

Cálculo Diferencial e Integral na Graduação em Matemática: Contribuições da Resolução de Problemas e da Análise da Produção Escrita

Luciana Maria Dias de Ávila Rodrigues
Regina da Silva Pina Neves
Raquel Carneiro Dörr

Resumo: No contexto de um curso de Cálculo Diferencial e Integral, o presente estudo teve como objetivos analisar a produção escrita de estudantes de graduação em matemática ao resolverem problemas de otimização e compreender as potencialidades dessas análises para a intervenção pedagógica. Para tanto, estudantes ingressantes de uma instituição pública responderam a dois problemas de otimização. Os resultados mostram que os estudantes, em sua maioria, apresentaram dificuldades conceituais em tópicos curriculares, como propriedades de quadriláteros, cálculos de área e perímetro, equações e funções; poucos perceberam o valor de se utilizar conceitos do ensino médio como ferramentas de aproximação aos conceitos e à linguagem matemática do cálculo. As análises foram essenciais enquanto estratégia didática para o planejamento de intervenções pedagógicas específicas, desenvolvidas ao longo do semestre letivo.

Palavras-chave: Cálculo Diferencial e Integral. Produção escrita. Intervenção pedagógica.

Luciana Maria Dias de Ávila Rodrigues
Doutora em Matemática pela
Universidade de Brasília (UnB).
Professora do Departamento de
Matemática da UnB, Brasília, Distrito
Federal, Brasil.

<https://orcid.org/0000-0002-8952-0277>
✉ luavila@unb.br

Regina da Silva Pina Neves
Pós-doutora em Educação em Ciências,
Matemática e Tecnologias pela
Universidade Estadual de Campinas
(Unicamp). Professora do Departamento
de Matemática da UnB, Brasília, Distrito
Federal, Brasil.

<https://orcid.org/0000-0002-7952-9665>
✉ reginapina@mat.unb.br

Raquel Carneiro Dörr
Doutora em Educação pela Universidade
de Brasília (UnB). Professora do
Departamento de Matemática da UnB,
Brasília, Distrito Federal, Brasil.

<https://orcid.org/0000-0001-6453-7032>
✉ raqueldorr@unb.br

Recebido em 20/11/2023
Aceito em 13/12/2023
Publicado em 31/12/2023

Differential and Integral Calculus in an undergraduate course in mathematics: contributions of problem solving and written production analysis

Abstract: In the context of a Differential and Integral Calculus (DIC) course, this study aimed to analyse the written registers of undergraduate mathematics students when solving optimisation problems and to understand the potential of these analyses for a pedagogical intervention. To this end, undergraduate mathematics students from a public institution answered two optimisation problems. Analysis of the written productions was used as a research strategy. The results show that most of the students had conceptual difficulties with curricular topics, such as properties of quadrilaterals, area and perimeter, equations and functions; few realised the value of using high school concepts as tools for approaching the concepts and mathematical language of ICD; the analyses were essential as a didactic strategy for planning specific pedagogical interventions, developed throughout the academic semester.

Keywords: Differential and integral calculus. Written production. Pedagogical intervention.

Cálculo Diferencial e Integral para la graduación en matemáticas: aportes a solución de problemas y análisis de la producción escrita

Resumen: En el contexto de una carrera de Cálculo Diferencial e Integral, el presente estudio tuvo como objetivo analizar la producción escrita de estudiantes en la resolución de problemas de optimización y comprender el potencial de estos análisis para la intervención pedagógica. Para ello, estudiantes entrantes de la licenciatura en Matemáticas de una institución pública respondieron dos problemas de optimización. El análisis de la producción escrita fue entendido como una estrategia de investigación. Los resultados muestran que la mayoría de los estudiantes tuvieron dificultades conceptuales en temas curriculares, como

propiedades de cuadriláteros, área y perímetro, ecuaciones y funciones; pocos se dieron cuenta del valor de utilizar conceptos de la escuela secundaria como herramientas para abordar los conceptos y el lenguaje matemático del Cálculo.

Palabras clave: Cálculo Diferencial e Integral. Producción escrita. Intervención pedagógica.

1 Introdução

O Cálculo Diferencial e Integral (CDI) tem se mostrado historicamente presente na formação inicial de estudantes de diferentes áreas do conhecimento devido à sua relevância frente a fenômenos da engenharia, medicina, biologia, física, matemática, entre outras áreas. Suas aplicações são evidenciadas nos resultados provenientes da interconexão dessas áreas e pelo avanço tecnológico, especialmente no que diz respeito à transmissão de dados em alta velocidade e à troca de informações em tempo real (REIS, 2009). Assim, o CDI demarca suas contribuições em medições de taxas de variação, simulações de trajetórias, deslocamentos de partículas e muitas outras (STEWART, 2009). Além disso, tem um papel relevante em estudos de modelos epidemiológicos face à proliferação de doenças infecciosas, como dengue e a Covid-19, exigindo, por exemplo, análises sobre o patamar endêmico e a existência de limiares nas taxas de propagação (HETHCOTE, 2000).

Frente a tudo isso, Barufi (1999) já defendia o CDI como um curso base, amplo e integrador, fundamental para a graduação. Ao mesmo tempo, alertava sobre a coexistência de diferentes enfoques em seu tratamento nas instituições de ensino, ora mais teórico, ora mais aplicado. Outra questão levantada sobre o CDI e seu ensino refere-se às dificuldades quanto ao nível de rigor simbólico-formal a ser adotado junto aos estudantes (LIMA, 2013). Iglioni (2009, p. 13) complementa tais posicionamentos ao afirmar que as noções de “número real, infinito, continuidade, limite e função, formam o cerne da Matemática e possuem constituição vital no desenvolvimento do pensamento avançado nessa área de conhecimento”.

