definem a razão bolas brancas (pretas)/bolas pretas (brancas), calculam duas probabilidades em vez de uma, centram a atenção na cor, consideram a probabilidade conjunta como soma ou diferença de probabilidades e não consideram a reposição da primeira bola. Destes raciocínios, confundir a probabilidade condicionada com a probabilidade conjunta foi o mais adotado pelos alunos e foi também referido em muito outros estudos (e.g., DÍAZ; CONTRERAS; BATANERO; ROA, 2012; POLLATSEK; WELL; KONOLD; HARDIMAN, 1987). Já nos raciocínios probabilidade conjunta como soma ou diferença de probabilidades e não considerar a reposição combinam-se, embora erradamente,

as probabilidades de acontecimentos simples e nos restantes raciocínios determinam-se probabilidade simples sem que sejam combinadas para obter uma nova probabilidade. Por fim, a não verificação de qualquer associação entre o desempenho dos alunos em probabilidade condicionada e probabilidade conjunta, também constatada por Watson e Moritz (2002), levou estes autores a advogarem “a necessidade de encorajar os estudantes a interpretarem a linguagem dos dois tipos de acontecimentos” (p. 83), tendo em vista distinguir o acontecimento conjunção dos acontecimentos disjunção e a condicional.

3 Método

Neste artigo intenta-se estudar a influência do ensino de Probabilidade no uso de raciocínios intuitivos na resolução de situações probabilísticas. Para tal, analisam-se as resoluções de alunos do ensino médio de questões propícias à sua resolução através de raciocínios intuitivos.

Participaram no estudo 203 estudantes do ensino médio brasileiro, pertencentes a duas escolas (uma Pública e outra privada) da cidade de Brasília. Estes alunos frequentavam o 3.º ano, e os alunos da escola privada apresentavam um desempenho a matemática superior (média de 7,5 valores ao longo do ensino médio) ao dos alunos da escola pública (média de 6,5 ao longo do ensino médio).

Os dados foram recolhidos através de um questionário com nove questões, incluindo tarefas de probabilidade em experiências compostas, probabilidade conjunta e probabilidade condicionada em diversos contextos. Neste artigo apresentamos e analisamos apenas duas dessas questões, as quais envolvem situações indutoras de um pensamento intuitivo para a sua resolução (Figura 1). Na aplicação do questionário, que foi respondido individualmente em sala de aula em cada uma das turmas, os alunos foram informados, previamente, de que as suas respostas, fornecidas sob a condição de anonimato, apenas tinham fins investigativos e não se destinavam a atribuir qualquer classificação. Assim, cientes de que a sua participação era voluntária, os alunos assinaram o termo de consentimento esclarecido, tendo-se verificado que todos os alunos presentes no momento da aplicação responderam ao questionário.

Figura 1: Tarefa proposta aos alunos

1. Em dois lançamentos consecutivos de um dado não viciado, numerado de 1 a 6, obter 5 num dado e 6 no outro (por qualquer ordem) é mais provável, menos provável ou igualmente provável a obter 6 em ambos os dados? Porquê?

2. Num saco há cinco bolas brancas e duas pretas, conforme se mostra a seguir. As bolas são todas iguais exceto na cor. Sem ver, tiram-se de uma só vez duas bolas do saco.

Saco: 

É mais provável obter duas bolas brancas, obter uma bola branca e uma bola preta ou é igualmente provável? Porquê?

Fonte: Elaboração dos autores

As duas questões propostas aos alunos consideram-se indutoras do recurso a raciocínios intuitivos para a sua resolução e já foram usados em outros estudos. A questão 1 foi estudada por Fischbein, Barbat e Mînzat (1975) e por Lecoutre e Durant (1988), tendo-se constatado que os participantes envolvidos nos estudos não distinguiram o resultado (5,6) do resultado (6,5) e, em consequência, afirmaram a equiprobabilidade de obter nos dados um 5 e um 6 ou obter dois 6. Já no caso da questão 2, uma versão ligeiramente alterada foi usada por Fernandes e Gea (2018), tendo-se verificado que as respostas dos alunos, futuros professores dos primeiros anos, foram influenciadas pelo maior número de bolas brancas, em relação às pretas, levando-os a afirmar que seria mais provável obter duas bolas brancas do saco.

