Seção Artigos
2024, Volume 6, e2024008
Páginas 1–17
10.33532/revemop.e2024008

revemop
ISSN 2596-0245

Conhecimento de acontecimentos independentes por futuros professores dos primeiros anos

Knowledge of independent events by prospective primary school teachers

Conocimiento de sucesos independientes por futuros maestros de educación primaria

José António Fernandes[1]

Resumo

Neste estudo, fundamentalmente de natureza quantitativa, investiga-se o conhecimento de futuros professores dos primeiros anos acerca de acontecimentos independentes a partir dos três objetivos seguintes: 1) classificar dois acontecimentos dados em independentes ou não independentes; 2) enunciar a definição de acontecimentos independentes; e 3) formular exemplos de acontecimentos independentes. Participaram no estudo 37 estudantes que se encontravam a frequentar o 2.º ano do curso de Licenciatura em Educação Básica numa universidade do norte de Portugal, que resolveram uma tarefa sobre acontecimentos independentes. Em termos de resultados, salienta-se que os estudantes revelaram dificuldades em todos os objetivos, mais acentuadas na formulação de exemplos de acontecimentos independentes e menos na definição de acontecimentos independentes. Depreende-se, assim, que bastantes estudantes, apesar de conhecerem a definição de acontecimentos independentes, não foram capazes de aplicar esse conhecimento para distinguirem acontecimentos independentes de não independentes e para formularem exemplos de acontecimentos independentes.
Palavras-chave: Probabilidades. Acontecimentos independentes. Futuros professores. Primeiros anos escolares.

Abstract

In this quantitative study, prospective primary school teachers' knowledge of independent events is investigated based on three objectives: 1) classify two given events as independent or non-independent; 2) state the definition of independent events; and 3) formulate examples of independent events. The study included 37 students attending the 2nd year of the teaching degree in basic education at a university in the north of Portugal, who solved a task about independent events. In terms of results, it should be noted that the students revealed difficulties in all objectives, more pronounced in the formulation of examples of independent events and less in the definition of independent events. Therefore, it can be inferred that many students, despite knowing the definition of independent events, could not apply this knowledge to distinguish independent events from non-independent events and formulate examples of independent events.
Keywords: Probability. Independent events. Prospective teachers. Primary school.

Resumen

En este estudio, fundamentalmente de carácter cuantitativo, se investiga el conocimiento de los futuros maestros de educación primaria sobre sucesos independientes a partir de tres objetivos: 1) clasificar dos sucesos dados como independientes o no independientes; 2) establecer la definición de sucesos independientes; y 3) formular ejemplos de sucesos independientes. El estudio incluyó a 37 estudiantes que cursaban el 2 año de la Licenciatura en Educación Básica en una universidad del norte de Portugal, que resolvieron una tarea sobre sucesos independientes. En cuanto a los resultados, se destaca que los estudiantes revelaron dificultades en todos los objetivos, más pronunciadas en la formulación de ejemplos de sucesos independientes y menos en la definición de sucesos independientes. Por lo tanto, se deduce que muchos estudiantes, a pesar de conocer la definición de sucesos independientes, no fueron capaces de aplicar este conocimiento para distinguir sucesos independientes de los no independientes y formular ejemplos de sucesos independientes.
Palabras clave: Probabilidad. Sucesos independientes. Futuros maestros. Educación primaria.

1 Doutor em Educação pela Universidade do Minho (UMinho). Professor associado aposentado da Universidade do Minho (UMinho), Braga, Portugal. E-mail: jfernandes@ie.uminho.pt.

1. Introdução

De uma visão do mundo profundamente determinista, prevalente até ao século XVII, vimos, a partir daí, assistindo a uma influência cada maior da incerteza nas nossas vidas. Atualmente, muitas das decisões com que nos deparamos diariamente envolvem incerteza, seja no âmbito da política, das finanças ou da saúde.

Sobretudo a partir de meados do século XX, o reconhecimento da importância da incerteza levou a que o seu estudo fosse introduzido nas escolas, designadamente ao nível do ensino secundário (do 10.º ao 12.º ano, 16-18 anos), enquanto no início dos anos de 1990 foi também introduzida no ensino básico (do 1.º ao 9.º ano, 6-15 anos). Recentemente, vários investigadores vêm preconizando o ensino de Probabilidades e Estatística nos primeiros anos escolares (Batanero, 2013; Borovcnik; Peard, 1996), e até mesmo na educação infantil (Alsina, 2021; Batanero *et al*., 2021; Nikiforidou; Pange, 2010).

Atualmente, em Portugal, os temas de Probabilidades e Estatística fazem parte dos programas de matemática do ensino básico (Ministério da Educação, 2021) e do ensino secundário (Ministério da Educação, 2023). No Brasil, com a publicação da “Base Nacional Comum Curricular” (Brasil, 2018), assiste-se, igualmente, ao aprofundamento do estudo dos temas de Probabilidades e Estatística, quer no ensino fundamental quer no ensino médio, salientando-se a exploração de investigações estatísticas e o incentivo ao uso de tecnologias digitais, como seja a folha de cálculo (Fernandes; Diniz, 2022).

Ora, o aprofundamento do ensino de Probabilidades e Estatística nas escolas requer que os professores em serviço e os futuros professores adquiram um conhecimento que lhes permita implementar um ensino adequado, pois estudos recentes mostram que os futuros professores portugueses dos primeiros anos escolares sentem dificuldades em Probabilidades (Fernandes, 2022; Fernandes; Barros, 2021; Fernandes; Oliveira Júnior, 2023;) e em Estatística (Fernandes, 2021; Fernandes; Freitas, 2019).

Face às considerações anteriores, no presente estudo, focado no tema de Probabilidades, estuda-se o desempenho de futuros professores dos primeiros anos em acontecimentos independentes, a partir dos objetivos: 1) classificar dois acontecimentos dados em independentes ou não independentes; 2) enunciar a definição de acontecimentos independentes; e 3) formular exemplos de acontecimentos independentes.

Após a alusão à importância do estudo e aos seus propósitos, aspectos tratados antes, de seguida trata-se o enquadramento teórico, focado nos acontecimentos independentes, continua-se com a descrição da metodologia usada no estudo, a apresentação de resultados e, por último, sintetizam-se as principais conclusões do estudo e extraem-se algumas implicações para o ensino de Probabilidades.