Nesse contexto, ensinar e aprender CDI, em instituições públicas ou privadas, tem sido um tema cada vez mais discutido diante da ampliação do número de estudantes no ensino superior, das dificuldades conceituais em matemática apresentadas por muitos deles em tópicos curriculares da educação básica, das altas taxas de reprovação e evasão (RASMUSSEN; MARRONGELE; BORBA, 2014). Tudo isso tem ampliado as investigações nacionais e internacionais sobre CDI e, conseqüentemente, a apresentação de seus resultados em sessões temáticas de eventos científicos, reverberando, também, em publicações. Assim, acompanhamos esse crescimento, há algumas décadas, no International Congress on Mathematics Education (ICME), no Psychology of Mathematics Education (PME), no Seminário Internacional de Pesquisa

em Educação Matemática (SIPEM) e no Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM), estes dois últimos organizados pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM). Muitos dos estudos apresentados nesses eventos foram desenvolvidos pelo Grupo de Trabalho 04 – Educação Matemática no Ensino Superior da SBEM, que tem sistematizado resultados de pesquisas, identificando lacunas teóricas e metodológicas referentes ao ensino e aprendizagem de CDI (FROTA; BIANCHINI; CARVALHO, 2013; BIANCHINI; LIMA; GOMES, 2019, por exemplo). Mais recentemente, observamos a ampliação de estudos sobre CDI em dissertações do Mestrado Profissional em Matemática em Rede (PROFMAT) e em sessões temáticas de ensino no Colóquio Brasileiro de Matemática e na Bienal de Matemática (SOUZA, 2019), organizados pela Sociedade Brasileira de Matemática. Igualmente, nota-se que essa pesquisa tem sido desenvolvida/socializada em muitos outros espaços, especialmente, nos programas de pós-graduação em Educação Matemática, Ensino de Ciências e Matemática e Educação (LUZ; SANTOS, 2015; ANDRADE; ESQUINCALHA; OLIVEIRA, 2020).

De modo geral, essas investigações atuam em quatro frentes: 1/ inclusão de noções de CDI no ensino médio; 2/ disciplinas de pré-cálculo, cálculo zero, entre outras nomeações na graduação, como disciplina ou projeto de extensão; 3/ transição do ensino médio para o superior (aspectos cognitivos, didáticos, emocionais e organizacionais) e 4/ tutoria ou monitoria na disciplina de CDI. Interessa-nos, especialmente, os estudos com ingressantes no ensino superior nessa passagem de estudante de matemática para estudante de CDI.

Nesse cenário, os estudos que se dedicam a compreender as dificuldades de aprendizagem, os índices de reprovação e a evasão na disciplina de CDI analisam, por exemplo, como as reprovações causam nos estudantes frustração e desmotivação, o que pode influenciar negativamente seu desenvolvimento, tanto acadêmico quanto emocional e social (NASSER, 2009; ALVARENGA; DÖRR; VIEIRA, 2016; DÖRR, 2017). Outros estudos têm apresentado o custo econômico e social do fracasso do ensino e da aprendizagem de CDI para as instituições de ensino superior e para a sociedade, tendo em vista as demandas por novas turmas, a necessidade de contratar mais docentes e de ampliar os espaços físicos (ZUIN, 2001; LIRA, 2008). A esse respeito, Reis (2001, p. 4) foi enfático ao afirmar que “recebemos um grande contingente de alunos passivos, dependentes, sem domínio de conceitos básicos, com pouca capacidade crítica, sem hábitos de estudar e conseqüentemente, inseguros”. Malta (2004) registra que os problemas referentes à reprovação em CDI estão diretamente ligados à qualidade do ensino e da aprendizagem na Educação Básica, em especial no ensino médio. Aos aspectos já mencionados, soma-se o fato de que os estudantes não são preparados para o ingresso no ensino superior. Em

decorrência disso, apresentam pensamento matemático não compatível com a nova fase acadêmica, tendo dificuldades de abstração, de compreensão e de interpretação dos conceitos aplicados (NASSER, 2012).

Muitos pesquisadores têm se dedicado ao desenvolvimento de metodologias diferenciadas para o ensino e a aprendizagem em CDI. Alguns o fazem por meio da observação, intervenção e análise da prática pedagógica de colegas de trabalho e/ou participantes dos estudos; outros, a partir da reflexão/ação sobre a própria prática. Assim, observamos investigações baseadas em tendências em Educação Matemática, tais como História da Matemática (OLIVEIRA; RAAD, 2012), Modelagem Matemática (FERRUZZI; ALMEIDA, 2013; LUZ; SANTOS, 2015), e Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (RACHELLI; DENARDI; BULEGON, 2016). Alguns pesquisadores adotam as metodologias ativas de aprendizagem (BONWELL; EISON, 1991), enquanto outros preferem a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática por meio da resolução de problemas (ONUCHIC; ALLEVATO, 2004), entre muitas outras.

Pavanelo e Lima (2017), por exemplo, descrevem o desenvolvimento da disciplina de CDI a partir do conceito de Sala de Aula Invertida (*flipped classroom*). Como sabemos, a Sala de Aula Invertida vem sendo adotada em várias instituições internacionais, como Massachusetts Institute of Technology (MIT), Harvard University, Stanford University, entre outras, em resposta ao processo de ensino comumente baseado na reprodução de procedimentos e no acúmulo de informações. Os autores destacam a viabilidade da proposta e alertam para o fato de que ela exige mudanças na postura do professor e dos estudantes nas aulas presenciais e nos estudos fora da sala, como também mudanças quanto à escolha e à elaboração de material didático compatível com a proposta. Além disso, o estudo alcançou uma das características centrais da Sala de Aula Invertida, que foi não usar o tempo de sala de aula para aulas expositivas, mas para as atividades interativas em grupo.

Dörr (2017) analisou as produções escritas de estudantes ao resolverem problemas na disciplina de CDI e identificou relações entre dificuldades de ordem conceitual ou nos procedimentos algébricos com o processo de aprendizagem do curso. Em resposta, construiu Grupos de Estudos de Cálculo (GEC), com a participação de estudantes, docentes e tutores voluntários da graduação em matemática. Nos encontros, o GEC assumiu como parâmetros para as ações: 1) a resolução de problemas e a análise das produções escritas; 2) o erro como estratégia didática e de ação; 3) o diálogo como espaço para a construção de conceitos; e 4) aspectos da sala de aula invertida, incentivando o estudo individual/grupo, além do GEC por meio

do acesso a materiais como vídeos, textos complementares, listas de problemas, lista de problemas resolvidos com comentários, entre outros materiais.

Mendes e Buriasco (2018) realizaram um estudo que alinhou a prova escrita em 10 fases à análise da produção escrita de 48 estudantes de CDI, de uma universidade federal paranaense, com o intuito de regular as aprendizagens e ampliar o diálogo entre os estudantes, bem como entre estes e o professor. Assim, evidenciou-se a prova escrita em fases como um recurso de ensino, de aprendizagem e de avaliação. Reconheceu-se seu aspecto dinâmico na medida em que apresenta uma nova forma a cada fase realizada. Esse formato favoreceu professor e estudante a se comunicarem de forma individualizada, mesmo sendo os argumentos construídos no coletivo (discussões em sala e discussão entre os estudantes).

Allevato e Onuchic (2019), em estudo teórico-bibliográfico, abordam as possibilidades do trabalho com conexões matemáticas por meio da resolução de problemas na formação inicial de professores de matemática. As autoras confirmam que a resolução de problemas é um recurso relevante e eficiente na criação de contextos de ensino por meio de conexões. Elas defendem que licenciandos vivenciem situações de resolução de problemas que envolvam conexões matemáticas, visto a influência dessa abordagem na possibilidade ou não de utilizá-la em sua futura prática docente na educação básica.