Por fim, em relação ao tratamento e análise de dados, estudaram-se as respostas e os raciocínios apresentados pelos alunos. Quer em relação às respostas, quer em relação aos raciocínios, determinaram-se frequências dos tipos de respostas (corretas e incorretas) e das estratégias, tendo-se recorrido a tabelas para resumir essa informação. No caso dos raciocínios, para estabelecer as categorias, recorreu-se à análise de conteúdo (BARDIN, 2002), sendo as categorias emergentes da análise das resoluções apresentadas pelos alunos descritas na próxima secção, aquando da apresentação de resultados. A categorização efetuada será também ilustrada com exemplos de respostas dos alunos, identificados pela letra A (abreviatura de aluno) seguida do número que lhe foi atribuído (de 1 a 203).

4 Análise e apresentação de resultados

Nesta secção apresentam-se as respostas dos alunos, do ensino médio, a cada uma das questões propostas, bem como os raciocínios por eles desenvolvidos para obter essas respostas.

4.1 Respostas dadas pelos alunos

Nas questões 1 e 2 interrogam-se os alunos sobre a comparação das probabilidades de dois acontecimentos: na questão 1, obter um 5 e um 6 ou dois 6 na experiência de dois lançamentos consecutivos de um dado; na questão 2, obter duas bolas brancas ou uma bola branca e uma bola preta quando se tiram, de uma só vez, duas bolas de um saco contendo cinco bolas brancas e duas bolas pretas. Na Tabela 1 encontram-se registadas as frequências dos tipos de resposta (corretas e incorretas) em cada uma dessas questões, incluindo-se também as não respostas.

Tabela 1: Frequências (em %) dos tipos de resposta nas questões 1 e 2

Tipo de resposta	Questão 1			Questão 2		
	Escola pública	Escola privada	Total	Escola pública	Escola privada	Total
Correta	10 (8)	53 (64)	63 (31)	22 (18)	21 (25)	43 (21)
Incorreta	85 (71)	24 (29)	109 (54)	89 (74)	58 (70)	147 (73)
Não resposta	25 (21)	6 (7)	31 (15)	9 (8)	4 (5)	13 (6)

Fonte: Elaboração dos autores

Pela Tabela 1 verifica-se que, na totalidade dos alunos, mais de metade responderam incorretamente a qualquer das duas questões, situação mais agravada no caso da questão 2, salientando-se ainda as não respostas no caso da questão 1. Em consequência, em cada questão, um terço ou menos dos alunos responderam corretamente, o que revela um resultado muito problemático.

Entre os alunos da escola pública e da escola privada, os da escola privada obtiveram um desempenho claramente superior ao dos alunos da escola pública, sendo a disparidade das respostas corretas maior no caso da questão 1. Considerando o número de respostas corretas em cada questão segundo o tipo de escola, a aplicação do teste de qui-quadrado à tabela de 2x2, assim obtida, determinou diferenças estatisticamente significativas ($p < 0,001$), donde se depreende que o número de respostas corretas nas questões é dependente do tipo de escola. Já, em relação às não respostas, constata-se que, em ambas as questões, foram os alunos da escola pública que mais frequentemente não responderam. Este resultado mostra que os alunos da escola privada aderiram menos frequentemente a ideias intuitivas erradas.

Realmente é problemático que os alunos, depois de terem estudado o tema de Probabilidade no ensino médio, revelem tantas dificuldades em qualquer das questões propostas, mais ainda porque se trata de questões relativamente simples e semelhantes às que, usualmente, são exploradas na escola. Assim, face a estes resultados, confirma-se que o ensino por que passaram esses alunos não foi suficiente para vencerem as suas ideias intuitivas erradas. Resultado semelhante foi obtido por

Fernandes (1990) em estudantes, futuros professores de matemática do ensino médio, que também tinham concluído a sua formação em Probabilidade na universidade.

Na subsecção seguinte iremos analisar os raciocínios desenvolvidos pelos alunos para responderem a cada uma das questões, os quais permitirão identificar as ideias mobilizadas pelos alunos quando das suas resoluções.

4.2 Raciocínios adotados pelos alunos

Dos alunos que responderam à questão 1, 23 não justificaram a resposta dada. Os raciocínios apresentados pelos restantes 149 alunos foram variados, conforme se pode constatar pela Tabela 2.

