revemop

10.33532/revemop.e202320 eISSN 2596-0245

O círculo trigonométrico manipulável no ensino e na aprendizagem de razões trigonométricas de ângulos especiais

Hamiro Berta Miambo
Paulo Diniz Bene

Resumo: O presente artigo deriva de uma pesquisa, que objetiva avaliar as potencialidades do círculo trigonométrico manipulável no cálculo de razões trigonométricas de ângulos especiais. Nesta pesquisa trabalhou-se com uma amostra de 76 alunos correspondentes a duas turmas da 10ª Classe da Escola Secundaria de Inhamissa, seleccionadas aleatoriamente entre 15 turmas. Para análise e interpretação de dados usou-se o teste de normalidade para os dados obtidas com aplicação de sumativa, e o teste t de student para comparação de médias em amostras independentes. A partir dos resultados obtidos com aplicação da sumativa, os testes estatísticos revelaram melhor desempenho na turma experimental em relação a de controlo. Portanto, sugeriu-se a introdução deste material didáctico para suprimir dificuldades que os alunos enfrentam no cálculo de razões trigonométricas de ângulos especiais.

Palavras-chave: Ângulos. Círculo. Manipulável. Trigonometria.

The manipulable trigonometric circle in the teaching and learning of trigonometric ratios of special angles

Abstract: The present article derives from a research that aims to evaluate the potential of the manipulable trigonometric circle in the calculation of trigonometric ratios of special angles. In this research, we worked with a sample of 76 students corresponding to two classes of the 10th Grade of the Inhamissa Secondary School, randomly selected among 15 classes. For data analysis and interpretation, the normality test was used for data obtained with summative application, and the Student's t-test was used to compare means in independent samples. From the results obtained with the application of summative, the statistical tests revealed better performance in the experimental class compared to the control group. Therefore, the introduction of this didactic material was suggested to suppress difficulties that students face in calculating trigonometric ratios of special angles.

Keywords: Angles. Circle. Manipulable. Trigonometry.

Hamiro Berta Miambo
Licenciado em Ensino de Matemática pela Universidade Save, Moçambique. Professor do Instituto Industrial e de Computação Armando Emílio Guebuza, Maputo, Moçambique.
https://orcid.org/0000-0003-2015-160X
hamirolanga@gmail.com

Paulo Diniz Bene
Doutor em Educação, pela Faculdade de Educação da Universidade Federal da Bahia. Docente da Universidade Licungo, Beira, Moçambique.
https://orcid.org/0000-0002-7579-4592
1957380@etfbsb.edu.br

Recebido em 03/06/2023
Aceito em 07/10/2023
Publicado em 26/12/2023

El círculo trigonométrico manipulable en la enseñanza y el aprendizaje de razones trigonométricas de ángulos especiales

Resumen: El presente artículo deriva de una investigación que tiene como objetivo evaluar el potencial del círculo trigonométrico manipulable en el cálculo de razones trigonométricas de ángulos especiales. En esta investigación se trabajó con una muestra de 76 estudiantes correspondientes a dos clases del 10º Grado de la Escuela Secundaria Inhamisa, seleccionados aleatoriamente entre 15 clases. Para el análisis e interpretación de los datos se utilizó la prueba de normalidad para los datos obtenidos con aplicación sumativa, y la prueba t de Student para comparar medias en muestras independientes. A partir de los resultados obtenidos con la aplicación de sumativo, las pruebas estadísticas revelaron un mejor desempeño en la clase experimental en comparación con el grupo control. Por lo tanto, se sugirió la introducción de este material didáctico para suprimir las dificultades que enfrentan los estudiantes en el cálculo de razones trigonométricas de ángulos especiales.

Palabras clave: Ángulos. Círculo. Manipulable. Trigonometría.

1. Introdução

As dificuldades que os alunos têm enfrentado no PEA fazem com que os intervenientes do mesmo redobrem os esforços de modo a encontrar metodologias alternativas e eficazes para ensinar um determinado conteúdo. No entender de Gellert (2004), materiais manipuláveis são elementos capazes de estabelecer alguma relação entre os objectivos do ensino da Matemática e os resultados. A utilização de material manipulativo nas classes iniciais oferece uma grande vantagem no processo de ensino e aprendizagem das crianças. O material manipulativo no processo de ensino e aprendizagem propicia o ambiente favorável à aprendizagem, desperta a curiosidade das crianças, aproveita o seu potencial lúdico, possibilita o desenvolvimento da percepção das crianças por meio das interacções realizadas com os colegas e com o professor. Para além das vantagens mencionadas, facilita a formulação dos conceitos e nas relações destes com os conceitos anteriores e com as experiencias do quotidiano (SARMENTO, 2018).

Nesta pesquisa são identificadas as principais dificuldades enfrentadas pelos estudantes no cálculo de razões trigonométricas de ângulos especiais a partir da revisão da literatura, foi testada uma estratégia na sala de aulas, que é apresentada como uma proposta didáctica e metodológica para a superação destas dificuldades.