2. Enquadramento teórico

A realização de uma experiência aleatória produz qualquer um dos seus resultados possíveis e estes, em conjunto, definem o chamado espaço ou universo de resultados. Portanto, podemos definir o conjunto, que é o espaço de resultados, e qualquer um dos seus subconjuntos. Qualquer destes subconjuntos define um acontecimento associado à experiência aleatória.

Há diferentes tipos de acontecimentos que se definem com base em diferentes atributos, designadamente: acontecimentos certos, possíveis (mas não certos), impossíveis, incompatíveis (ou disjuntos ou mutuamente exclusivos), complementares e independentes. Os acontecimentos certos, possíveis (mas não certos) e impossíveis definem-se através de subconjuntos do espaço de resultados, isto é, o próprio espaço de resultados (certo), um subconjunto diferente e não vazio do espaço de resultados (possível mas não certo) e o subconjunto vazio (impossível). Trata-se, portanto, de acontecimentos simples, que os alunos, em Portugal, começam a estudar logo no 3.º ano de escolaridade (Ministério da Educação, 2021).

A definição de acontecimentos incompatíveis, complementares e independentes envolve dois acontecimentos que cumprem certos atributos, nomeadamente, a sua interseção é o acontecimento impossível (incompatíveis), a sua interseção é o acontecimento impossível e a sua reunião o acontecimento certo (complementares) e a probabilidade da realização de um dos acontecimentos não depende da realização do outro (independentes). Logo, depreende-se que estes tipos de acontecimentos são mais complexos, sendo estudados em anos escolares mais avançados: os acontecimentos incompatíveis e complementares são introduzidos no 9.º ano (Ministério da Educação, 2021) e os acontecimentos independentes são introduzidos no 12.º ano (Ministério da Educação, 2023).

De entre os acontecimentos mais complexos, Martins (2017) chama a atenção para a frequente confusão entre acontecimentos incompatíveis e independentes, esclarecendo que dois acontecimentos não podem ser incompatíveis e independentes simultaneamente, a não ser que um deles seja o acontecimento impossível. Para vencer essa confusão, a autora sugere ter-se em consideração que estes conceitos assumem relações distintas: a incompatibilidade de acontecimentos é uma propriedade dos acontecimentos, não sendo necessário definir qualquer probabilidade, e a independência de acontecimentos é dependente do modelo de probabilidade estabelecido no espaço de resultados onde estão definidos os acontecimentos.

No estudo da independência de acontecimentos, que é o foco do presente estudo, o conceito de probabilidade condicionada desempenha um papel importante, podendo ser usado para verificar se dois acontecimentos são ou não independentes. Neste caso, diz-se que dois acontecimentos A e B são independentes se a probabilidade da realização de qualquer deles não é afetada pela realização do outro, ou seja, quando se verifica uma das duas relações: $P(A \mid B) = P(A)$, com $P(B) \neq 0$, ou $P(B \mid A) = P(B)$, com $P(A) \neq 0$, constituindo, portanto, uma alternativa ao uso da relação $P(A \mid B)=P(A) \times P(B)$ na verificação da independência dos acontecimentos. Huff (1971, citado por Hawkins; Jolliffe; Glickman, 1992) propôs mesmo a definição de acontecimentos independentes a partir apenas de probabilidades condicionadas, referindo que dois acontecimentos A e B são independentes, se $P(A \mid B) = P(A \mid \overline{B})$, onde $\overline{B}$ é o acontecimento complementar de B.

Num estudo de Fernandes *et al.* (2014) questionaram-se futuros professores dos primeiros anos sobre probabilidade condicionada em quatro itens, envolvendo a reposição e não reposição na extração de duas bolas de um saco e a escolha, ao acaso, de duas pessoas de um grupo constituído por homens e mulheres. Globalmente, em média, em cada item obteve-se 56 % de respostas corretas, o que se considera um desempenho razoável. Em geral, os estudantes tiveram um melhor desempenho nos itens de extração de bolas do saco do que na escolha de pessoas do grupo, sendo que a P(1ª pessoa ser homem| 2ª é mulher) se revelou muito difícil, o que se explica pela *inversão do eixo temporal*, pois acredita-se, erradamente, que um acontecimento realizado depois não pode afetar um acontecimento realizado antes (Contreras *et al*., 2013).

No caso da independência, Fischbein, Nello e Marino (1991), num estudo em que participaram alunos do 4.º ao 8.º ano de escolaridade, sem instrução de Probabilidades, questionaram os alunos sobre se é mais provável obter três faces cara em três lançamentos consecutivos de uma moeda ou no lançamento simultâneo de três moedas. Do estudo, concluiu-se que cerca de um terço dos alunos responderam que a probabilidade não era a mesma, o que decorreu da crença de que é mais provável obter três faces cara em três lançamentos consecutivos de uma moeda do que no lançamento simultâneo de três moedas. A partir de entrevistas realizadas, os autores concluíram que os alunos acreditavam que os resultados obtidos no lançamento da moeda podiam ser controlados pelo indivíduo, crença esta que é incompatível com a independência dos acontecimentos uma vez que a probabilidade de obter face cara em cada lançamento mantém-se constante e igual a 1/2.

Já Correia e Fernandes (2014), após se ter obtido a sequência CCCCC, em cinco lançamentos consecutivos de uma moeda, indagaram alunos do 9.º ano sobre se é mais provável obter no sexto lançamento da moeda a face C (cara) ou a face E (escudo) ou se é igualmente provável obter qualquer das faces da moeda. Na tarefa, 89,7% dos alunos afirmaram que é igualmente provável obter qualquer face da moeda, salientando-se, em termos de justificação, a igual probabilidade de obter cada face da moeda, a possibilidade de obter qualquer face da moeda, a moeda ser equilibrada e as provas serem independentes. Em relação às respostas erradas, destacou-se a resposta de que é mais provável obter a face cara, tendo a maior parte destes alunos referido que seria mais provável porque saiu sempre cara. Assim, estes alunos aderiram ao chamado *efeito recente positivo* (Fischbein, 1975), que afirma que, após a obtenção de um resultado várias vezes consecutivas, seria mais provável obter o mesmo resultado no próximo lançamento. Para os autores, os resultados obtidos mostram que os alunos possuem um substrato intuitivo consonante com a possibilidade de desenvolver uma abordagem mais formal na escola.