Azevedo, Figueiredo e Palhares (2020) discutem as possibilidades e os desafios de se adotar a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011) para ensinar conteúdos de Cálculo Diferencial e Integral nos horários regulares de aula. Para tanto, situam o trabalho do Grupo de Trabalhos e Estudo em Resolução de Problemas (GTERP) e o roteiro proposto por eles (ONUCHIC, 1999), a saber: 1) preparação do problema; 2) leitura individual; 3) leitura em conjunto; 4) resolução do problema; 5) observar e incentivar; 6) registro das resoluções na lousa; 7) plenária; 8) busca do consenso; 9) formalização do conteúdo; 10) proposição de novos problemas. Os autores discutem, a partir de Andrade e Onuchic (2017), algumas mudanças realizadas pelo GTERP, ao longo do tempo, e a possibilidade de adequações no roteiro por outros pesquisadores em função de necessidades locais, desde que sejam preservadas as etapas essenciais do roteiro. Ademais, eles exemplificam como a metodologia foi implementada, relatam a tarefa proposta para abordar a definição formal de limite e comparam o roteiro do GTERP com o que foi aplicado. Como resultado, os autores avaliam que as adequações foram pertinentes, atenderam às necessidades do contexto educacional, ao mesmo tempo em que preservaram a essência do roteiro. Igualmente, defendem que é possível alterar a metodologia de

ensino e aprendizagem em CDI e cumprir o conteúdo programático da disciplina. Contudo, alertam que:

Do ponto de vista docente, pela pesquisa desenvolvida, cremos que a metodologia de resolução de problemas favorece a aprendizagem dos alunos, no entanto, dispende muita energia do professor. O docente precisa estar ciente que ao se propor a modificar sua prática, encontrará muitos desafios e precisará ser persistente para não abandonar sua proposta e optar somente por aulas tradicionais, cujo planejamento é mais fácil (AZEVEDO; FIGUEIREDO; PALHARES, 2020, p. 20).

De modo geral, essas iniciativas questionam a abordagem didática predominante em CDI das instituições de ensino superior no Brasil. Essas instituições priorizam a aula expositiva, centrada no professor, apresentando conceitos aos estudantes como verdades estabelecidas, sem oferecer muito espaço para dúvidas, diálogo ou tentativa. Além disso, limitam o acesso do professor à produção escrita dos estudantes em situações formais de avaliação (MORELATTI, 2001; REZENDE, 2003). Essas críticas também denunciam o distanciamento, ainda vigente, entre o que já é consenso no âmbito da pesquisa em Educação Matemática no Ensino Superior e a realidade da maioria das salas de aula. Por outro lado, tais estudos descrevem como é possível buscar metodologias que garantam ambientes mais favoráveis à aprendizagem, nos quais os estudantes trabalham mais colaborativamente, valorizando a socialização e a investigação em relação aos conhecimentos de CDI, historicamente e socialmente construídos.

Em recente publicação que aborda as temáticas comuns e básicas de ensino e aprendizagem do Cálculo investigadas sob os olhares de pesquisadores em diferentes países, incluindo o Brasil, Monaghan *et al.* (2023) relembram que foi Felix Klein, no começo do século XX, um dos responsáveis pelo estabelecimento do Cálculo como uma das áreas fundamentais da matemática escolar, *status* que continua até os dias atuais.

Mesmo com os avanços sociais e tecnológicos, bem como com o desenvolvimento de metodologias emergentes para o ensino, as dificuldades de aprendizagem e ensino dos conteúdos de Cálculo ainda persistem no Brasil, evidenciando-se nos elevados índices de reprovação e evasão (RODRIGUES; DÖRR, 2022).

Quanto aos obstáculos de ordem epistemológica e ligadas aos seus conceitos basilares, esses têm sido identificados e observados tanto na introdução de novas estratégias de ensino quanto em reformas curriculares que têm sido colocadas em prática através dos tempos (REZENDE, 2003; SYPNIEVSKI; SCHUBRING, 2023)

Do ponto de vista histórico-social, nota-se a busca constante por alternativas metodológicas ou mudanças curriculares que possam contribuir para a melhoria de seu ensino e

aprendizagem. Nesse sentido, este artigo apresenta uma experiência realizada no contexto da resolução de problemas de otimização, com o objetivo de discutir caminhos instrucionais que levem em conta as necessidades conceituais, didáticas e afetivas dos estudantes iniciantes. A abordagem adotada utiliza o diálogo e as discussões matemáticas a partir das produções escritas dos alunos.

2 Resolução de problemas e análise da produção escrita: em busca de possibilidades para o ensinar e o aprender CDI na graduação em matemática

Nesse cenário de inquietude e busca por metodologias para o ensino e aprendizagem de CDI, temos ampliado o diálogo entre os professores que ensinam matemática em nosso local de atuação. Esse diálogo visa aproximar docentes que atuam em disciplinas, como CDI, análise, álgebra, geometria, com aqueles que atuam em disciplinas como álgebra para o ensino, geometria para o ensino ou estágio curricular supervisionado em matemática. Tal aproximação tem ocorrido, inicialmente, a partir da Extensão Universitária, em ações que articulam estudantes e professores da educação básica e do curso de matemática. Posteriormente, esse trabalho tem sido ampliado para o ensino e a pesquisa, especialmente no desenvolvimento de disciplinas com altas taxas de reprovação, como é o caso de matemática básica, CDI e análise.

Essa convivência acadêmica tem redimensionado o entendimento dos envolvidos com a Educação Matemática no Ensino Superior e suas contribuições para a prática docente. Isso inclui a compreensão das particularidades da atuação docente nesses diferentes grupos de disciplinas, em especial, na licenciatura em matemática. Nota-se que, de maneira geral, a docência na universidade pública brasileira ainda é um ato solitário e desprovido de reflexões sobre a profissionalização do professor e a formação do formador (COURA; PASSOS, 2017).

Esse convívio tem gerado discussões sobre identidade e fazer docente, reflexões sobre a própria prática, avaliação institucional/aprendizagem em larga escala, as estatísticas de aprovação e reprovação em CDI na instituição e, de modo especial, ele tem provocado a busca por novas relações com o ensinar e o aprender CDI na graduação em matemática. Essa provocação ocorre no sentido de busca de práticas pedagógicas que considerem mais a fala e a produção dos estudantes, planejando devolutivas e mediações a partir da análise dessas produções. Além disso, busca-se socializar o *status* produtivo, dando ênfase ao erro e às tentativas dos estudantes, entre outros aspectos. O objetivo é direcionar o ensino para a escuta, o diálogo e a colaboração, visando ampliar as oportunidades de aprendizagem tanto para os estudantes quanto para os docentes.