Tabela 2: Frequências (em %) de alunos nos raciocínios da questão 1

Tipo de raciocínio	Frequência (em %)
É mais difícil obter números iguais/É mais fácil obter números diferentes	10 (7)
Comparar as probabilidades dos acontecimentos	26 (17)
Comparar o número de casos favoráveis	26 (17)
Ignorar a ordem dos resultados	32 (22)
Equiprobabilidade de obter qualquer face do dado	29 (20)
Raciocínio incompreensível	26 (17)

Fonte: Elaboração dos autores

O raciocínio “É mais difícil obter números iguais/É mais fácil obter números diferentes” foi adotado por 7% dos alunos e conduziu sempre à resposta correta. Neste caso, a justificação dada consistiu em referir uma das duas afirmações, sem acrescentar quaisquer razões sobre ser “mais fácil” ou “mais difícil”, como se exemplifica na Figura 2.

Figura 2: Raciocínio utilizado pelo aluno A121 na questão 1

mais provável, pois é mais difícil obter os dois com números iguais

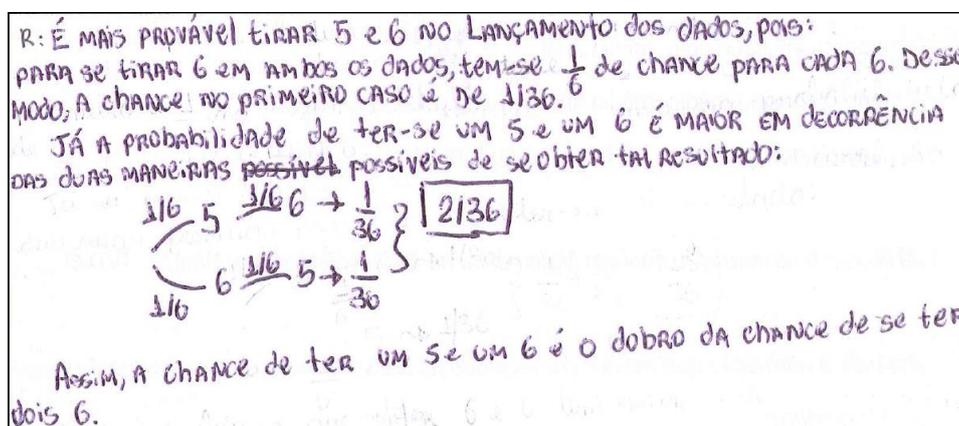
Fonte: Elaboração dos alunos

Apesar do aluno A121 não ter explicado a sua ideia, é possível que ele tenha baseado o seu raciocínio numa avaliação difusa e incompleta do espaço amostral associado à experiência aleatória ou uma parte desse espaço amostral.

Já o raciocínio “Comparar as probabilidades dos acontecimentos” foi adotado por 17% dos alunos e conduziu quase sempre à resposta correta. Nesta situação, os alunos determinaram e

compararam as probabilidades dos acontecimentos e, por fim, concluíram que obter um 5 e um 6 é mais provável do que obter dois 6, como se mostra na Figura 3. Em particular, no cálculo das respectivas probabilidades, alguns destes alunos recorreram à descrição completa do espaço amostral.

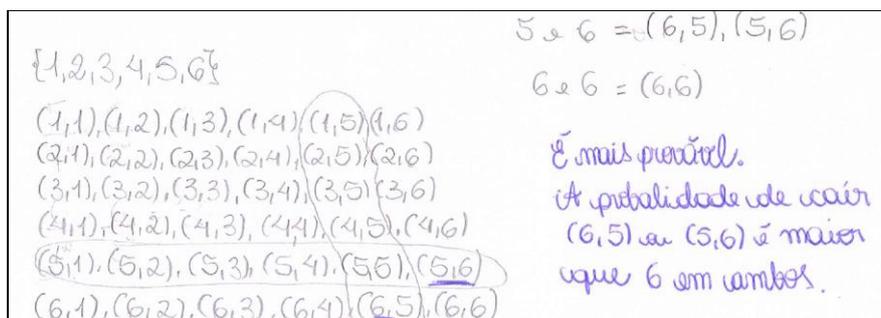
Figura 3: Raciocínio utilizado pelo aluno A179 na questão 1



Fonte: Elaboração dos alunos

Também o raciocínio “Comparar o número de casos favoráveis” foi adotado por 17% dos alunos e conduziu quase sempre à resposta correta. Nas suas justificações, os alunos determinaram o número de casos favoráveis dos dois acontecimentos e concluíram que seria mais provável aquele em que fosse maior número de casos favoráveis. Na Figura 4 apresenta-se um exemplo deste raciocínio.