Num estudo mais recente, Fernandes e Barros (2021) pediram a futuros professores dos primeiros anos escolares para definirem pares de exemplos de acontecimentos disjuntos, complementares e independentes na experiência aleatória de lançamento de um dado duas vezes consecutivas. No caso dos acontecimentos independentes, que é o tipo de acontecimentos que interessa ao presente estudo, verificou-se que os estudantes sentiram muitas dificuldades em estabelecer o par de exemplos independentes, tendo apenas 23% deles respondido corretamente.

3. Método

O estudo tem por finalidade investigar o conhecimento de estudantes, futuros professores dos primeiros anos, sobre acontecimentos independentes, a partir dos três seguintes objetivos: 1) classificar dois acontecimentos dados em independentes ou não independentes; 2) enunciar a definição de acontecimentos independentes; e 3) formular exemplos de acontecimentos independentes. Assim, o estudo do conceito de acontecimentos independentes a partir da definição do conceito, da classificação de exemplos dados e da formulação de exemplos permite estudar em maior abrangência a compreensão do conceito pelos estudantes (Skemp, 1993).

Para estudar os objetivos do estudo conduziu-se uma investigação, fundamentalmente, de natureza quantitativa e de natureza descritiva. Neste tipo de investigação analisa-se uma realidade preexistente, neste caso o conhecimento sobre várias vertentes dos acontecimentos independentes, sem exercer qualquer tipo de controlo e recorrendo a métodos rigorosos (McMillan; Schumacher, 2014).

Participaram no estudo 37 estudantes que se encontravam a frequentar o 2.º ano do curso de Licenciatura em Educação Básica, de uma universidade do norte de Portugal. Após a conclusão da Licenciatura, estes estudantes podem frequentar e concluir um curso de mestrado em ensino, o que confere habilitação profissional em educação infantil ou para o ensino do 1.º ao 6.º ano de escolaridade. Quando iniciaram os seus estudos na universidade, os estudantes tinham uma formação matemática variada obtida no ensino secundário em cursos profissionais, em cursos humanísticos ou em cursos científico-tecnológicos.

Os dados usados no estudo são as resoluções dos estudantes ao responderem a um questionário com várias tarefas sobre diferentes tipos de acontecimentos, das quais tratamos aqui aquela que diz respeito a acontecimentos independentes, e que se apresenta na Figura 1. No momento de aplicação do questionário, os estudantes já tinham frequentado a unidade curricular de Probabilidades e Estatística do ensino superior, tendo-se, na aplicação do questionário, assegurado o anonimato e a salvaguarda da confidencialidade dos estudantes em qualquer publicação com dados do estudo.

Figura 1: Tarefa proposta aos estudantes

1. Em cada alínea seguinte, verificar se os acontecimentos **A** e **B** são ou não **independentes**, sendo:
a. A: “obter a face cara no 1.º lançamento” e **B**: “obter a face escudo no 2.º lançamento”, na experiência aleatória de lançamento de uma moeda ao ar duas vezes.
b. A: “obter duas faces pares” e **B**: “obter duas faces maiores do que 5”, na experiência aleatória de lançamento um dado numerado de 1 a 6 duas vezes.
2. Relativamente a uma experiência aleatória,
a. Defina quando é que dois acontecimentos **A** e **B** são independentes.
b. Defina dois acontecimentos **A** e **B**, diferentes dos que foram definidos na questão 1, que sejam **independentes**.

Fonte: Elaboração do autor (2022)

Pela Figura 1, constata-se que a tarefa é constituída por duas questões, a questão 1 e a questão 2, cada uma com dois itens. Nos dois itens da questão 1 são dados dois acontecimentos e questionam-se os estudantes sobre se eles são ou não independentes, sendo que os acontecimentos, em 1a, são relativos à experiência de lançamento de uma moeda ao ar duas vezes e, em 1b, são relativos à experiência de lançamento de um dado duas vezes. Já na questão 2 os estudantes devem, em 2a, enunciar a definição de acontecimentos independentes e, em 2b, definir dois acontecimentos independentes distintos daqueles que foram dados na questão 1.

Por fim, no tratamento e análise de dados estudaram-se as respostas dadas pelos estudantes relativamente à classificação de acontecimentos em independentes e não independentes, às explicações dessa classificação e à definição e exemplificação de acontecimentos independentes. Em todos os casos, determinaram-se frequências dos tipos de acontecimentos (independentes e não independentes) e das explicações das respostas (corretas, parcialmente corretas e incorretas), tendo-se recorrido a tabelas para resumir essa informação. Adicionalmente, para aprofundar a compreensão do processo de análise, apresentam-se alguns exemplos de respostas dos estudantes, identificados pela letra E (abreviatura de estudante) seguida do número que lhe foi atribuído (de 1 a 37).

4. Apresentação de resultados

Nesta parte apresentam-se os resultados obtidos no estudo, organizados segundo cada um dos objetivos estabelecidos: classificar dois acontecimentos dados em independentes ou não independentes; enunciar a definição de acontecimentos independentes; e formular exemplos de acontecimentos independentes.

4.1. Classificar acontecimentos em independentes ou não independentes

Neste objetivo incluem-se os dois itens, 1a e 1b, da questão 1. Seguidamente, analisam-se as resoluções dos estudantes nestes dois itens.

Item 1a. Neste item os estudantes deviam afirmar que os acontecimentos A e B são independentes recorrendo à definição de acontecimentos independentes. Na Tabela 1 apresentam-se os diferentes tipos de respostas dadas pelos estudantes ao responderem ao item 1a.