De acordo com Serrazina (1991) materiais manipuláveis são objectos, instrumentos que podem ajudar os alunos a descobrir, a entender ou consolidar conceitos fundamentais nas diversas fases da aprendizagem. Portanto, propõe-se o uso do círculo trigonométrico manipulável como metodologia alternativa visando solucionar os problemas de cálculo das razões trigonométricas de ângulos especiais. Esta pesquisa foi desenvolvida na Escola Secundaria de Inhamissa, envolvendo os alunos da 10ª classe como seus intervenientes.

Esta pesquisa objectiva de forma geral a avaliação das potencialidades do círculo trigonométrico manipulável no cálculo das razões trigonométricas de ângulos especiais. Foram definidos como objectivos específicos, identificar as dificuldades no PEA do cálculo das razões trigonométricas de ângulos especiais; testar a eficiência da metodologia do ensino do cálculo das razões trigonométricas de ângulos especiais através do círculo trigonométrico manipulável na sala de aulas; desenvolver estratégias para o ensino e aprendizagem usando círculo trigonométrico manipulável no cálculo das razões trigonométricas de ângulos especiais.

O uso do círculo trigonométrico manipulável é eficaz para o melhoramento do ensino no cálculo das razões trigonométricas de ângulos especiais, esta foi a hipótese da pesquisa.

2. Justificativa

A escolha do tema deriva pelo facto de o autor ser um profissional da educação e que durante seu percurso estudantil e exercício de suas funções profissionais tem acompanhado discussões e dificuldades que os alunos enfrentam no ensino da trigonometria. A partir das discussões, de proposições inovadoras, promoção e qualificação da educação, percebeu-se a necessidade da escolha deste tema centrado na avaliação das potencialidades do círculo trigonométrico manipulável para ensino da trigonometria. O autor é profissional da educação, portanto, acredita que com este tema poderá compartilhar seus conhecimentos com colegas, profissionais da educação como também com o mundo no geral. A pertinência desta investigação prende-se com o facto de a matemática ser uma área em que muitos alunos revelam dificuldades na trigonometria, sendo que o desenvolvimento desta pesquisa pode, assim, contribuir para que os alunos adquiram conhecimentos de forma lúdica e compreensível para criar, desta forma, aprendizagens mais significativas. Esta pesquisa é actual, uma vez que a qualidade do ensino em Moçambique é questionada, sendo preocupação de todos pesquisadores encontrarem formas de melhorar a qualidade do ensino no País.

3. Problematização

Durante o percurso do autor no ensino básico e médio, e no exercício de suas funções como profissional da educação, constatou-se por este as dificuldades no ensino da trigonometria, principalmente por parte de educandos, tais como, a má percepção dos conceitos das razões trigonométricas, confundindo-as entre si, determinação do valor numérico de uma razão trigonométrica de ângulos não agudos, e simplificação de expressões que envolvem razões trigonométricas defendas, como é o caso de uma expressão que envolve multiplicação, divisão, adição, subtração e/ou potência com razões trigonométricas definidas. Por consequência, quando são abordados conteúdos que envolvem a trigonometria, com alunos e mesmo com estudantes do ensino superior, as dificuldades prevalecem. Por exemplo, no estudo de equações e inequações trigonométricas são notáveis as dificuldades na simplificação e extração/representação da solução da equação. Igualmente, no estudo de funções trigonométricas, observa-se erros tais como: cálculo da imagem de um ângulo e como consequência a representação gráfica incorreta. No estudo de séries numéricas, derivadas e integrais definidos, os alunos não se tornam agentes activos, visto que calcular as razões trigonométricas de um angulo é um dos pré-requisitos na abordagem desses conteúdos. Estes são apenas alguns exemplos. Observa-se que determinar o valor das razões trigonométricas de ângulos especiais, é um dos pré-requisitos indispensáveis na aprendizagem de grande parte dos conteúdos da área da trigonometria.

As dificuldades enfrentadas pelos alunos no estudo da trigonometria em geral, e das razões trigonométricas em particular, de entre vários motivos, derivam das estratégias e materiais didácticos utilizados pelos professores.

Muitas das vezes a metodologia utilizada para ensinar cálculo de razões trigonométricas na 10ª classe, a primeira classe a introduzir-se a trigonometria no Ensino Secundário Geral, limita-se apenas ao quadro e nos cadernos, sendo visto de forma abstracta. “O uso dos materiais didácticos manipuláveis é um importante recurso para o professor em sala de aula. Através deles, as aulas podem torna-se mais compreensíveis e dinâmicas” (SANTOS, 2014, p. 32). São várias as vantagens que podem advir da utilização adequada de materiais manipuláveis. Nivagara (2016) destaca que os materiais didácticos, em particular os manipuláveis podem favorecer o ambiente de ensino e de aprendizagem, possibilitando o alcance de determinadas finalidades como:

Motivar e despertar o interesse dos alunos na aula; facilitar a compreensão dos factos e conceitos; concretizar o que está sendo exposto verbalmente; auxiliar a fixação da aprendizagem pela impressão mais viva e sugestiva que o material pode provocar; dar oportunidade de manifestação de aptidões e desenvolvimento de habilidades com o manuseio por parte dos alunos (NIVAGARA, 2016, p. 189).