Todas essas reflexões têm nos aproximado da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática por meio da resolução de problemas (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011) e da análise da produção escrita em matemática, entendendo-a, também, como estratégia de investigação, ensino e aprendizagem (BURIASCO *et al.*, 2014). Essa aproximação é realizada gradualmente e ao longo dos semestres letivos, tendo ciência dos desafios e das necessidades de adaptação, como bem destacam Azevedo, Figueiredo e Palhares (2020). Logo, temos buscado entendimentos sobre as necessidades conceituais, didáticas e afetivas dos estudantes da disciplina de CDI.

Como discutido anteriormente, busca-se uma prática docente em CDI de modo que conceituação/aplicação de limites, derivadas e integrais engendrem significados passíveis de motivar, explicar e contribuir para a formação e para a futura prática profissional dos estudantes. Assim, trabalhamos, neste estudo, com os problemas de otimização, isto é, problemas nos quais se procura determinar os valores extremos de uma função, ou seja, o maior ou o menor valor que uma função pode assumir em um dado intervalo.

Esses problemas são comuns em nossa vida diária e aparecem quando procuramos determinar o nível de produção mais econômico de uma fábrica, o ponto da órbita de um cometa mais próximo da terra, a velocidade mínima necessária para que um foguete escape da atração gravitacional da terra, entre outros. Muitos deles são comumente encontrados em livros didáticos adotados no ensino médio e ocorrem em livros de CDI. Como exemplo, temos Guidorizzi (2001), Thomas (2009), Stewart (2009), entre outros. Outra característica dos problemas que temos utilizado é o fato de que eles apresentam convergências com tópicos curriculares do ensino médio, sendo, assim, já conhecidos pelos estudantes ou por muitos deles, constituindo em espaço privilegiado de atuação do docente de CDI para a transição de estudante de matemática na educação básica para estudante de CDI no ensino superior. Ademais, temos como hipótese que a melhor exploração de conceitos matemáticos do ensino médio por estudantes e docentes de CDI ampliaria as oportunidades de aprendizagem de conceitos próprios de CDI.

Logo, é diante dessas possibilidades e desafios que situamos nosso estudo, desenvolvendo-o em um Departamento de Matemática, de uma instituição pública do Distrito Federal com estudantes de graduação, futuros bacharéis e licenciados, ambos, no nosso entendimento, futuros professores que ensinarão matemática na educação básica e/ou no ensino superior. Nossos objetivos foram analisar a produção escrita de estudantes de graduação em matemática ao resolverem problemas de otimização e compreender as potencialidades dessas análises para a intervenção pedagógica.

3 Materiais e método

Em termos de escolhas metodológicas, alinhamo-nos aos pressupostos da abordagem qualitativa, pois, como destaca Creswell (2007, p. 186), “a pesquisa qualitativa é fundamentalmente interpretativa, na qual o pesquisador faz uma interpretação dos dados”. Adotamos a análise da produção escrita em matemática (BURIASCO *et al.*, 2014) dos estudantes, em aproximação ao ensino-aprendizagem-avaliação de matemática por meio da resolução de problemas (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011) de otimização.

A disciplina de CDI, na instituição sede do estudo, é ofertada no primeiro semestre do curso, com seis créditos (dois créditos de teoria e quatro de prática), totalizando 90 horas e é desenvolvida por dois docentes. O docente responsável pela teoria apresenta o conteúdo por meio de aula expositiva e/ou aula expositiva dialogada em anfiteatros, recebendo, em média, 100 estudantes por turma. O docente responsável pela prática conduz atividades por meio de resolução de problemas, listas de exercícios, geralmente em salas de aula, com uma média de 40 estudantes por turma. A disciplina segue um cronograma unificado para o desenvolvimento das aulas e avaliações, sendo que todos os estudantes realizam a mesma avaliação escrita, geralmente aos sábados. A disciplina reúne cerca de 20 professores, atendendo a 20 turmas, de 26 cursos de graduação. Além disso, há um professor coordenador que organiza a dinâmica de apoio, como monitoria e tutoria. O coordenador também promove a elaboração coletiva de questões que integram as avaliações escritas presenciais, além de coordenar o calendário de realização das avaliações.

O material didático para estudo anterior ou posterior às aulas é socializado em ambiente virtual *moodle* e consta de videoaulas, textos e listas de exercícios. O ambiente também organiza fóruns de discussão e promove o esclarecimento de dúvidas por meio do contato entre os professores e tutores da disciplina. No grupo de docentes que atuam em CDI, coexistem várias práticas pedagógicas em função da própria formação e divergências quanto às ações da docência no ensino superior, compreensões e expectativas do trabalho em CDI. Logo, as ações descritas neste texto referem-se, exclusivamente, à prática docente da primeira autora em reflexão com as outras.

O conteúdo programático do curso é dividido em módulos: Módulo 1: funções reais, limites, continuidade, teorema do valor intermediário, reta tangente, derivada e regras básicas de derivação; Módulo 2: derivadas de composições e inversas de funções, taxas relacionadas, problemas de otimização, teorema do valor médio, esboço de gráficos, regra de L'Hôpital; Módulo 3: integral definida e propriedades, teorema fundamental do cálculo, integral indefinida e

propriedades, técnicas de integração, aplicações da integral ao cálculo de áreas planas, volumes de sólidos e comprimento de curvas.

O problema de otimização mostrado na Figura 1, a seguir, foi apresentado aos estudantes durante uma aula do módulo 2 do curso, que corresponde à metade do semestre. Participaram do estudo 18 estudantes da graduação em matemática, de uma turma de CDI, sendo 9 mulheres e 9 homens, com idades entre 17 e 19 anos. O problema foi digitado em papel A4 branco e estipulado o tempo de 50 minutos para a resolução individual. Os estudantes foram incentivados a preservarem suas produções, mesmo aquelas consideradas por eles incorretas ou incompletas. Ressalta-se que a turma contava com 36 estudantes no começo do semestre, diminuindo, progressivamente, em função de desistências da disciplina muito associadas à realização da primeira avaliação escrita, que geram o trancamento e/ou evasão do curso de matemática. A resolução individual, inicialmente, é motivada pelo interesse em conhecer cada estudante a partir da análise de sua produção escrita, tendo ciência de que momentos em dupla, grupos e/ou coletivos seriam adotados na segunda etapa de resolução de problemas.

Figura 1: Problema apresentado aos estudantes

Prove que entre todos os retângulos com um dado perímetro P , o quadrado é o que possui maior área.