Tabela 1: Frequência (em %) de estudantes segundo o tipo de resposta no item 1a

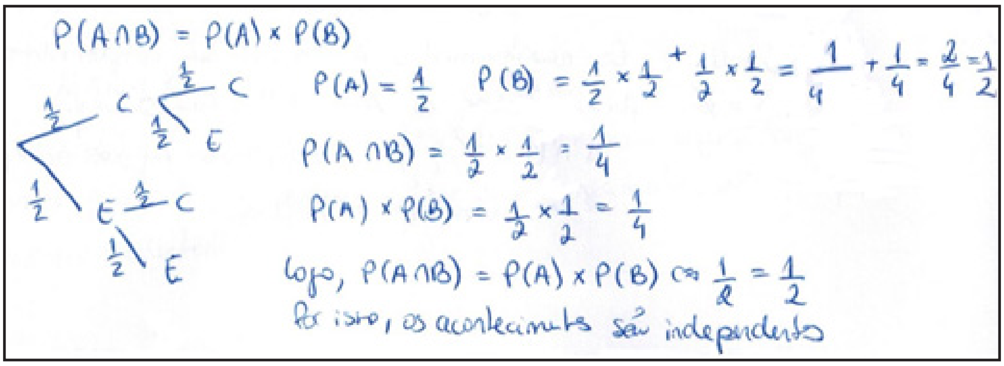
Tipo de resposta	Frequência (em %)
Correta	14 (38)
Parcialmente correta	14 (38)
Incorreta	7 (19)
Não resposta	2 (5)

Fonte: Elaboração do autor (2023)

Constata-se pela Tabela 1 que menos de metade dos estudantes responderam corretamente e outros tantos apresentaram respostas parcialmente corretas. Já cerca de um em cada cinco estudantes deram respostas erradas e apenas dois não responderam. De seguida apresentam-se as ideias em que os estudantes basearam as suas respostas.

Nas respostas corretas, três estudantes mostraram que a relação $P(A \cap B)=P(A) \times P(B)$ se verifica e os restantes 11 afirmaram que qualquer dos acontecimentos A ou B não depende, não condiciona ou não afeta a probabilidade do outro. Na Figura 2 apresenta-se um exemplo do primeiro tipo de resolução.

Figura 2: Resolução do item 1a pelo estudante E9

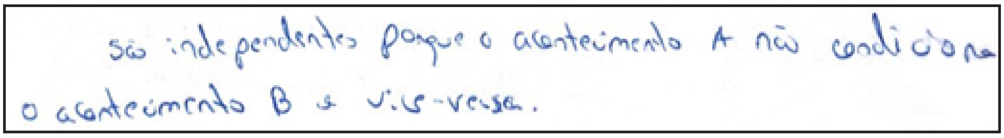


Fonte: Elaboração do estudante (2022)

Na sua resolução, o estudante E9 determinou as respetivas probabilidades, constatou que a relação P(A∩B)=P(A)×P(B) se verifica, embora tenha falhado ao escrever 1/2=1/2 em vez de 1/4=1/4, e concluiu que os acontecimentos são independentes.

No caso da independência estabelecida pela definição de que qualquer dos acontecimentos não depende, não condiciona ou não afeta a probabilidade do outro, apresenta-se na Figura 3 um exemplo deste tipo de resolução.

Figura 3: Resolução do item 1a pelo estudante E20



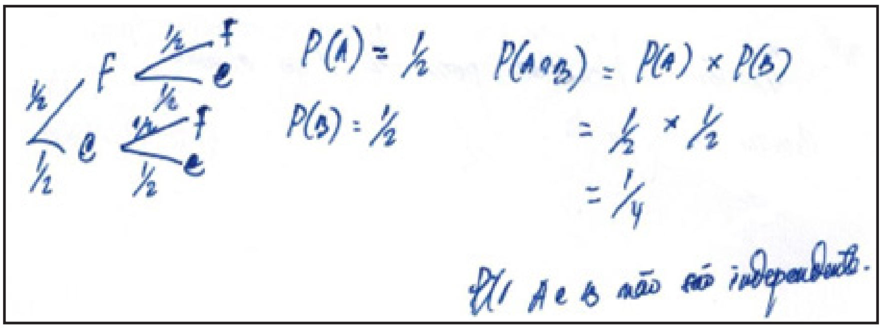
Fonte: Elaboração do estudante (2022)

O estudante E20 afirma que qualquer dos acontecimentos não condiciona o outro, socorrendo-se, provavelmente, do conhecimento e da experiência desenvolvida nas aulas de Probabilidades. A este respeito, é habitual nas aulas sobre a independência probabilística salientar que em dois lançamentos de uma moeda ou um dado e na extração com reposição de dois objetos de um saco a probabilidade de obter qualquer resultado é independente do resultado obtido no outro lançamento ou extração.

Nas respostas parcialmente corretas, oito estudantes não apresentaram qualquer explicação da sua resposta e os restantes seis referiram-se ao espaço de resultados, à reposição da moeda, à igualdade das probabilidades ((P(A)=P(B)) ou ao lançamento de uma moeda.

Por fim, nas respostas incorretas um estudante não apresentou qualquer justificação e os restantes seis afirmaram a dependência dos acontecimentos, determinaram probabilidades incorretas, aplicaram incorretamente a fórmula P(A∪B)=P(A)+P(B) ou a fórmula P(A∩B)=P(A)×P(B). Na Figura 4 apresenta-se um exemplo deste último tipo de resolução.

Figura 4: Resolução do item 1a pelo estudante E3



Fonte: Elaboração do estudante (2022)

Nesta resolução, o estudante E3 determina as probabilidades P(A) e P(B), socorrendo-se de um diagrama de árvore, assume a independência dos acontecimentos A e B (que era o que pedia para mostrar), calcula P(A∩B) e conclui incorretamente que os acontecimentos não são independentes.

Item 1b. Neste item os estudantes deviam mostrar que os acontecimentos não são independentes. Para tal, recorrendo à definição de acontecimentos independentes, deviam concluir que essa definição não se verifica para os acontecimentos dados. Na Tabela 2 apresentam-se os diferentes tipos de respostas dadas pelos estudantes ao responderem ao item 1b.

Tabela 2: Frequência (em %) de estudantes segundo o tipo de resposta no item 1b

Tipo de resposta	Frequência (em %)
Correta	2 (5)
Parcialmente correta	18 (49)
Incorreta	12 (32)
Não resposta	5 (14)

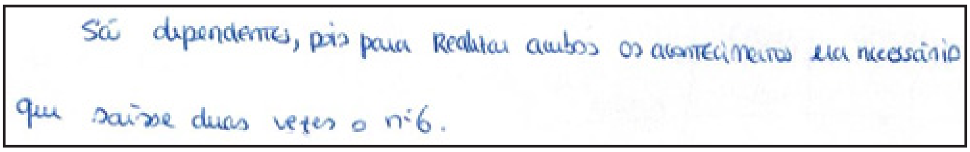
Fonte: Elaboração do autor (2023)

O item 1b revelou-se mais difícil do que o item 1a, sendo que agora menos estudantes apresentaram respostas corretas e mais estudantes deram respostas incorretas ou não responderam. Cerca de metade dos estudantes deram respostas parcialmente corretas, seguindo aqueles que deram respostas incorretas e, finalmente, apenas dois deram a resposta correta. Seguidamente analisam-se as ideias dos estudantes subjacentes às suas resoluções.