Devido ao exposto, surge a seguinte questão: “até que ponto o uso do círculo trigonométrico manipulável pode auxiliar no ensino e na aprendizagem das razões trigonométricas de ângulos especiais?”

4. Fundamentação Teórica

4.1. Historial da trigonometria

“Trigonometria, como se pode deduzir da própria palavra, trata da determinação dos elementos de um triângulo. Do ponto de vista etimológico, a palavra trigonometria significa medida dos triângulos, sendo formada por três radicais gregos: tri: três; gonos: ângulos; metrein: medir” (CHUEIRI; GONÇALVES, 2008, p. 11).

A trigonometria começou com as civilizações babilónicas, egípcias e desenvolveu-se na antiguidade graças aos gregos e indianos e um dos famosos exemplos de sua utilização foi a medição do raio da terra por Eratóstenes. A partir do século VIII d.c., astrónomos islâmicos aperfeiçoaram as descobertas gregas e indianas, notadamente em relação às funções trigonométricas (MALANGA, 2017, p. 43).

De acordo com Boyer (1996, apud MARTINS, 2014):

> Na segunda metade do século II a.C., Hiparco de Nicéia adoptou a base 60 para contagem e dividiu a circunferência em 360 partes iguais. A cada parte em que a circunferência ficou dividida atribuiu-lhe o nome de arco de um grau. Pegando nesse arco voltou-o a dividir em 60 partes iguais, designando cada parte por arco de um minuto. Os estudos de Hiparco conduziram-no à relação entre o comprimento de um arco e o ângulo ao centro correspondente de um círculo arbitrário. Supõe-se que tenha sido ele também, a construir a primeira tabela trigonométrica com os valores das cordas de uma série de ângulos de 0º a 180º. Todas estas descobertas e avanços na astronomia conferiram-lhe o título de "Pai da Trigonometria" (p. 5).

No entender de Martins (2014), os primeiros conceitos de Trigonometria remontam aos egípcios e aos babilónicos, por volta do século IV e V a.C. Os gregos foram os primeiros a efectuar um estudo das relações entre os ângulos num círculo e os comprimentos das suas cordas. É importante referir que Thales de Mileto e Pitágoras, também contribuíram notoriamente no desenvolvimento da trigonometria. O primeiro com os seus estudos de semelhança de triângulos e o segundo formalizou o teorema que tem o seu nome: "O quadrado da hipotenusa de um triângulo rectângulo é igual à soma dos quadrados dos catetos", que mais tarde contribuiu para estabelecer a fórmula fundamental de trigonometria.

Portanto, a trigonometria é o ramo de matemática que estuda a relação entre as medidas dos ângulos e medidas dos lados de um triângulo. O astrónomo Hiparco de Nicéia, por volta de 180 a 125 a.C., ganhou o direito de ser chamado "o pai da Trigonometria.

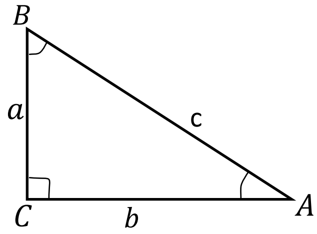
Cuambe (2017) refere que, a trigonometria é importante pois, tem muitas aplicações na Engenharia, na Astronomia, e em muitos outros ramos de actividades. Em particular, o seu uso importante na determinação de distâncias que são difíceis ou impossíveis de obter directamente, como por exemplo, a distância sobre o mar, altitudes em pontos inacessíveis e distâncias entre planetas.

A trigonometria começou como uma Matemática eminentemente prática, para determinar distâncias que não podem ser medidas directamente. Também serviu à navegação, à agrimensura e à astronomia. Ao lidar com a determinação de pontos e distâncias em três dimensões, a trigonometria esférica ampliou sua aplicação à Física, à Química e a quase todos os ramos da engenharia, em especial no estudo de fenómenos periódicos como a vibração do som e o fluxo de corrente alternada. A trigonometria ajuda na determinação de distâncias que são difíceis ou impossíveis de obter directamente.

4.2. Trigonometria no Triângulo rectangular

Triângulo é uma figura geométrica plana formada por três ângulos. Segundo Dolce & Pompeo (2013) um triângulo é rectangular se e somente se, te um ângulo recto.

Figura 1: Triângulo rectangular



Fonte: Dolce & Pompeo (2013, p. 38)

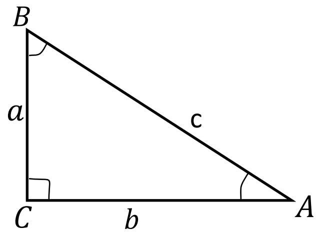
Hipotenusa é o lado oposto ao ângulo recto de um triângulo rectangular (c).

Catetos são lados que formam o ângulo recto de um triângulo rectangular (a e b).

- ✓ **Cateto oposto de um ângulo** é o cateto oposto ao mesmo ângulo.
- ✓ **Cateto adjacente de um ângulo** é o cateto que forma o mesmo ângulo.