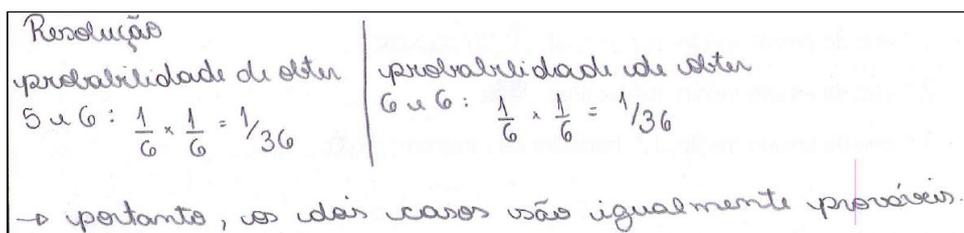
Figura 4: Raciocínio utilizado pelo aluno A87 na questão 1



Fonte: Elaboração dos alunos

Já o raciocínio “Ignorar a ordem dos resultados” foi o mais frequente, tendo sido adotado por 22% dos alunos, e conduziu sempre a uma resposta incorreta ao afirmar-se que os acontecimentos eram equiprováveis. Regra geral, os alunos determinaram as probabilidades sem considerarem uma das ordens na obtenção de um 5 e um 6, como se mostra na Figura 5.

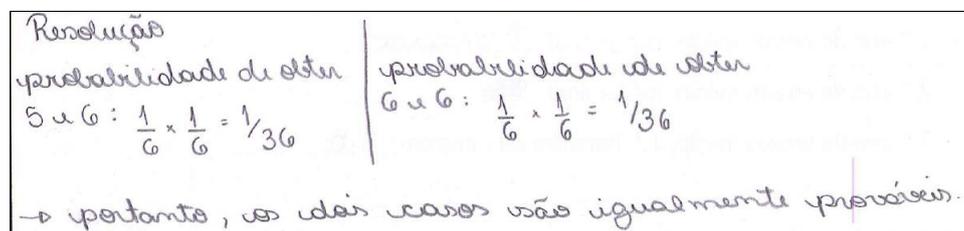
Figura 5: Raciocínio utilizado pelo aluno A194 na questão 1



Fonte: Elaboração dos alunos

O raciocínio “Equiprobabilidade de obter qualquer face do dado” também foi adotado por muitos alunos, especificamente 20%, e conduziu sempre a uma resposta incorreta ao afirmar-se que os acontecimentos eram equiprováveis. Focando-se na experiência de lançamento de um dado, alguns alunos afirmaram apenas que era igualmente provável obter qualquer face do dado e outros determinaram a probabilidade de obter as faces em questão. Na Figura 6 apresenta-se um exemplo deste último caso.

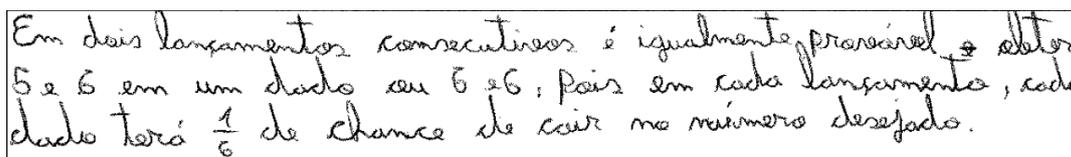
Figura 6: Raciocínio utilizado pelo aluno A186 na questão 1



Fonte: Elaboração dos alunos

O raciocínio “Equiprobabilidade de obter qualquer face do dado” também foi adotado por muitos alunos, especificamente 20%, e conduziu sempre a uma resposta incorreta ao afirmar-se que os acontecimentos eram equiprováveis. Focando-se na experiência de lançamento de um dado, alguns alunos afirmaram apenas que era igualmente provável obter qualquer face do dado e outros determinaram a probabilidade de obter as faces em questão. Na Figura 7 apresenta-se um exemplo deste último caso.

Figura 7: Raciocínio utilizado pelo aluno A186 na questão 1



Fonte: Elaboração dos alunos

Finalmente, foram bastantes (17%) os alunos que apresentaram um “Raciocínio incompreensível”, o qual conduziu tanto a respostas corretas como incorretas.

Dos alunos que responderam à questão 2, 11 não justificaram a resposta dada. Os raciocínios apresentados pelos restantes 179 alunos foram variados, embora menos do que na questão 1, e podem ser constatados na Tabela 3.