No caso das respostas corretas, ambos os estudantes recorreram à relação P(A∩B)=P(A)×P(B) para concluírem que os acontecimentos não são independentes. Comparativamente com o item anterior (item 1a), muito menos estudantes responderam corretamente a este item. Neste item não era adequado afirmar que a probabilidade da ocorrência de qualquer dos acontecimentos não é dependente, condicionada ou afetada pela ocorrência do outro, pois pretendia-se explicar a dependência (não a independência) dos acontecimentos. Portanto, diferentemente dos acontecimentos independentes, a ausência de conhecimento e experiência acerca de acontecimentos dependentes pode explicar o pior desempenho dos estudantes neste item.

Nas respostas parcialmente corretas, tal como no item 1a, oito estudantes não apresentaram qualquer explicação da sua resposta, quatro focaram-se na face superior a cinco, ou seja, na face seis, como se exemplifica com a resolução da Figura 5, dois consideraram apenas o lançamento de um dado e cada um dos restantes quatro apresentaram explicações diversas.

Figura 5: Resolução do item 1b pelo estudante E36

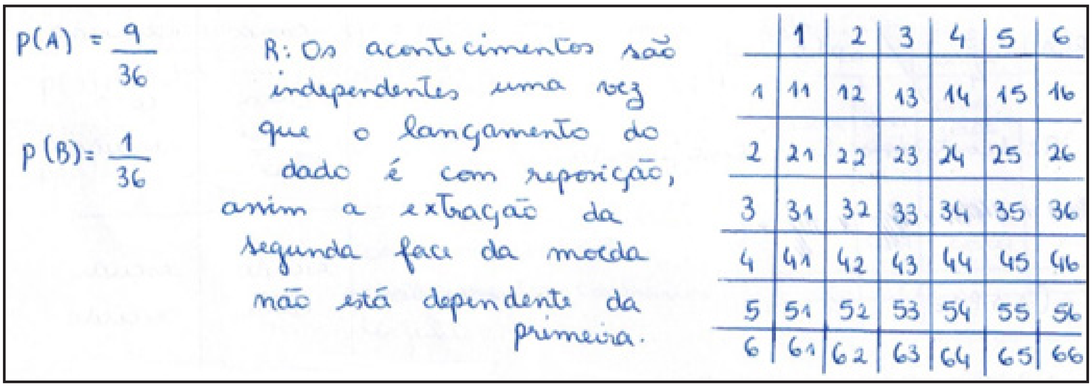

São dependentes, pois para Realizar ambos os acontecimentos era necessário que saisse duas vezes o nº6.

Fonte: Elaboração do estudante (2022)

Depreende-se da resolução do estudante E36 que a dependência dos acontecimentos resulta de se ter de obter duas faces seis nos dois lançamentos do dado, o que é exatamente o acontecimento A∩B. Constata-se, assim, que o estudante não explicou cabalmente a sua resposta.

Nas respostas incorretas, cinco estudantes não avançaram qualquer explicação sobre as suas respostas. Já nas sete respostas restantes considerou-se que um acontecimento não impossibilita o outro, determinaram-se probabilidades incorretas ou que nenhum acontecimento está condicionado pelo outro. Na Figura 6 regista-se um exemplo desta última explicação.

Figura 6: Resolução do item 1b pelo estudante E28


$P(A) = \frac{9}{36}$

$P(B) = \frac{1}{36}$

R: Os acontecimentos são independentes uma vez que o lançamento do dado é com reposição, assim a extração da segunda face da moeda não está dependente da primeira.

	1	2	3	4	5	6
1	11	12	13	14	15	16
2	21	22	23	24	25	26
3	31	32	33	34	35	36
4	41	42	43	44	45	46
5	51	52	53	54	55	56
6	61	62	63	64	65	66

Fonte: Elaboração do estudante (2022)

Na sua resolução, o estudante E28, recorrendo a uma tabela de dupla entrada, determina corretamente as probabilidades P(A) e P(B), mas não calcula P(A∩B). De seguida, considera que o lançamento do dado é feito com reposição, o que não se aplica, e conclui, erradamente, que os acontecimentos são independentes.

4.2. Enunciar a definição de acontecimentos independentes

Neste objetivo inclui-se apenas o item 2a da questão 2, de que seguidamente se analisam as resoluções dos estudantes. Nele pede-se aos estudantes que definam quando é que dois acontecimentos são independentes. Portanto, dados os acontecimentos A e B, esperava-se que os estudantes afirmassem que se deve verificar a relação P(A∩B)=P(A)×P(B) ou uma das relações P(A | B)=P(A), com P(B)≠0, ou P(B | A)=P(B), com P(A)≠0. Em alternativa, os estudantes podiam apresentar uma definição verbal, afirmando que a ocorrência de qualquer dos acontecimentos não afeta a probabilidade de ocorrência do outro. Na Tabela 3 apresentam-se os diferentes tipos de respostas dadas pelos estudantes no item 2a.

Tabela 3: Frequência (em %) de estudantes segundo o tipo de resposta no item 2a

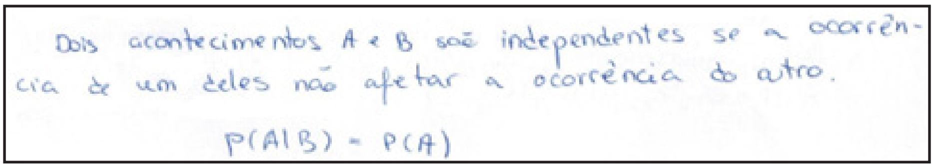
Tipo de resposta	Frequência (em %)
Correta	32 (86)
Parcialmente correta	—
Incorreta	4 (11)
Não resposta	1 (3)

Fonte: Elaboração do autor (2023)

Pela Tabela 3 verifica-se que os estudantes foram mais sucedidos em enunciar a definição de acontecimentos independentes (item 2a) do que em classificar acontecimentos em independentes ou não independentes (itens 1a e 1b). Concretamente, quase todos os estudantes apresentaram respostas corretas, não se observaram respostas parcialmente corretas e poucos deram respostas incorretas ou não responderam. De seguida, analisam-se as definições referidas pelos estudantes na resolução do item 2a.