Definição das razões trigonométricas no triângulo rectângulo: de acordo com o mesmo autor acima citado, a

Figura 2: Triângulo rectangular



Fonte: Dolce & Pompeo (2013, p. 38)

Seno de um ângulo é a razão entre cateto oposto ao ângulo e a hipotenusa,$\boldsymbol{sen\widehat{A} = \frac{a}{c}}$

Co-seno de um ângulo é a razão entre cateto adjacente ao ângulo e a hipotenusa, $\boldsymbol{cos\widehat{A} = \frac{b}{c}}$

Tangente de um ângulo é a razão entre cateto oposto e cateto adjacente ao ângulo, $\boldsymbol{tg\widehat{A} = \frac{a}{b}}$

Co-tangente de um ângulo é a razão entre cateto adjacente ao ângulo e cateto oposto ao ângulo,

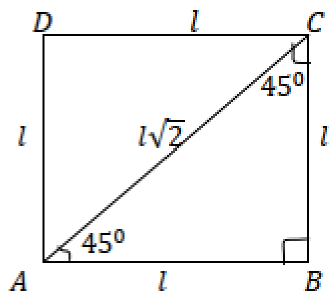
$\boldsymbol{cotg\widehat{A} = \frac{b}{a}}$.

Razões trigonométricas de 30º, 45º e 60º no triângulo rectangular notável: de acordo com Chueiri & Gonçalves (2008)

Razões trigonométricas de 45º.

Considere-se um quadrado ABCD cujo lado tem medida l unidades de comprimento. E dado um triângulo ΔABC.

Figura 3: Quadrado

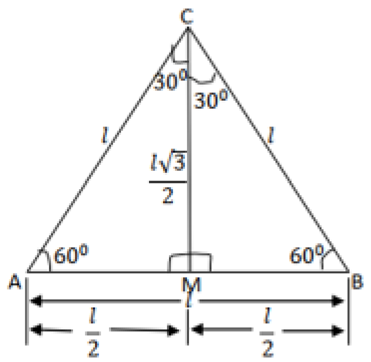


Fonte: Chueiri & Gonçalves (2008, p.19)

$$sen45^o = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, cos45^o = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. tag45^o = \frac{l}{l} = 1 \text{ e } cotg45^o = \frac{l}{l} = 1$$

Razões trigonométricas de 30º e 60º

Figura 4: Triângulo equilátero



Fonte: Chueiri & Gonçalves (2008:19)

$$sen30^o = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{1}{2}, \qquad sen60^o = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$cos30^o = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad cos60^o = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{1}{2},$$

$$tag30^o = \frac{\frac{l}{2}}{\frac{l\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \qquad tag60^o = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{\frac{l}{2}} = \sqrt{3},$$

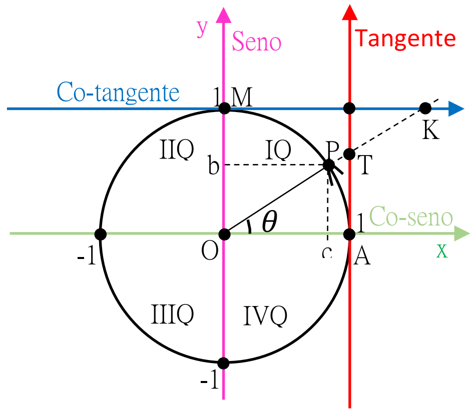
$$cotg30^o = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{\frac{l}{2}} = \sqrt{3}. \qquad cotg60^o = \frac{\frac{l}{2}}{\frac{l\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

10.33532/revemop.e202311 eISSN 2596-0245

4.3. Ciclo trigonométrico ou círculo trigonométrico

De acordo com Machado, Pinto e Salvador (2012), Ciclo trigonométrico ou círculo trigonométrico é um círculo de raio unitário cujo centro está colocado na origem de um referencial ortogonal XOY.

Figura 5: Representação das razões trigonométricas no círculo trigonométrico



Fonte: Chueiri & Gonçalves (2008, p. 31)

Observe o triângulo rectangular ΔCOP na Figura 5: $\overline{OC}$ é cateto adjacente em relação ao ângulo θ; $\overline{CP}$ é cateto oposto em relação ao ângulo θ; $\overline{OP}$ = $raio$ = 1 é hipotenusa do triângulo COP.

Definição das razões trigonométricas no círculo trigonométrico de acordo com Chueiri & Gonçalves (2008).

Seno: O arco orientado $\widehat{AP}$ de medida α o qual determina o segmento $\overline{OP}$ a projecção deste segmento sobre o eixo dos senos é o segmento $\overline{\overline{OC}}$, por definição: $\text{sen}\alpha = \overline{OC}$

Justificação: $\text{sen}\alpha = \frac{\overline{CP}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{CP}}{1} = \overline{CP} = \overline{OC}$. Portanto, seno do ângulo α é igual a cateto oposto em relação ao mesmo ângulo.

$$\mathbf{sen\alpha = cateto\ oposto = \overline{OC}}$$

Co-seno: O arco orientado $\widehat{AP}$ de medida α o qual determina o segmento $\overline{OP}$ a projecção deste segmento sobre o eixo dos co-senos é o segmento $\overline{Ob}$, por definição: $\cos\alpha = \overline{Ob}$

Justificação: $\cos\alpha = \frac{\overline{Ob}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{Ob}}{1} = \overline{Ob}$. Portanto, seno do ângulo α é igual a cateto oposto em relação ao mesmo ângulo.

$$\mathbf{cos\alpha = cateto\ adjacente = \overline{Ob}}$$

Quanto ao triângulo rectangular ΔOAT.