Tabela 3: Frequências (em %) de alunos nos raciocínios da questão 2

Tipo de raciocínio	Frequência (em %)
Comparar as probabilidades dos acontecimentos	41 (23)
Comparar o número de bolas brancas e pretas	78 (44)
Ignorar a ordem dos resultados	38 (21)
Comparar probabilidades simples	17 (9)
Raciocínio incompreensível	5 (3)

Fonte: Elaboração dos autores

O raciocínio “Comparar as probabilidades dos acontecimentos” foi adotado por 23% dos alunos e conduziu sempre à resposta correta. Neste caso, a maioria dos alunos determinou corretamente as probabilidades dos dois acontecimentos e concluíram que eram equiprováveis, como se exemplifica na Figura 8.

Figura 8: Raciocínio utilizado pelo aluno A200 na questão 2

Iguualmente provável.

2 opções (2 brancas):
 $\frac{5}{7} \cdot \frac{4}{6} = \frac{20}{42} = \frac{10}{21}$

2 opções (1 branca e 1 preta):
 $\frac{5}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot 2! = \frac{20}{42} = \frac{10}{21}$

Fonte: Elaboração dos alunos

Houve ainda poucos alunos (6 ao todo) que consideraram o número de casos favoráveis como sendo o número de bolas a extrair (duas bolas), num total de 7 bolas, concluindo também a equiprobabilidade dos acontecimentos. A este raciocínio está subjacente a ideia de experiência simples, quando o aluno considera o número total de 7 bolas, como se pode observar no exemplo da Figura 9.

Figura 9: Raciocínio utilizado pelo aluno A124 na questão 2

5=brancas } 7 bolas
 2=pretas }

$P(2 \text{ bolas brancas}) = \frac{2}{7}$

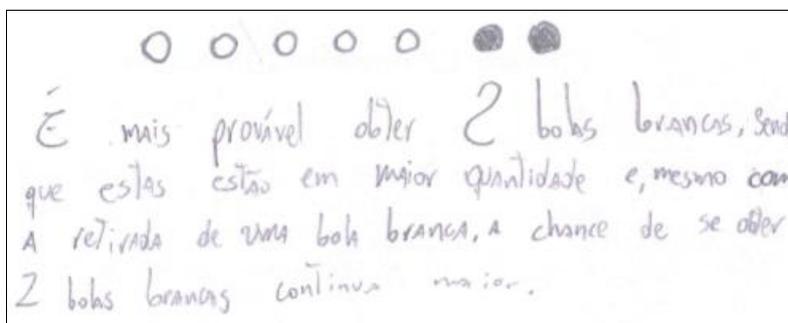
$P(\underbrace{1 \text{ branca e } 1 \text{ preta}}_{2 \text{ bolas}}) = \frac{2}{7}$

Iguualmente provável, pois as chances de ocorrer as 2 possibilidades é a mesma de $\frac{2}{7}$.

Fonte: Elaboração dos alunos

Já o raciocínio “Comparar o número de bolas brancas e pretas” foi o mais adotado pelos alunos, concretamente 44%, e conduziu sempre a uma resposta incorreta. Nesta situação, observando que o número de bolas brancas é superior ao número de bolas pretas, os alunos concluíram que é mais provável obter duas bolas brancas. Também neste raciocínio está subjacente a ideia de experiência simples, como se infere da Figura 10.

Figura 10: Raciocínio utilizado pelo aluno A10 na questão 2

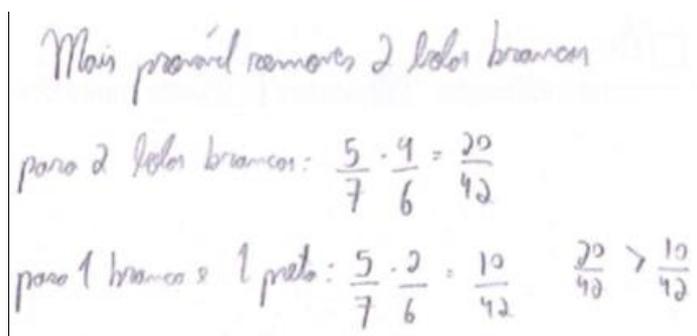


Fonte: Elaboração dos alunos

Da resposta do aluno A10 infere-se que a maior probabilidade de obter a primeira bola branca ainda se mantém na extração da segunda bola branca, pois ele, possivelmente, avalia que, depois de extrair a primeira bola branca, no saco ainda ficam mais bolas brancas do que pretas.