Fonte: Dados coletados na pesquisa.

As pesquisadoras aproximaram-se, inicialmente, das produções escritas dos estudantes por meio da leitura horizontal, seguida de descrição detalhada do que foi encontrado em cada produção. Posteriormente, identificaram estratégias e procedimentos de resolução, a fim de agrupá-las; por fim, realizaram inferências e interpretações, tendo como parâmetro a resolução descrita na Figura 2 e a literatura da área discutida no item anterior. Nesse processo de aproximação, observação e análise das produções dos estudantes, buscamos: 1) observar como eles lidaram com as informações contidas no enunciado do problema e a utilização que fizeram dela; e 2) identificar e compreender os erros e os acertos mais frequentes e a natureza deles, situando-os perante o conteúdo programático do ensino médio e de CDI.

Figura 2: Solução a partir de conceitos de CDI e de ensino médio

Considere o retângulo de base x e altura y . Assim, seu perímetro é dado por $P = 2x + 2y$ e sua área por $A = xy$. Como por hipótese o perímetro é dado, da relação anterior temos que $y = \frac{P}{2} - x$. Logo podemos escrever a função área como:

$$A(x) = x\left(\frac{P}{2} - x\right) = -x^2 + \frac{P}{2}x.$$

Derivando temos $A'(x) = -2x + \frac{P}{2}$ e assim $A'(x) = 0$ implica que $x = \frac{P}{4}$. Como $A'(x) > 0$ para $0 < x < \frac{P}{4}$ e $A'(x) < 0$ para $\frac{P}{4} < x < \frac{P}{2}$ temos que $x = \frac{P}{4}$ é ponto de máximo. Assim, encontrando y temos $y = \frac{P}{2} - x = \frac{P}{4}$. Portanto, $x = y = \frac{P}{4}$ o que mostra que dentre os retângulos de mesmo perímetro, o quadrado é o de área máxima.

a função área é dada por

$$A(x) = x\left(\frac{P}{2} - x\right) = -x^2 + \frac{P}{2}x.$$

Ou seja, é uma função quadrática cujo gráfico é uma parábola com concavidade voltada para baixo, logo o máximo ocorre no vértice. Assim, $x_v = -\frac{b}{2a} = \frac{P}{4}$. Daí, calculando $y = \frac{P}{2} - x = \frac{P}{4}$, concluímos que $x = y = \frac{P}{4}$ de onde segue o resultado.

Fonte: Dados coletados na pesquisa.

A solução apresentada na Figura 2 constituiu-se em parâmetro inicial para a leitura das produções. As pesquisadoras verificaram que muitas das produções eram escritas em linguagem matemática mais intuitiva com/sem apoio de recursos figurais, com termos próprios da linguagem materna dos estudantes e/ou singularidades construídas por eles ao longo da educação básica, em especial, no ensino médio.

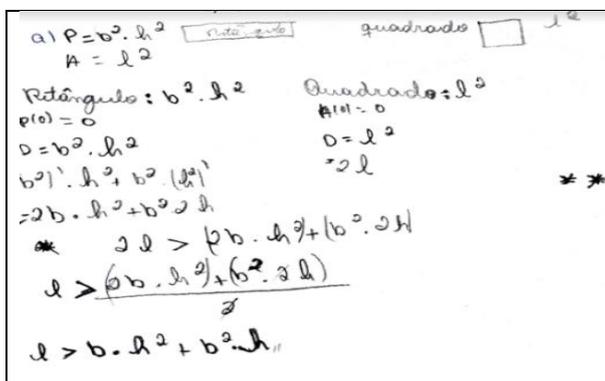
4 Análise e discussão dos resultados

Entendemos que o problema provocou os estudantes a relacionarem os conceitos de área e perímetro de um retângulo e a usarem a linguagem algébrica para compor a função quadrática que modela a área do retângulo. Contudo, existem muitas outras possibilidades, inclusive, a análise do gráfico da função quadrática em questão. Ao analisarmos as produções escritas, observamos que dos 18 participantes, dois não responderam o problema, deixando a folha em branco, seis encontraram a função que o modela e 10 produziram tentativas, todavia não encontraram a função e, conseqüentemente, não avançaram na solução do problema.

Essas dificuldades sugerem baixa compreensão do enunciado do problema; contudo, podem sugerir, também, dúvidas conceituais sobre as propriedades dos quadriláteros, a diferenciação entre retângulo e quadrado; os conceitos de área e perímetro, a construção e a interpretação do gráfico de uma função quadrática, entre muitos outros conceitos, estando alguns deles presentes no currículo da educação básica desde o sexto ano do ensino fundamental. A Figura 3 mostra parte dessas dificuldades, visto que o estudante não relaciona área e perímetro,

realiza tentativas de comparar as áreas do retângulo e do quadrado, mas não utiliza notação apropriada que relacione as informações fornecidas no enunciado do problema.

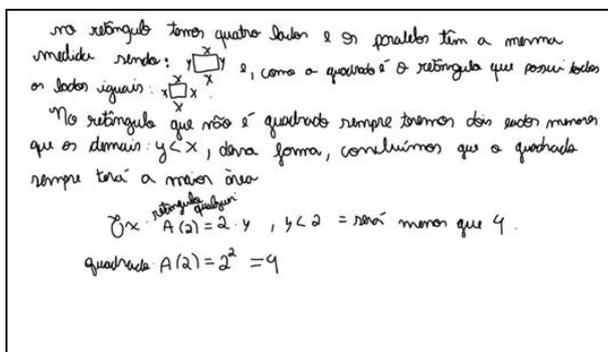
Figura 3: Produção escrita apresentada por um(a) estudante



Fonte: Dados coletados na pesquisa.

Na Figura 4, observamos a produção de um estudante que revela conhecer e diferenciar os conceitos de área e perímetro de figuras planas, porém se equivoca ao relacionar esses conceitos por meio da linguagem algébrica.

Figura 4: Produção escrita de participante



Fonte: Dados coletados na pesquisa.

Outro ponto considerado na análise foi comparar aspectos de fragilidade em conceitos do ensino médio e domínio em conceitos de CDI. Na Figura 5, observamos que a função encontrada pelo estudante não modela o problema, mas ele deriva a função corretamente e tenta encontrar o ponto crítico, mostrando certo domínio sobre os conteúdos de CDI.