Tangente: considerando-se a recta que passa pelos pontos O e P, esta intercepta a recta dos tangentes no ponto T determinando o segmento $\overline{\mathrm{AT}}$, por definição: $tg\alpha$ =$\overline{\mathrm{AT}}$

Justificação: $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\overline{\mathrm{AT}}}{\overline{\mathrm{OA}}} = \frac{\overline{\mathrm{AT}}}{1} = \overline{\mathrm{AT}}$. Portanto, tangente do ângulo α é igual ao posto de intercessão das rectas $\overrightarrow{\mathrm{OT}}$ e $\overrightarrow{\mathrm{AT}}$

Quanto ao triângulo rectangular ΔOMK

Co-tangente: considerando-se a recta que passa pelos pontos O e P, esta intercepta a recta dos co-tangentes no ponto K determinando o segmento $\overline{\mathrm{MK}}$, por definição: $\mathrm{cotg}\alpha$ =$\overline{\mathrm{MK}}$,

Justificação: sabe-se que $\alpha \equiv \widehat{\mathrm{K}}, \mathrm{cotg}\widehat{\mathrm{K}} = \frac{\overline{\mathrm{MK}}}{\overline{\mathrm{OM}}} = \frac{\overline{\mathrm{MK}}}{1} = \overline{\mathrm{MK}}$. Portanto, Co-tangente do ângulo α é igual ao posto de intercessão das rectas $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ e $\overrightarrow{\mathrm{MK}}$.

> Os arcos representados na figura 6 possuem extremidade em P, mas números de voltas e sentidos diversos, esses arcos são chamados de arcos côngruos, eles possuem as mesmas propriedades trigonométricas. Podem ser, algebricamente, ser representados pelo conjunto: $\widehat{\mathrm{AP}}$ = {$\alpha \epsilon IR$: $\widehat{\mathrm{AP}}$= α + $2k\pi$, $k\epsilon$Z}, k indica o número de voltas completas: se k for positivo, o sentido de orientação do ângulo é anti-horário, caso contrário é horário (MALANGA, 2017, p. 46).

4.4. Material Didático

Podemos considerar Material Didático qualquer recurso que tenha a capacidade de transformar a maneira de ver e entender determinado assunto, e que também auxilie e impulsione o processo de ensino e aprendizagem. Segundo Bandeira (2009), os materiais didáticos podem ser vistos "como produtos pedagógicos utilizados na educação e, especificamente, como material instrucional que se elabora com finalidade didática". De acordo com Serrazina (1991), materiais manipuláveis são objectos, instrumentos que podem ajudar os alunos a descobrir, a entender ou consolidar conceitos fundamentais nas diversas fases da aprendizagem. Segundo Lorenzato (2006), Material Didático Manipulável pode ser qualquer instrumento que seja útil ao processo de ensino e aprendizagem.

"O Ciclo trigonométrico ou círculo trigonométrico é um círculo de raio unitário cujo centro está colocado na origem de um referencial ortogonal XOY" (MACHADO; PINTO; SALVADOR, 2012, p. 6).

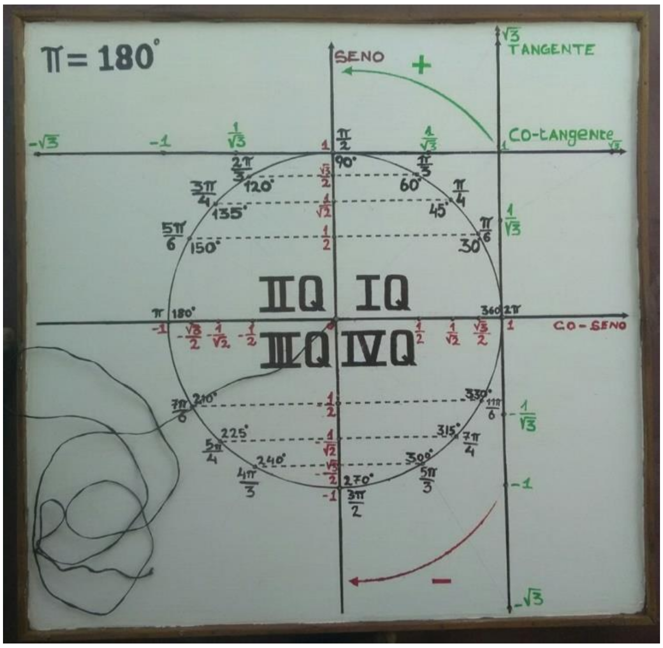
Portanto, material manipulável é um recurso essencial no ensino, além de tornar as aulas ilustrativas, desperta atenção nos alunos, tona a aula mais interativa, e proporciona desta forma uma aprendizagem significativa e estável, cria interesse de aprender por parte dos alunos. Círculo trigonométrico manipulável é uma placa que contém desenho do círculo trigonométrico, serve como um meio de ilustração de vários conceitos trigonométricos.

a) Circulo trigonométrico manipulável, sua composição e suas características

De acordo com Serrazina (1991), materiais manipuláveis são objectos, instrumentos que podem ajudar os alunos a descobrir, a entender ou consolidar conceitos fundamentais nas diversas fases da aprendizagem.