Tal como na questão 1, o raciocínio “Ignorar a ordem dos resultados”, que foi adotado por 21% dos alunos, conduziu sempre a uma resposta incorreta. Nesta questão, os alunos ao não considerarem a ordem na obtenção da bola branca e da bola preta, concluíram que seria mais provável obter duas bolas brancas, como se verifica na Figura 11. Alguns destes alunos, embora chegando à mesma conclusão, consideraram a reposição da primeira bola extraída.

Figura 11: Raciocínio utilizado pelo aluno A129 na questão 2

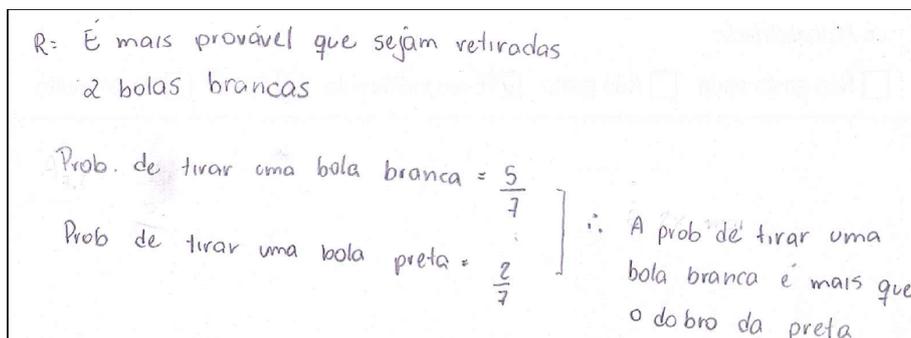


Fonte: Elaboração dos alunos

Também o raciocínio “Comparar probabilidades simples”, que foi adotado por 9% dos alunos, conduziu sempre a uma resposta incorreta. Neste caso, os alunos determinaram as probabilidades de obter bola branca e

bola preta e, dos valores obtidos, concluíram que seria mais provável obter duas bolas brancas. Na Figura 12 apresenta-se um exemplo deste raciocínio.

Figura 12: Raciocínio utilizado pelo aluno A201 na questão 2



Fonte: Elaboração dos alunos

Por fim, foram poucos os alunos que apresentaram um “Raciocínio incompreensível”, apenas 3%, o qual conduziu sempre a uma resposta incorreta.

5 Discussão e conclusão

No estudo, aqui apresentado, analisaram-se os tipos de respostas (corretas e incorretas) e de raciocínios subjacentes a essas respostas, referidos por alunos do ensino médio, de uma escola pública e de uma escola privada, quando da resolução de duas questões de Probabilidade envolvendo experiências compostas.

Em relação aos tipos de repostas, os alunos revelaram um desempenho problemático, com menos de um em cada três alunos a apresentarem a respostas correta em qualquer das duas questões. Entre os alunos da escola pública e da escola privada verificaram-se grandes discrepâncias, sendo os resultados obtidos amplamente favoráveis aos alunos da escola privada. No caso da escola pública, menos de um em cada cinco alunos respondeu corretamente a qualquer das questões, o que constitui um resultado muito negativo. Outros estudos também têm mostrado que os alunos deste e de outros níveis escolares revelam dificuldades em probabilidades, que são muito mais acentuadas no caso das experiências aleatórias compostas do que nas experiências aleatórias simples (e.g., FERNANDES, 2001; FERNANDES; GEA, 2018; FISCHBEIN; BARBAT; MÎNZAT, 1975; LECOUTRE; DURANT, 1988).

Já em termos de raciocínios, os alunos obtiveram as suas respostas adotando uma grande diversidade de resoluções, uns mais intuitivos e primitivos e outros mais formais e elaborados. Tendencialmente, os raciocínios mais intuitivos e primitivos produziram respostas incorretas e os raciocínios mais formais e elaborados produziram respostas incorretas, em ambas questões.

Os raciocínios “É mais difícil obter números iguais/É mais fácil obter números diferentes” (questão 1), “Comparar as probabilidades dos acontecimentos” (questões 1 e 2) e “Comparar o número de casos favoráveis” (questão 1), geralmente, conduziram à resposta correta, enquanto os raciocínios “Ignorar a ordem dos resultados” (questões 1 e 2), “Equiprobabilidade de obter qualquer face do dado” (questão 1), “Comparar o número de bolas brancas e pretas” (questão 2) e “Comparar probabilidades simples” (questão 2) conduziram sempre a respostas incorretas.