No caso das respostas corretas, dadas por quase todos os estudantes, cinco definiram acontecimentos independentes a partir da relação P(A∩B)=P(A)×P(B), um recorreu à relação P(A|B)=P(A) e dois às duas relações anteriores. Por último, a maioria destes estudantes, num total de 24, referiu que a ocorrência de um dos acontecimentos não afeta a probabilidade do outro. Na Figura 7 exemplifica-se a explicação baseada na segunda relação.

Figura 7: Resolução do item 2a pelo estudante E25


Dois acontecimentos A e B saõ independentes se a ocorrên-
cia de um deles não afetar a ocorrência do outro.

P(A|B) = P(A)

Fonte: Elaboração do estudante (2022)

Na sua resolução, o estudante E25 apresenta uma definição de acontecimentos independentes em linguagem verbal e simbólica. Deste modo, começa por referir que dois acontecimentos e são independentes se a ocorrência de um deles não afetar a ocorrência do outro e, de seguida, estabelece a relação simbólica .

Já na Figura 8 exemplifica-se uma definição apenas verbal de acontecimentos independentes.

Figura 8: Resolução do item 2a pelo estudante E17

QUANDO A OCORRÊNCIA DE UM DELES NÃO AFETAR A PROBABILIDADE DE OCORRÊNCIA DO OUTRO.

Fonte: Elaboração do estudante (2022)

O estudante E17, na sua definição, afirma que os acontecimentos são independentes quando a ocorrência de um deles não afeta a probabilidade de ocorrência do outro, o que constitui uma definição precisa, pois o que está implícito é a verificação de uma das relações $P(A|B)=P(A)$ ou $P(B|A)=P(B)$.

Todavia, as definições verbais, semelhantes à apresentada pelo estudante E17, são limitadas na sua operacionalização. Em situações do lançamento de moedas e dados ou da extração de objetos com reposição, o conhecimento e experiência permitem-lhe explicar a independência dos acontecimentos, mas em situações menos usuais poderá ser necessário recorrer a uma das relações entre probabilidades para verificar se os acontecimentos são ou não independentes.

Por fim, nas respostas incorretas, os estudantes apresentaram ideias diversas, como “Para acontecer não é necessário que o outro aconteça”, “Dependem de si próprios” ou referem, explicitamente ou implicitamente, a ideia de acontecimentos disjuntos. Na Figura 9 exemplifica-se o caso dos acontecimentos disjuntos.

Figura 9: Resolução do item 2a pelo estudante E29

A e B são independentes quando a reunião de A com B é igual à soma da probabilidade de A com a probabilidade de B.

Fonte: Elaboração do estudante (2022)

O estudante E29 parece focar-se na relação $P(A \cup B)=P(A)+P(B)$, o que requer que os acontecimentos A e B sejam disjuntos. Contudo, o enunciado não é totalmente claro quando refere o acontecimento “reunião de A com B” e não, como deveria, “a probabilidade da reunião de A com B”.

4.3. Formular exemplos de acontecimentos independentes

Deste objetivo faz parte apenas o item 2b da questão 2, de que seguidamente se analisam as resoluções dos estudantes. Nele pede-se aos estudantes que definam dois acontecimentos independentes, diferentes daqueles que são dados na questão 1. Portanto, tratando-se de um item aberto, espera-se que os estudantes apresentem resoluções diversas.

Na Tabela 4 apresentam-se os diferentes tipos de respostas dadas pelos estudantes ao responderem ao item 2b

Tabela 4: Frequência (em %) de estudantes segundo o tipo de resposta no item 2b

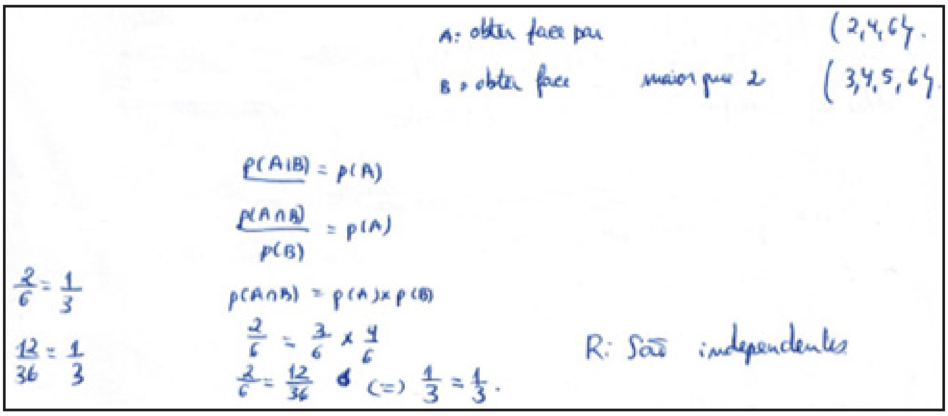
Tipo de resposta	Frequência (em %)
Correta	4 (11)
Parcialmente correta	10 (27)
Incorreta	21 (57)
Não resposta	2 (5)

Fonte: Elaboração do autor (2023)

Pela Tabela 4 constata-se que mais de metade dos estudantes apresentaram respostas incorretas, seguindo-se as respostas parcialmente corretas e apenas quatro estudantes deram respostas corretas e dois não responderam. Conclui-se, portanto, que este item foi o que levantou mais dificuldades aos estudantes. Na continuação analisam-se as ideias dos estudantes em que basearam as suas resoluções.

Nas respostas corretas, que são apenas quatro, os estudantes consideraram as experiências de lançamento de um dado ou de extração de bolas de um saco. Na Figura 10 exemplifica-se o caso da experiência de lançamento de um dado.

Figura 10: Resolução do item 2b pelo estudante E24



Fonte: Elaboração do estudante (2022)

Na experiência de lançamento de um dado, o estudante E24 considerou dois acontecimentos A e B, seguidamente determinou as probabilidades $P(A)$, $P(B)$ e $P(A \cap B)$ e, por fim, mostrou que se verifica a relação $P(A \cap B)=P(A) \times P(B)$, sem, contudo, definir o acontecimento $A \cap B$. Nas três restantes resoluções os estudantes consideraram experiências de extração de bolas/cartas com reposição, o que foi visto como sendo suficiente, mesmo sem a verificação da relação de independência. Analogamente ao caso do lançamento de moedas e dados, considerou-se a *reposição* como um conhecimento e experiência bastantes para justificar a independência.