Figura 5: Produção escrita apresentada por um(a) estudante

$p = \sqrt{x^2 + y^2}$
 $x^2 = y^2 - p^2$
 $x = \sqrt{y^2 - p^2}$
 $A = y \cdot \sqrt{y^2 - p^2}$
 $A'(x) = y \cdot \frac{1}{\sqrt{y^2 - p^2}}$
 $A'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{y^2 - p^2}} \cdot 2y = 0$
 $A'(x) = \frac{\sqrt{y^2 - p^2} + 2y}{2\sqrt{y^2 - p^2}} = 0$
 $A'(x) = \frac{\sqrt{y^2 - p^2} + 2y}{2\sqrt{y^2 - p^2}} = 0$
 $A'(x) = \frac{y^2 - p^2 + 2y}{\sqrt{y^2 - p^2}}$
 $A'(x) = \frac{y^2 - p^2 + 2y}{\sqrt{y^2 - p^2}}$

Fonte: Dados coletados na pesquisa.

De modo geral, observamos níveis distintos de compreensão do problema, que revelam tanto o uso correto quanto o incorreto de conceitos geométricos, estudados nos ensinamentos fundamental e médio. Identificamos muitos erros de escrita, de procedimentos algébricos e de conceitos próprios de CDI, como a noção de derivada e de máximos e mínimos. Dos seis estudantes que encontraram a função, três acertaram totalmente a questão e três apresentaram solução parcialmente correta. Nas soluções parcialmente corretas, os estudantes apresentaram fragilidade no uso dos conceitos de CDI, como, por exemplo, não conseguiram derivar a função e encontrar o ponto crítico para mostrar que esse era um ponto de máximo. Na Figura 6, temos a notação de um estudante que encontrou a derivada da função área, mas não conseguiu encontrar o ponto máximo da função.

Figura 6: Produção escrita apresentada por um(a) estudante

C) (a) $A = b \cdot h$
 RETANGULO
 $A = b \cdot h$
 $b \cdot \left(\frac{2p - 2b}{2}\right)$
 $A = 2pb - 2b^2$
 $A' = 2p - 4b$

$2p = 2b + 2h$
 $2h = 2p - 2b$
 $h = \frac{2p - 2b}{2}$
 $A(b) = p - 2b$

Fonte: Dados coletados na pesquisa.

A Figura 7 exemplifica uma notação correta, em que o estudante faz uso de conceitos de CDI necessários para a solução do problema. Do mesmo modo, nota-se, nesta produção, linguagem matemática muito superior às apresentadas anteriormente. Tal fato indica o quanto os estudantes estão em momentos diferenciados de conceituação e escrita matemática, impondo ao docente o desafio de intervir pedagogicamente diante de necessidades tão específicas.

Figura 7 - Produção escrita apresentada por um(a) estudante

$Perimetro = 2x + 2y$
 $area = x \cdot y$
 $P = 2x + 2y$
 $2y = P - 2x$
 $y = \frac{P - 2x}{2}$
 $A = x \cdot y$
 $= x \cdot \left(\frac{P - 2x}{2}\right)$
 $= xP - 2x^2$
 $= -2x^2 + xP$
 $A'(x) = -2x + \frac{P}{2}$
 $-2x + \frac{P}{2} = 0$
 $2x = \frac{P}{2}$
 $x = \frac{P}{4}$
 $y = \frac{P - 2x}{2} = \frac{P - 2 \cdot \frac{P}{4}}{2} = \frac{P - \frac{P}{2}}{2} = \frac{\frac{P}{2}}{2} = \frac{P}{4}$
 $A\left(\frac{P}{4}\right) = -2\left(\frac{P}{4}\right)^2 + \frac{P}{2} \cdot \frac{P}{4} = -2 \cdot \frac{P^2}{16} + \frac{P^2}{8} = -\frac{P^2}{8} + \frac{P^2}{8} = 0$
 $A\left(\frac{P}{4}\right) = -\left(\frac{P}{4}\right)^2 + \frac{P}{4} \cdot \frac{P}{4} = -\frac{P^2}{16} + \frac{P^2}{16} = 0$
 $\frac{P - 2x}{2} > 0 \Rightarrow x < \frac{P}{4}$
 $\frac{P - 2x}{2} < 0 \Rightarrow x > \frac{P}{4}$
 Para $A(x)$ ser máximo
 $x = \frac{P}{4} \Rightarrow y = \frac{P - 2x}{2} = \frac{P - 2 \cdot \frac{P}{4}}{2} = \frac{P - \frac{P}{2}}{2} = \frac{\frac{P}{2}}{2} = \frac{P}{4}$
 $y = \frac{P}{4} \Rightarrow y = \frac{P - 2x}{2} = \frac{P - 2 \cdot \frac{P}{4}}{2} = \frac{P - \frac{P}{2}}{2} = \frac{\frac{P}{2}}{2} = \frac{P}{4}$
 Logo, para $A(x)$ ser máximo
 o retângulo tem que ser um quadrado.

Fonte: Dados coletados na pesquisa.

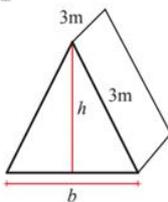
Com base nessas compreensões, na aula seguinte, o problema foi retomado por meio de discussões coletivas entre os estudantes e entre esses e a professora. Para facilitar essa interação, a lousa foi usada como meio de realizar a socialização e a discussão das soluções apresentadas. Nesse momento, foi possível analisar que, ao escrevermos a função que queremos maximizar, observamos que ela é uma função quadrática. Portanto, temos mais de uma possibilidade para resolver o problema proposto: 1) utilizando tópicos curriculares do ensino médio, como as propriedades das funções quadráticas; assim, temos que o vértice de uma função quadrática é um ponto de máximo ou mínimo, dependendo da concavidade da parábola; ou 2) a partir de conceitos e procedimentos em CDI, isto é, derivando a função e encontrando seu ponto de máximo. Em seguida, ao analisar esse ponto, observamos que o valor encontrado corresponde ao das dimensões de um quadrado.

Desse modo, foi observado que o problema apresenta fortes vínculos com tópicos curriculares estudados desde o ensino fundamental e aprofundados no ensino médio, além de vincular geometria e álgebra em situação passível de aplicação em diferentes cenários da vida cotidiana, como no comércio, na indústria, entre outros. Os estudantes verbalizaram a necessidade de discutir conceitos como áreas e perímetros de figuras planas, como também propriedades das funções quadráticas. Ao mesmo tempo, expuseram muitas inquietações, frustrações e medos em relação à disciplina de CDI, decorrentes das dificuldades que carregam em matemática, da nova linguagem que CDI lhes apresenta e das suas exigências em termos de escrita matemática. Todavia, é importante ressaltar que os estudantes mostraram compreensões diferentes sobre todos esses aspectos. Enquanto alguns verbalizaram essas compreensões, outros foram apenas espectadores e/ou outros não revelaram interesse nem desinteresse, sinalizando que talvez estejam muito aquém dessa discussão.