Portanto, a partir das definições apresentadas, pode-se assumir que, **círculo trigonométrico manipulável** é uma placa de madeira que contém desenho do círculo trigonométrico, serve como um meio de ilustração de vários conceitos trigonométricos.

Figura 6: Círculo trigonométrico manipulável



Fonte: Autor (2020)

b) Composição e características do círculo trigonométrico manipulável

O círculo trigonométrico manipulável é composto por:

- ✓ **Um fio** - Ilustra a representação de amplitude e a determinação dos valores das razões trigonométricas do ângulo envolvido, além de ilustrar o sentido anti-horário (sentido positivo) e horário (sentido negativo), não só mas também, forma um triângulo rectangular que facilita a extracção dos valores das razões trigonométricas.

- ✓ **Pregos** – Ilustram terminal de amplitude do ângulo envolvido; auxiliam na formação do triângulo rectangular com o fio.
- ✓ **Eixo do seno** – É o eixo no qual encontramos o valor de seno de qualquer ângulo notável.
- ✓ **Eixo do co-seno** - É o eixo no qual encontramos o valor de co-seno de qualquer ângulo notável.
- ✓ **Eixo tangente** - É o eixo no qual encontramos o valor de tangente de qualquer ângulo notável.
- ✓ **Eixo co-tangente** - É o eixo no qual encontramos o valor de co-tangente de qualquer ângulo notável.

c) Dificuldades enfrentadas pelos alunos no cálculo das razões trigonométricas

De acordo com Chigonga (2009, cit. em FEIJÓ, 2018) "os valores negativos de seno, co-seno, tangente e co-tangente, os alunos não apresentam interpretação adequada e não conseguem identificar o quadrante correcto de alguns ângulos".

Em um estudo feito pelo Brandt e Dionizio (2011) concluíram que os alunos não compreendem qual relação trigonométrica relaciona o cateto oposto e o cateto adjacente do triângulo proposto, não compreendem a diferença existente entre seno, co-seno, tangente e co-tangente.

Feijó (2018), na sua pesquisa conclui que:

> As dificuldades enfrentadas pelos alunos estão em todos os ramos da trigonometria, são observados desde a base, desde os fundamentos da trigonometria, os alunos apresentam dificuldades em interpretar correctamente as razões trigonométricas, confundindo as razões seno e co-seno entre si, e visualizar e/ou trabalhar com ângulos não agudos.

Portanto, percebe-se que os alunos no cálculo das razões trigonométricas apresentam as seguintes dificuldades:

- ✓ Cálculo das razões trigonométricas de um ângulo maior que 90º e menor que 360º, e ângulo maior que 360º;
- ✓ Cálculo das razões trigonométricas de um ângulo múltiplo de 90º;
- ✓ Cálculo das razões trigonométricas de um ângulo negativa;
- ✓ Redução de um ângulo maior que 360º;
- ✓ Determinação do sinal do valor das razões trigonométricas definidas.

Quadro 1: Vantagem e desvantagem do círculo trigonométrico

Vantagem do círculo trigonométrico	Desvantagem do círculo trigonométrico
✓ O Círculo Trigonométrico, também chamado de ciclo ou circunferência trigonométrica, auxilia no cálculo das razões trigonométricas; ✓ Ajuda a verificar a que quadrante pertence determinado ângulo, reduzir ângulo ao primeiro quadrante, verificar o sinal das razões trigonométricas de um ângulo, comparar a ordem de grandeza entre duas razões trigonométricas; ✓ Auxilia na representação das razões trigonométricas de qualquer ângulo, seja ele da orientação, positiva ou negativa, agudo ou obtuso e até ângulos com valor absoluto da amplitude maior que 360º.	Não fornece o número exacto das razões trigonométricas de alguns ângulos não especiais, porém fornece uma estimativa adequada.

Fonte: Autor apoiado nas ideias de Chigonga (2009) Brandt e Dionizio (2011) e Feijó (2018)