Nas respostas parcialmente corretas, nenhum estudante verificou a condição de independência nem referiu a reposição na experiência de extração de bolas de um saco. Na Figura 11 apresenta-se um exemplo deste tipo de resolução.

Figura 11: Resolução do item 2b pelo estudante E11

> Na experiência aleatória de retirar uma bola de um saco com 20 bolas, numeradas de 1 a 20. Sendo o acontecimento A "saída de bola com um número múltiplo de 3" e o acontecimento B "saída de bola com um número par".

Fonte: Elaboração do estudante (2022)

O estudante E11 estabelece dois acontecimentos da experiência aleatória de extração de uma bola de um saco com 20 bolas numeradas de 1 a 20. Embora os acontecimentos sejam independentes, o estudante não mostra que eles são realmente independentes.

Finalmente, nas respostas incorretas nove estudantes não apresentaram qualquer explicação das suas respostas e cinco referiram a experiência de lançamento de um dado, cuja resolução parece ter sido baseada na definição de acontecimentos incompatíveis ou complementares, como se exemplifica na Figura 12.

Figura 12: Resolução do item 2b pelo estudante E6

> No lançamento de um dado numerado de 1 a 6
> A: obter número inferior a 3
> B: obter número igual ou superior a 3.

Fonte: Elaboração do estudante (2022)

Na sua resolução, o estudante E6 definiu dois acontecimentos A e B complementares na experiência de lançamento de um dado, que não são independentes pois $A \cap B$ é o acontecimento impossível e tanto A como B não são acontecimentos impossíveis.

Dos restantes estudantes, quatro apresentam resoluções ininteligíveis e três não especificam acontecimentos concretos ou estabelecem acontecimentos coincidentes. Repare-se que no caso dos acontecimentos coincidentes, conclui-se que $P(A|A)=1$ para qualquer valor de $P(A)\neq 0$, donde A é independente de A apenas quando A é o acontecimento certo.

5. Discussão e conclusão

Na classificação de acontecimentos em independentes e não independentes, em que se inserem os itens 1a e 1b, a maior parte dos estudantes apresentou respostas corretas ou parcialmente corretas, sendo que muito poucos deles (apenas dois) deram respostas corretas no item 1b. Nas respostas corretas os estudantes explicaram as suas respostas a partir de uma das relações que define acontecimentos independentes ou de que qualquer dos acontecimentos não depende, não condiciona ou não afeta o outro. Possivelmente, deve-se a esta última explicação o melhor desempenho dos estudantes no item 1a, pois no item 1b ela não se aplica porque os acontecimentos são dependentes. Nas respostas parcialmente corretas destaca-se que muitos estudantes não deram qualquer explicação acerca das suas respostas.

Já na definição de acontecimentos independentes, avaliada no item 2a, verificou-se que quase todos os estudantes deram respostas corretas. Neste item, as respostas corretas foram explicadas através de relações que definem acontecimentos independentes ou verbalmente, aludindo a que a ocorrência de um acontecimento não depende ou não afeta a probabilidade do outro.

Por último, na formulação de exemplos de acontecimentos independentes, avaliada no item 2b, a maior parte dos estudantes deu respostas incorretas, constituindo-se, assim, como o objetivo do estudo menos atingido. Entre as respostas corretas e parcialmente corretas, as respostas corretas foram muito menos, e na totalidade estes dois tipos de resposta totalizam pouco mais do que 1/3 de todas as respostas. Nas respostas corretas os estudantes consideraram experiências de lançamento de um dado ou de extração de bolas de um saco e nas respostas parcialmente corretas nenhum estudante verificou a independência dos acontecimentos nem mencionou a reposição na experiência de extração de bolas de um saco. Assim, as dificuldades sentidas pelos estudantes em exemplificar acontecimentos independentes confirmam aquelas que foram observadas num estudo anterior de Fernandes e Barros (2021), também com futuros professores dos primeiros anos.

O melhor desempenho dos estudantes em definir acontecimentos independentes também foi observado em estudos sobre outros tipos de acontecimentos, em que participaram os mesmos futuros professores dos primeiros anos, designadamente em definir acontecimentos disjuntos (Fernandes, 2022) e em definir acontecimentos complementares (Fernandes, 2024). Ora, o maior sucesso dos estudantes em definir diferentes tipos de acontecimentos, no presente estudo e nos dois estudos referidos, significa que se trata de um resultado relativamente robusto, acarretando, por sua vez, desafios ao ensino e aprendizagem de tais conceitos.

Mais concretamente, os estudantes serem capazes de definir acontecimentos disjuntos, complementares ou independentes não implica que eles estejam aptos a classificar acontecimentos dados e a dar exemplos de acontecimentos desses diferentes tipos, como foi demonstrado neste e nos estudos referidos. Muito provavelmente, esta debilidade dos estudantes tenha origem numa aprendizagem rotineira, alicerçada apenas na memória, e não significativa (Ausubel; Novak; Hanesian, 1980).

Para ultrapassar as limitações dos estudantes, observadas no estudo, parece-nos que a exploração de tarefas abordando simultaneamente a classificação, a definição e a exemplificação de acontecimentos independentes, tal como aconteceu no presente estudo, poderá contribuir para uma aprendizagem dos estudantes, futuros professores dos primeiros anos, mais significativa, na qual se realça, explicitamente, a aplicação da definição de acontecimentos independentes à classificação de acontecimentos dados e à formulação de exemplos.

Por outro lado, relativamente às dificuldades dos estudantes em distinguir acontecimentos incompatíveis, complementares e independentes, sugere-se que sejam enfatizados no ensino destes conceitos os atributos que são comuns e aqueles que os distinguem. Assim, dados os acontecimentos A e B, o atributo $A \cap B = \emptyset$ é comum aos acontecimentos incompatíveis e complementares, e os complementares distinguem-se por também requerer o atributo $A \cap B = U$, em que U é o espaço de resultados. Já se uma das probabilidades P(A) ou P(B) é nula, então os acontecimentos são independentes (Martins, 2017), enquanto se $A \cap B = \emptyset$ e P(A) e P(B) são não nulas, então os acontecimentos não são independentes, ou seja, acontecimentos incompatíveis e complementares não são independentes desde que P(A)≠0 e P(B)≠0.