Nas aulas seguintes, outros problemas de otimização foram propostos e as ações discentes e docentes foram desenvolvidas de modo a ampliar a observação e a análise da produção escrita, bem como melhorar as devolutivas fornecidas aos estudantes pela docente. Um exemplo é o problema, apresentado a seguir, em que o teorema de Pitágoras e outros conceitos geométricos, que também são abordados na educação básica, constituíram-se em caminhos investigativos para a compreensão de conceitos em CDI.

Figura 8: Exemplo de outros problemas abordados na disciplina

Suponha que, na construção de uma barraca com vista frontal na forma de um triângulo isósceles de altura h , as laterais devem ser feitas a partir de uma lona com 6 m de comprimento e 3 m de largura, conforme ilustra a figura.



(a) Determine o comprimento b da base do triângulo em função da altura h .

(b) Use o item anterior para expressar o volume $V(h)$ da barraca em função de h .

(c) Determine h de forma que o volume $V(h)$ seja máximo, justificando a sua resposta.

Fonte: Dados coletados na pesquisa.

Logo, a análise da produção escrita embasou inúmeros outros momentos, desenvolvidos com os estudantes, e serviu de orientação para as mediações e as devolutivas referentes aos demais tópicos curriculares de CDI, integrando-se, progressivamente, ao trabalho pedagógico da docente.

5 Considerações finais

A análise da produção escrita dos estudantes mostrou-se fundamental para a compreensão dos conceitos da educação básica que eles dominam e aqueles para os quais apresentam dificuldades. Além disso, permitiu avançar no entendimento sobre como os estudantes relacionam ou não tais conceitos ao lidarem com conceitos, procedimentos e linguagem próprios de CDI. Quanto às dificuldades conceituais, evidencia-se que elas dizem respeito não somente aos tópicos curriculares do ensino médio, mas também do ensino fundamental, englobando geometria e álgebra, conceitos e procedimentos de cálculo. Ademais, os estudantes mostraram dificuldades na interpretação dos enunciados, em encontrar a função que modela o problema, no entendimento e nas aplicações de propriedades matemáticas. Observamos que a maioria pouco usa e relaciona conceitos e procedimentos da educação básica, em especial, do ensino médio no aprendizado de CDI, o que limita suas oportunidades de aprendizagem.

Igualmente, evidenciou-se que houve, a partir da análise da produção escrita, a ampliação e a melhoria das devolutivas (*feedbacks*) fornecidas aos estudantes ao longo de todo o semestre. Isso fez com que entendêssemos que é preciso realizar devolutivas, constantemente, aos estudantes e, de preferência, alternando entre situações de devolutivas individuais e coletivas a fim de melhor auxiliá-los em suas aprendizagens e ampliar a compreensão docente acerca de sua prática pedagógica. Do mesmo modo, ampliou-se o entendimento da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática por meio da resolução de problemas (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011) e sua pertinência para a prática pedagógica em turmas de CDI.

Por fim, avaliamos que este estudo confirma o quanto os professores que ensinam matemática no ensino superior avançam na construção de metodologias para o ensino e a aprendizagem de CDI ao optarem pelo diálogo diante do desafio da docência nesse nível de ensino, em especial, em turmas de CDI. Vislumbramos que estudos dessa natureza sejam ampliados na instituição sede, de modo a reverberar em novos estudos, ampliando o número de estudantes atendidos, a quantidade de tópicos curriculares de CDI analisados e a quantidade de propostas teórico-metodológicas em Educação Matemática no Ensino Superior investigadas.

Referências

ALLEVATO, Norma S. G; ONUCHIC, Lourdes de L. R. As conexões trabalhadas através da resolução de problemas na formação inicial de professores de matemática. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática – RenCiMa**, São Paulo, v. 10, n. 2, p. 1-14, 2019.

ALVARENGA, Karly B.; DÖRR, Raquel C.; VIEIRA, Vanda D. O ensino e a aprendizagem de cálculo diferencial e integral: características e interseções no centro-oeste brasileiro. **REBES - Revista Brasileira de Ensino Superior**, Passo Fundo, v. 2, n. 4, p. 46-57, 2016.

ANDRADE, Cecília P. de; ONUCHIC, Lourdes de L. R. Perspectivas para a Resolução de Problemas no GTERP. *In*: ONUCHIC, Lourdes de L. R.; LEAL Jr., Luiz C.; PIRONEL, Márcio (Orgs.). **Perspectivas para resolução de problemas**. São Paulo: Livraria da Física, 2017. p. 443-466.

ANDRADE, Fabiana; ESQUINCALHA, Agnaldo; OLIVEIRA, Ana Teresa. Un estado del conocimiento de las investigaciones sobre pré-cálculo en Brasil. **Unión**, n. 58, p. 48-63, 2020.

AZEVEDO, Eliane B. de; FIGUEIREDO, Elisandra B.; PALHARES, Pedro M. B. Adaptação no roteiro da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática do GTERP para ensinar Cálculo Diferencial e Integral através da Resolução de Problemas. **Revista de Educação Matemática**, São Paulo, v. 17, p. 1-22, 2020.

BARUFI, Maria Cristina B. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral**. 1999. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de São Paulo, 1999.

BIANCHINI, Bárbara L.; LIMA, Gabriel L. de; GOMES, Eloísa. Possibilidades de novas pesquisas em cálculo, análise e álgebra linear a partir de um mapeamento das investigações do GT04. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática – RenCiMa**, São Paulo, v. 10, n. 2, p. 112-124, 2019.

BONWELL, Charles C.; EISON, James A. **Active learning: creating excitement in the classroom**. Washington: Eric Digests, 1991.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/#/site/inicio>. Acesso em: 12 maio 2019.

BURIASCO, Regina L. C. de; FERREIRA, Pâmela E. A.; PEDROCHI JUNIOR, O. Aspectos da avaliação da aprendizagem escolar como prática de investigação. *In*: BURIASCO, Regina L. C. de (Org.). **GEPEMA: espaço e contexto de aprendizagem**. Curitiba: CRV, 2014. p. 13-32.

COURA, Flávia C. F.; PASSOS, Cármen L. B. Estado do conhecimento sobre o formador de professores de Matemática no Brasil. **Zetetikè**, Campinas, v. 25, p. 7-26, 2017.

CRESWELL, John W. **Projeto de pesquisa: método qualitativo, quantitativo e misto**. 2. ed. Porto Alegre: Artmed, 2007.

DÖRR, Raquel C. **Análises de aprendizagens em cálculo diferencial e integral: um estudo de caso de desenvolvimento de conceitos e procedimentos algébricos em uma universidade pública brasileira**. 2017. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de Brasília, Brasília, 2017.