Para além do raciocínio “É mais difícil obter números iguais/É mais fácil obter números diferentes”, que é claramente de natureza intuitiva e que foi adotado por poucos alunos, também os raciocínios “Ignorar a ordem dos resultados”, “Equiprobabilidade de obter qualquer face do dado”, “Comparar o número de bolas brancas e pretas” e “Comparar probabilidades simples” podem ser considerados como sendo mais intuitivos e limitados, comparativamente com os demais raciocínios. À exceção do raciocínio “Ignorar a ordem dos resultados”, todos estes raciocínios se relacionam, de algum modo, com a probabilidade em experiências simples. No caso da equiprobabilidade, para além da determinação de probabilidades em experiências simples, os alunos também podem ter sido influenciados pelo “enviesamento de equiprobabilidade” (LECOUTRE; DURANT, 1988), e no caso da comparação do número de bolas de cada uma das cores trata-se claramente de um raciocínio aditivo.

No estudo de Fernandes (2000, 2001) também se verificou que os alunos do 8.º e 11.º ano, quase sempre, basearam as suas respostas na determinação e/ou comparação de probabilidades e de casos favoráveis. Quando se referem à mesma experiência aleatória, a comparação dos casos favoráveis permite identificar o acontecimento mais/menos provável ou concluir que são igualmente prováveis, uma vez que os casos possíveis se mantêm constantes. Já os raciocínios aditivos no estudo referido, assim como no estudo de Green (1982), no caso da comparação de probabilidades em experiências simples (que não é o caso do presente estudo), conduziram muitas vezes a comparações corretas. Contudo, apesar das conclusões obtidas serem corretas, trata-se de um raciocínio mais limitado, menos generalizável do que um raciocínio multiplicativo, que garante a obtenção de resultados corretos em todas as situações probabilísticas.

Os raciocínios “Equiprobabilidade de obter qualquer face do dado”, “Comparar o número de bolas brancas e pretas” e “Comparar probabilidades simples” mantêm alguma relação com experiências aleatórias simples, constituindo, portanto, um raciocínio muito limitado para responder adequadamente à situação proposta (FERNANDES, 2000). A este respeito, Fernandes, Batanero, Correia e Gea (2014) verificaram que futuros professores dos primeiros anos, após determinaram as probabilidades das experiências simples, não as combinaram para obter a probabilidade na respetiva experiência composta.

Por último, o raciocínio “Ignorar a ordem dos resultados”, adotado nas duas questões, é uma falha da avaliação probabilística que se tem verificado em muitos estudos (e.g., FERNANDES et al., 2014; FERNANDES; GEA, 2018), sendo, de entre os raciocínios que conduziram sempre a respostas incorretas, aquele que envolve, de forma explícita, probabilidades em experiências compostas. Portanto, à partida, trata-se de um raciocínio que poderá ser mais facilmente corrigido.

Com o aprofundamento do ensino da Probabilidade e Estatística nas escolas (BRASIL, 2017), seria de esperar que os alunos sentissem menos dificuldades na aprendizagem dos conteúdos desse tópico. Contudo, contrariamente a tais expectativas, tal hipótese não se confirmou, sendo mesmo muito pronunciadas as dificuldades dos alunos, mais acentuadas no caso dos da escola pública do que no caso da escola privada.

Face a tão limitadas aprendizagens dos alunos importa que eles experienciem o tema de Probabilidade de forma diversa na escola, incentivando-se uma atitude ativa, participativa e reflexiva. Tarefas como as que aqui foram estudadas, que se revelaram propensas a desencadear um pensamento intuitivo, devem ser trabalhadas pelos alunos num processo de resolução individual ou em pequenos grupos e de discussão no grupo-turma, incluindo usar diferentes formatos de informação. Neste último caso, Fernandes, Gonçalves e Barros (2019) verificaram que estudantes, futuros professores dos primeiros anos, preferiram recorrer às frequências absolutas na determinação de probabilidades simples, conjunta e condicionada, em detrimento do uso de frequências relativas.

6 Referências

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. Lisboa: Edições 70, 2002.

BATANERO, Carmen; HENRY, Michel; PARZYSZ, Bernard. The nature of chance and probability. *In*: Jones, Graham. A. (Ed.). **Exploring probability in school**: Challenges for teaching and learning. New York, NY: Springer, 2005. p. 15-37.

BATANERO, Carmen.; BOROVCNIK, Manfred. **Statistics and probability in high school**. Rotterdam, Holanda: Sense Publishers, 2016.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2017. Disponível em: <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>>. Acesso em: 30 jan. 2020.