Face às dificuldades sentidas pelos futuros professores importa aprofundar a sua formação sobre os diferentes tipos de acontecimentos, em particular acerca dos acontecimentos independentes. Tal aprofundamento é essencial para os estudantes que não frequentaram cursos científico-tecnológicos no ensino secundário, pois nesses cursos a componente matemática é muito reduzida. Donde, é plausível que a formação matemática dos estudantes, adquirida ao longo do ensino secundário, interfira com as dificuldades sentidas pelos estudantes nos acontecimentos independentes, ou seja, que estudantes com uma formação matemática anterior mais robusta/frágil apresentam menores/maiores dificuldades nos acontecimentos independentes. Assim, a realização de um futuro estudo que discrimine as dificuldades dos estudantes segundo a formação matemática recebida nos cursos que frequentaram no ensino secundário permitirá aprofundar a origem das suas dificuldades.

6. Referências

ALSINA, Ángel. “Ça commence aujourd’hui”: alfabetización estadística y probabilística en la educación matemática infantil. **PNA Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática**, Granada, v. 15, n. 4, p. 243-266, 2021.

AUSUBEL, David; NOVAK, Joseph; HANESIAN, Helen. **Psicologia educacional**. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980.

BATANERO *et al*. El inicio del razonamiento probabilístico en educación infantil. **PNA Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática**, Granada, v. 15, n. 4, p. 267-288, 2021.

BATANERO, Carmen. La comprensión de la probabilidad en los niños: ¿qué podemos aprender de la investigación? In: ENCONTRO DE PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA NA ESCOLA, 3, 2013, Braga. **Atas**... Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho, 2013. p. 9-21.

BOROVCNIK, Manfred; PEARD, Robert. Probability. In: BISHOP, Alan *ET AL*. (Eds.). **International handbook of mathematics education**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996. p. 239-287.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular** — Educação é a Base. Brasília: Ministério da Educação, 2018.

CONTRERAS, José Miguel *et al*. Evaluación de la falacia del eje temporal en futuros profesores de educación secundaria. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 14, n. 3, p. 346–362, 2013.

CORREIA, Paulo. Ferreira; FERNANDES, José António. Intuições de alunos do 9.º ano em acontecimentos independentes. **Zetetiké**, Campinas, v. 22, n. 41, p. 83-113, 2014.

FERNANDES, José António *et al*. Desempenho em probabilidade condicionada e probabilidade conjunta de futuros professores do ensino básico. **Quadrante**, Lisboa, v. XXIII, n. 1, p. 43-61, 2014.

FERNANDES, José António. Acontecimentos complementares em Probabilidades: exploração por futuros professores dos primeiros anos. **Educação Matemática Sem Fronteiras: Pesquisas em Educação Matemática**, Chapecó, v. 6, n. 1, p. 77-99, 2024.

FERNANDES, José António. Classificação, definição e formulação de acontecimentos disjuntos por futuros professores dos primeiros anos escolares. ***Revista de Educación Estadís*tica**, Talca, v. 1, n. 1, p. 1-18, 2022.

FERNANDES, José António. Compreensão de futuros professores dos efeitos nas medidas de tendência central ao se acrescentar novos dados a um conjunto. **Bolema**, Rio Claro, v. 35, n. 71, p. 1825-1844, 2021.

FERNANDES, José António; BARROS, Paula Maria. Definir acontecimentos incompatíveis, complementares e independentes. **Indagatio Didactica**, Aveiro, v. 13, n. 1, p. 31-42, 2021.

FERNANDES, José António; DINIZ, Leandro do Nascimento. Ensino de Probabilidade e Estatística na Educação Fundamental da Base Nacional Comum Curricular do Brasil. **Góndola, Enseñ Aprend Cienc**, Bogotá, v. 17, n. 2, p. 392-406, 2022.

FERNANDES, José António; FREITAS, Adelaide. Selection and Application of graphical and numerical statistical tools by prospective primary school teachers. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 21, n. 6, p. 82-97, 2019.

FERNANDES, José António; OLIVEIRA JÚNIOR, Ailton. Paulo. Relacionar acontecimentos disjuntos e complementares. **Revista de Investigação e Divulgação em Educação Matemática** – RIDEMA, Juiz de Fora, v. 7, n.1, p. 1-21, 2023.

FISCHBEIN, Efraim. **The intuitive sources of probabilistic thinking in children**. Dordrecht: D. Reidel, 1975.

FISCHBEIN, Efraim; NELLO, Maria Sainati; MARINO, Maria Sciolis. Factors affecting probabilistic judgments in children and adolescents. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 22, p. 523-549, 1991.

HAWKINS, Anne; JOLLIFFE, Flavia; GLICKMAN, Leslie. **Teaching Statistical Concepts**. Harlow, UK: Longman, 1992.

MARTINS, Maria Eugénia. Acontecimentos independentes. **Revista de Ciência Elementar**, Porto, v. 5, n. 4, p. 1-4, 2017.

MCMILLAN, J.; SCHUMACHER, S. **Research in education**: evidence-based inquiry. 7. ed. Harlow: Pearson, 2014.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Aprendizagens Essenciais de Matemática**: Ensino Básico. Lisboa: Direção-Geral da Educação, 2021.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Aprendizagens Essenciais de Matemática**: Ensino Secundário. Lisboa: Direção-Geral da Educação, 2023.

NIKIFORIDOU, Zoi; PANGE, Jenny. The notions of chance and probabilities in preschoolers. **Early Childhood Education Journal**, Dordrecht, v. 38, n. 4, p. 305-311, 2010.

SKEMP, Richard Rowland. **The psychology of learning mathematics**. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates, 1993.

Histórico Editorial
Recebido em 06/03/2024.
Aceito em 09/08/2024.
Publicado em 24/08/2024.

Como citar – ABNT
FERNANDES, José António. Conhecimento de acontecimentos independentes por futuros professores dos primeiros anos. **REVEMOP**, Ouro Petro/MG, Brasil, v. 6, e2024008, 2024. https://doi.org/10.33532/revemop.e2024008

Como citar – APA
Fernandes, J. A. (2024). Conhecimento de acontecimentos independentes por futuros professores dos primeiros anos. *REVEMOP*, *6*, e2024007. https://doi.org/10.33532/revemop.e2024008