FERRUZZI, Elaine Cristina; DE ALMEIDA, Lourdes Maria Werle. Modelagem Matemática no ensino de Matemática para engenharia. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, [s. l.], v. 6, n. 1, 2013.

FROTA, Maria Clara R.; BIANCHINI, Bárbara L.; CARVALHO, Ana Márcia T. (Orgs.). **Marcas da Educação Matemática no Ensino Superior**. Campinas: SBEM; Papirus, 2013.

GUIDORIZZI, Hamilton L. **Um curso de Cálculo**. 5. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2001. v. 1.

HETHCOTE, Herbert. W. The mathematics of infectious diseases. **SIAM Review**, [s. l.], v. 42, n. 4, p. 599-653, 2000.

IGLIORI, Sônia B. C. Considerações sobre o ensino do cálculo e um estudo sobre os números reais. In: FROTA, Maria Clara R; NASSER, Lilian (Orgs.). **Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates**. Recife: SBEM, 2009. p. 11-26.

LIMA, Gabriel L. O ensino do cálculo no Brasil: breve retrospectiva e perspectivas atuais. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11., 2013, Curitiba. **Anais [...]**. Curitiba: SBEM, 2013. p. 1-15.

LIRA, Antônio da Fonseca de. **O processo da construção do conceito matemático de limite pelo aprendiz com a utilização de objetos digitais**. 2008. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2008.

LUZ, Valéria M.; SANTOS, Ângela R. Associando Pesquisa e Intervenção em uma Disciplina de Introdução ao Cálculo: um Estudo de Caso na UFRJ. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 17, n. 1, p. 74-93, 2015.

MALTA, Iaci. Linguagem, Leitura e Matemática. In: CURY, Helena Noronha. **Disciplinas Matemáticas em cursos superiores: reflexões, relatos, propostas**. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2004. p. 41- 62.

MENDES, Marcele T.; BURIASCO, Regina L. C. de. O Dinamismo de uma Prova Escrita em Fases: um estudo com alunos de Cálculo Diferencial e Integral. **Bolema**, Rio Claro, v. 32, n. 61, p. 653-672, 2018. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n61a17>. Acesso em: 18 dez. 2023.

MONAGHAN, John; ELY, Robert; PINTO, Márcia M. F.; THOMAS, Mike. **The learning and teaching of Calculus: ideas, insights and activities**. London: Taylor & Francis, 2023.

MORELATTI, Maria Raquel M. **Criando um ambiente construcionista de aprendizagem em Cálculo Diferencial e Integral**. 2001. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2001.

NASSER, Lilian. Uma pesquisa sobre o desempenho de alunos de Cálculo no traçado de gráficos. In: FROTA, Maria Clara R.; NASSER, Lilian (Orgs.). **Educação Matemática no Ensino Superior: Pesquisas e Debates**. Recife: SBEM, 2009. p. 43-58.

NASSER, Lilian. Transição do Ensino Médio para o Superior: como minimizar as dificuldades em Cálculo In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5. Petrópolis, 2012. **Anais [...]**. Petrópolis, 2012.

OLIVEIRA, Maria Cristina A.; RAAD, Marcos R. A existência de uma cultura escolar de reprovação no ensino de Cálculo. **Boletim Gepem**, [s. l.], n. 61, p. 125-137, 2012.

ONUICHIC, Lourdes de L. R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. *In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani (Org.). Pesquisa em Educação Matemática*. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p.199-220.

ONUICHIC, Lourdes de L. R.; ALLEVATO, Norma S. G. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. *Boletim de Educação Matemática*, Rio Claro, v. 25, n. 41, p. 73-98, 2011.

ONUICHIC, Lourdes de L. R.; ALLEVATO, Norma S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. *In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; BORBA, Marcelo C. (Orgs.). Educação Matemática: pesquisa em movimento*. São Paulo: Cortez, 2004. p. 213-231.

PAVANELO, Elisângela; LIMA, Renan. Sala de Aula Invertida: a análise de uma experiência na disciplina de Cálculo I. *Bolema*, Rio Claro, v. 31, n. 58, p. 739-759, 2017.

RACHELLI, Janice; DENARDI, Vânia B.; BULEGON, Ana M. Uma revisão de literatura sobre estudos relativos ao uso de tecnologias computacionais no ensino de Cálculo Diferencial e Integral. *Disciplinarum Scientia*. Série: Ciências Humanas, Santa Maria, v. 17, n. 2, p. 303-318, 2016.

RASMUSSEN, Chris; MARRONGELLE, Karen; BORBA, Marcelo C. Research on calculus: what do we know and where do we need to go? *ZDM Mathematics Education*, [s. l.], v. 46, p. 507-515, 2014.

REIS, Frederico S. Rigor e intuição no ensino de Cálculo e Análise. *In: NASSER, Lilian; FROTA, Maria Clara Rezende (Orgs.). Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates*. Recife: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2009. v. 1. p. 81-97.

REIS, Frederico S. **A tensão entre rigor e intuição no ensino de Cálculo e Análise: a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos**. 2001. Tese (Doutorado em Educação) –Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2001.

REZENDE, Wanderley Moura. **O ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológicas**. 2003. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

RODRIGUES, Luciana M. D. de Ávila; DÖRR, Raquel C.; MARÇAL, Thais R. D. Um levantamento sobre a oferta da disciplina Pré-Cálculo em cursos de Licenciatura em Matemática de instituições públicas do centro-oeste brasileiro. *Paradigma*, Campo Grande, v. 43, n. 1, p. 245-272, 2022. Disponível em: <http://revistaparadigma.online/ojs/index.php/paradigma/article/view/1171>. Acesso em: 24 dez. 2023.

SOUZA, Jonas F. de. **Cálculo Diferencial: uma proposta de abordagem no Ensino Médio**. 2019. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede - PROFMAT) - Universidade Federal do Sergipe, 2019.

STEWART James. **Cálculo**. 6. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2009. v. 1.

SYPNIEVSKI, Marianna Del Secchi; SCHUBRING, Gert. O processo histórico de disciplinarização do cálculo infinitesimal no Brasil. **Revemop**, [s. l.], v. 5, p. e202308-e202308, 2023. DOI: <https://doi.org/10.33532/revemop.e202308>. Acesso em: 24 dez. 2023.

THOMAS, George B. **Cálculo**. São Paulo: Addison Wesley, 2009. v. 1.

ZUIN, Elenice S. L. Cálculo, uma abordagem histórica. *In*: LACHINI, J.; LAUDARES J. B. (Org.). **Educação Matemática: a prática educativa sob o olhar de professores de Cálculo**. Belo Horizonte: Fumarc, 2001. p. 13-38.