CARDEÑOSO, José María; MORENO, Amable; GARCÍA-GONZÁLES, Esther.; JIMÉNEZ-FONTANA Rocío. El sesgo de equiprobabilidad como dificultad para comprender la incertidumbre en futuros docentes argentinos. **Avances de Investigación en Educación Matemática**, Badajoz, v.11, p.145-166, 2017.

DÍAZ, Carmen; CONTRERAS, José Miguel; BATANERO, Carmen; ROA, Rafael. Evaluación de sesgos en el razonamiento sobre probabilidad condicional en futuros profesores de educación secundaria. **Bolema**, Rio Claro, v. 26, n. 22, p. 1207-1226, 2012.

FERNANDES, José António. **Concepções erradas na aprendizagem de conceitos probabilísticos**. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade do Minho, Braga, Portugal, 1990.

FERNANDES, José António. **Intuições e aprendizagem de probabilidades**: uma proposta de ensino de probabilidades no 9.º ano de escolaridade. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade do Minho, Braga, Portugal, 2000.

FERNANDES, José António. Intuições probabilísticas em alunos do 8.º e 11.º anos de escolaridade. **Quadrante**, Lisboa, v. 10, n. 2, p. 3-32, 2001.

FERNANDES, José António; GEA, María Magladena. Conhecimento de futuros professores dos primeiros anos escolares para ensinar probabilidades. **Avances de Investigación en Educación Matemática**, Badajoz, v. 14, p. 15-30, 2018.

FERNANDES, José António; BATANERO, Carmen; CORREIA, Paulo Ferreira; GEA, María Magladena. Desempenho em probabilidade condicionada e probabilidade conjunta de futuros professores do ensino básico. **Quadrante**, Lisboa, v. 23, n. 1, p. 43-61, 2014.

FERNANDES, José António; CORREIA, Paulo Ferreira; CONTRERAS, José Miguel. Ideias intuitivas de alunos do 9.º ano em probabilidade condicionada e probabilidade conjunta. **Avances de Investigación en Educación Matemática**, Badajoz, v. 4, p. 5–26, 2013.

FERNANDES, José António; GONÇALVES, Gabriela; BARROS, Paula Maria. Formato da informação no cálculo de probabilidades por futuros professores dos primeiros anos. **HOLOS**, Natal, v. 35, n. 2, 2019.

FISCHBEIN, Efraim; BARBAT, Ileana; MÎNZAT, I. Primary and secondary intuitions in the introduction of probability. *In*: E. Fischbein. **The intuitive sources of probabilistic thinking in children** (Appendix I). Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1975. p. 138-155.

FISCHBEIN, Efraim; SCHNARCH, Ditz. The evolution with age of probabilistic, intuitively based misconceptions. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 28, n. 1, p. 96-105, 1997.

GREEN, David Robert. **Probability concepts in 11-16 year old pupils**. Tese (Doutorado em Matemática) - Loughborough University of Technology, Loughborough, Reino Unido, 1982.

LECOUTRE, Marie-Paule; DURANT, Jean-Luc. Jugements probabilistes et modèles cognitifs: étude d'une situation aléatoire. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 19, p. 357-368, 1988.

PIAGET, Jean; INHELDER, Bärbel. **La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant**. Paris: Presses Universitaires de France, 1951.

POLLATSEK, Alexander; WELL, Arnold; KONOLD, Clifford; HARDIMAN, Pamela; COBB, George. Understanding conditional probabilities. **Organization, Behavior and Human Decision Processes**, San Diego, v. 40, p. 255-269, 1987.

TVERSKY, Amos; KAHNEMAN, Daniel. Judgment under uncertainty: Heuristics and biases. *In*: KAHNEMAN, Daniel; SLOVIC, Paul; TVERSKY, Amos (Eds.). **Judgment under uncertainty: Heuristics and biases**. Cambridge: Cambridge University Press, 1982. p. 3-20.

TVERSKY, Amos; KAHNEMAN, Daniel. Extensional versus intuitive reasoning: The conjunction fallacy in probability judgment. **Psychological Review**, Washington, v. 90, n. 4, p. 293-315, 1983.

WATSON, Jane. The probabilistic reasoning of middle school students. *In*: Jones, G. A. (Ed.). **Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning**. New York, NY: Springer, 2005. p. 145-169.

WATSON, Jane; MORITZ, Jonathan. School students' reasoning about conjunction and conditional events. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, London, v. 33, n. 1, p. 59-84, 2002.