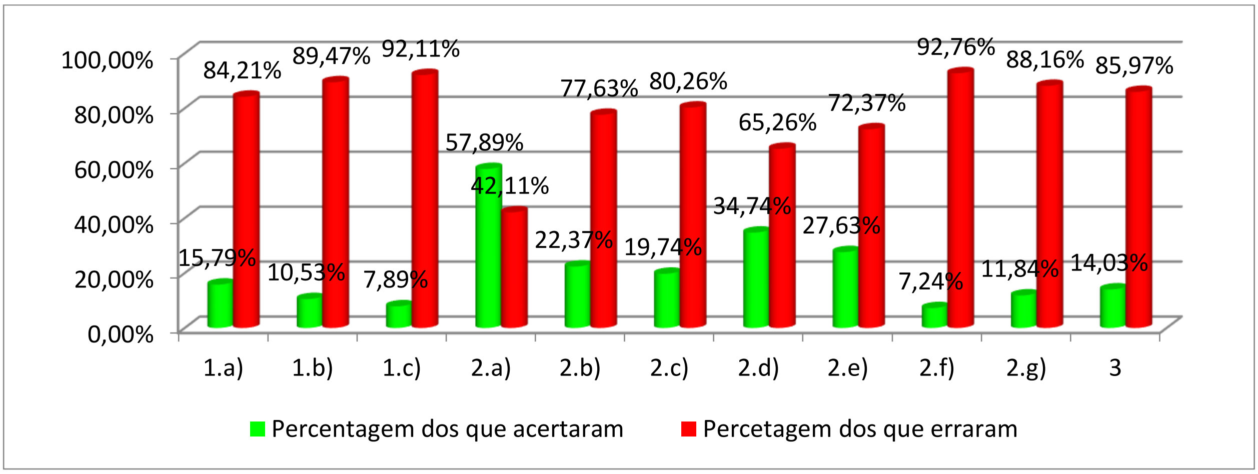
5. Metodologia

Quanto à natureza trata-se de uma pesquisa aplicada, quanto aos objectivos a pesquisa é exploratória, quanto à colecta de dados a pesquisa é de carácter experimental. Nesta pesquisa trabalhou-se com duas turmas da 10ª Classe dos alunos do período de manhã da Escola Secundária de Inhamissa, a escolha do período foi intencionalmente por conveniência. Usou-se pacote Software informático Microsoft Excel de modo a gerar uma selecção aleatória de duas turmas do período de manhã, num total de 14 turmas da 10ª Classe. Portanto nesta pesquisa utilizou-se uma amostra aleatória simples, uma vez que, de acordo com Farias (2008) "amostragem aleatória simples é um método no qual, toda amostra de mesmo tamanho n tem igual chance (probabilidade) de ser sorteada" (p. 3). O tamanho da amostra foi calculado pela fórmula de Pocinho, com um intervalo de confiança de 95% e nível de significância de 5%.

5.1. Procedimentos metodológicos e discussão de resultados

Trabalhou-se com duas turmas, a experimental e de controlo. Na turma experimental, leccionou-se duas aulas para cada turma sobre cálculo de razões trigonométricas de ângulos especiais, com recurso ao círculo trigonométrico, enquanto a turma de controlo continuava a ter as mesmas aulas, mas com os métodos tradicionais. Depois da lecionação aplicou-se um sumativo nas duas turmas, de modo a avaliar o nível de assimilação de conhecimentos sobre cálculo das razões trigonométricas de ângulos especiais na turma de controlo e na turma experimental, conforme ilustram os gráficos a seguir.

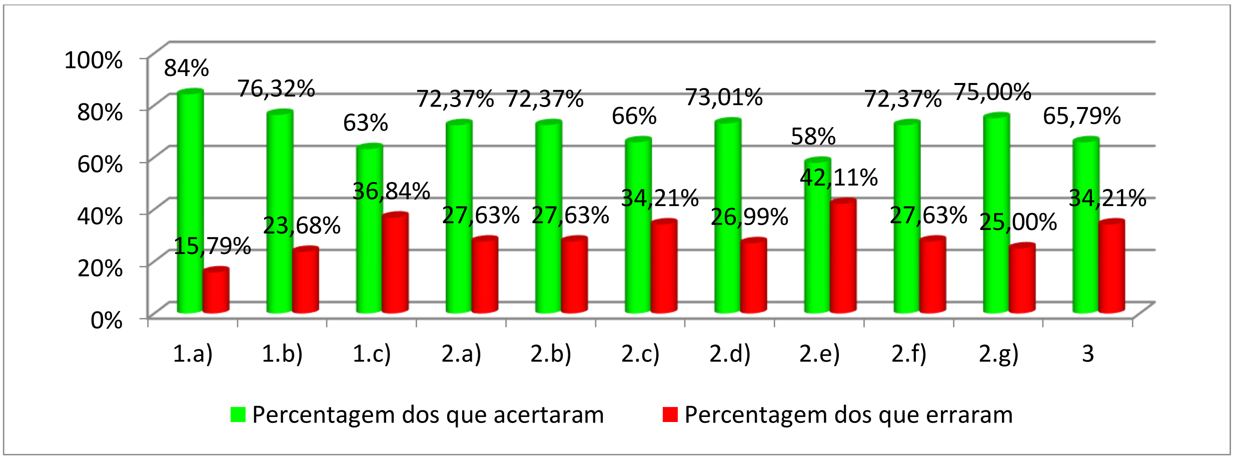
Gráfico 1: Resultados da turma de controlo do teste aplicado após a leccionação



Fonte: autor (2021)

O gráfico 1 revela que os alunos ainda apresentam dificultades no cálculo de razões trigonométricas de ângulos especiais. Em termos de classificação, cerca de 80,14% de alunos estão em situação negativa e os restantes 19.86% em situação positiva.

Gráfico 2: Resultados da turma experimental do teste aplicado após a leccionação



Fonte: autor (2021)

O gráfico 2 revela que os alunos assimilaram positivamente as licções sobre cálculo de razões trigonométricas de ângulos especiais. Em termos de classificação, cerca de 69,93% de alunos estão em situação positiva e os restantes 30,07% em situação negativa.

Verificou-se a normalidade das amostras (Tabela 2) e aplicou-se o teste de amostras independentes como ilustra a tabela 1.

Tabela 1: Teste de normalidade

	Shapiro-Wilk		
	Estatística	n	Sig.
Turma de Controlo	0.904	38	0.059
Turma Experimental	0.907	38	0.065

Fonte: autor (2021)

De acordo com os resultados do teste de normalidade de Shapiro-Wilk as variáveis em análise apresentam uma distribuição normal, possibilitando desta forma a aplicação do teste t de student.

Tabela 2: Teste de Amostras independentes

Teste de amostras independentes										
		Teste de Levene para igualdade de variações		Teste t para Igualdade de Médias						
		F	Sig.	T	Df	Sig. (2 extremidades)	Diferença média	Erro padrão de diferença	95% Intervalo de confiança da diferença	
									Inferior	Superior
Notas	Variações iguais assumidas	0.459	0.503	-6.443	36	0.000	-9.632	1.495	-12.663	-6.600
	Variações iguais não assumidas			-6.443	35.018	0.000	-9.632	1.495	-12.666	-6.597

Fonte: autor (2021)

a) Interpretação da tabela 2

Na tabela 2, de cordo com o teste de Levene as variâncias são homogéneas, visto que, $P-value = 0.503 > \alpha = 0.05$, de acordo com o teste t para a comparação de duas médias de duas amostras independentes.$\frac{P-value}{2} = \frac{0}{2} = 0 < 0{,}05$, portanto, a um intervalo de confiança de 95% e ao nível de significância de 5%, conclui-se que houve uma aprendizagem significativa na turma experimental com aplicação do círculo trigonométrico manipulável na mesma turma.

6. Considerações Finais

A pesquisa possibilitou-nos a identificar as dificuldades que os alunos apresentam no cálculo das razões trigonométricas de ângulos especiais.

A partir de resultados obtidos com aplicação do teste sumativo na turma de controlo e experimental, com o uso do teste *t de student*, a um intervalo de confiança de 95% constatou-se que o uso do círculo trigonométrico manipulável no cálculo das razões trigonométricos de ângulos especiais é eficaz comparavelmente com o método tradicional.

Houve uma aprendizagem significativa na turma experimental, visto que, o círculo trigonométrico manipulável proporcionou uma mudança passiva para activa, tanto para o aluno quanto para o professor, portanto, o uso do círculo trigonométrico manipulável no cálculo das razões trigonométricas dos ângulos especiais, contribui para aprendizagem significativa e melhora o ensino de matemática concretamente no cálculo das razões trigonométricos de ângulos especiais.

Com os resultados obtidos nessa pesquisa, espera-se despertar nos professores de Matemática reflexões acerca do ensino e aprendizagem de cálculo de razões trigonométricas de ângulos especiais, conduzindo-os a uma inserção de círculo trigonométrico manipulável.

O estudo realizado possibilitou ampliar nossa visão prática a respeito do círculo trigonométrico manipulável, sua definição e suas contribuições no ensino e aprendizagem de cálculo de razões trigonométricas de ângulos especiais.

Referências Bibliográficas

BANDEIRA, Denise. Material didático: conceito, classificação geral e aspecto da elaboração. In: Ciffone, H. (Org.). **Curso de Materiais didáticos para smartphone e tablet**. Curitiba, IESDE. 2009.

DIONIZIO, Fátima Queiroz; BRANDT, Célia Finck**. Análise das dificuldades apresentadas pelos alunos do ensino médio em trigonometria**. Paraná, 2011.

FARIAS, Ana Maria Lima. **Inferência Estatística**. UFLIM, 2008.

FEIJÓ, Rachel Saffir Araújo Alves. **Dificuldades e obstáculos no aprendizado de trigonometria: um estudo com alunos do ensino médio do Distrito Federal**. 2018. 107 f., il. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade de Brasília, Brasília, 2018.

GELLERT, Uwe. Didactic material confronted with the concept of mathematical Educational Studies in Mathematics. **Dordrech**t, v. 55, n. 1, p.163-179, 2004.

LORENZATO, Sergio. **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. Campinas: Autores Associados, 2006.

MACHADO, V. Joaquim, P.; SILVA, J. C. **Manual de Matemática para 12º ano** – Matemática, 2012;

NIVAGARA, Daniel. **Didáctica Geral**: Aprender a Ensinar. Maputo, 2016

POCINHO, Margarida. **Estatística**: Teoria e Exercícios Passo a Passo. Volume I, 2009;

SANTOS, E. de S. **Ensino-aprendizagem da trigonometria no Ensino Médio: um olhar para os livros didáticos**. 2014. 89f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2014.

SARMENTO, Alan Kardec Carvalho (s.d). **A utilização dos materiais manipulativos nas aulas de matemática**. Disponível em: http://voutecontaraprendizagem.blogspot.com.br/2013/12/3-encontro-daoficina-trilha-dos.html. acesso: em Outubro 2018;

SERRAZINA, Lurdes. **Aprendizagem Matemática**: a importância da utilização dos materiais (7ª ed). Lisboa, 1991.