Aplicações das variáveis complexas no Teorema de Napoleão e no Teorema do Círculo dos Nove Pontos

Ana Luiza Ferreira Camargo analuiza0906@hotmail.com
Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil

Gil Fidelix de Souza gilsouza@iceb.ufop.br
Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil

Resumo

São apresentadas demonstrações de problemas geométricos utilizando a estrutura do conjunto dos números complexos dos quais destacamos o Teorema de Napoleão e o Teorema do círculo dos nove pontos.

Palavras-chave

Números complexos, círculo, retas, triângulos.

1 Introdução

Apresentaremos algumas aplicações dos números complexos à geometria plana , a qual faz uma contraposição com a visão algébrica. Na primeira parte são desenvolvidos conceitos básicos da geometria plana que foram apresentados e elaborados para serem utilizados como ferramentas nas demonstrações dos teoremas e para melhor compreensão do leitor. A segunda parte do projeto utiliza de conceitos desenvolvidos na primeira parte para a obtenção de dois resultados.

Outro aspecto de grande relevância , e que este trabalho tem como principais objetivos a demonstração do Teorema de Napoleão e do Teorema do Círculo dos Nove Pontos a partir de variáveis complexas na geometria plana. Nosso trabalho é baseado na dissertação de mestrado [1] que propõe a utilização de propriedades geométricas dos números complexos para a demonstração de teoremas da geometria plana.

2 O Conjunto dos Números Complexos

Os números complexos podem ser compreendidos como uma extensão do conjunto dos números reais, isto é, estes números formam um conjunto numérico que é mais abrangente que os números reais.

Neste capítulo, apresentaremos algumas definições e propriedades da geometria plana.

Os números complexos podem ser representados de três formas sendo elas:

• Representação Algébrica: quando são escritos da forma; z=a+ib, sendo que o a e **b** são números reais, sendo que a é a parte real e ib descreve a parte imaginária .

• Representação Cartesiana: quando são escritos em pares ordenados os números complexos têm que estar definidos a igualdade, a adição e a multiplicação. Eles são representados $z=(x,y) \in \mathbb{C}$ ou $z \in \mathbb{C} \leftrightarrow (x,y)$ sendo $x,y \in \mathbb{R}$.

• Representação Polar Ou Trigonométrica: quando são escritos na forma; z=p($\cos\theta$ + $i\sin\theta$). Na qual a p =|z| e o θ= argumento de z.

Além disso, quando falamos em pontos no planos temos que associar o plano cartesiano com os números complexo. Esta associação pode ser correspondida como:

• **a= a + 0i** que vai se relacionar ao eixo x.

• **b= 0 + bi** que vai corresponder ao eixo y.

Na qual no plano complexo o eixo x é chamado de eixo real e o eixo y se denomina como eico dos imaginários.Este plano complexo pode ser chamado de plano complexo ou plano de Argand ou Gaussiano.

Outro aspecto relevante , está relacionado com as raízes n-ésimas da unidade, isto é, para obtermos estas raízes significa que temos que determinar os números complexos z que são soluções da equação:

$$z^n - 1 = 0.$$

Com isso, sabemos que $z_0 = 1$ é uma das raízes. Além disso, sabendo que $\cos 2k\pi$ + isin2kπ = 1, $\forall k \in \mathbb{Z}$. Usando a fórmula De Moivre, temos que :

$$\left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^n = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1.$$

E pelo Teorema Fundamental da Álgebra, a equação $z^n - 1 = 0$ diz que esta equação possui *n* raízes complexas. Então , podemos afirmar que :

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} = k \in 0, 1, 2, 3, 4, ..., n-1.$$

Estas raízes da unidades, podem ser representadas pela letra *w*, isto é:

$$z_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n} = w$$

$$z_2 = \cos\frac{4\pi}{n} + i\sin\frac{4\pi}{n} = w^2....$$

Então as raízes n-ésimas a unidades serão:

$$1, w, w^2, w^3, w^4, ..., w^{n-1}.$$

E para finalizar o capitulo, quando formos nos referir aos números dos complexos será indicado pela letra *z*.

3 Algumas Propriedades e Noções Geométricas Simples

Antes de iniciarmos algumas propriedades e noções geométricas, devemos compreender que neste trabalho, que o ponto análogo ao número complexo z será representando pela mesma letra, isto é, *z*. Além disso, quando for exibido o conjugado do número complexo $\bar{z}$, será indicado pela letra $\bar{z}$.

3.1 Distância Entre Dois Pontos

Em geometria, um dos conceitos de maior relevância é a de distância entre pontos devido a sua importância nesta área. Para encontrar esta distância, é dado uma reta *r* e dois pontos pertencentes a esta reta z_1 e z_2 , a distância d entre esses pontos equivale com o módulo$|w|=|z_2-z_1|$ do número complexo $w=z_2-z_1$, se consideramos o vetor $\overrightarrow{z_1 z_2}$ igual ao vetor $\overrightarrow{Ow}$.

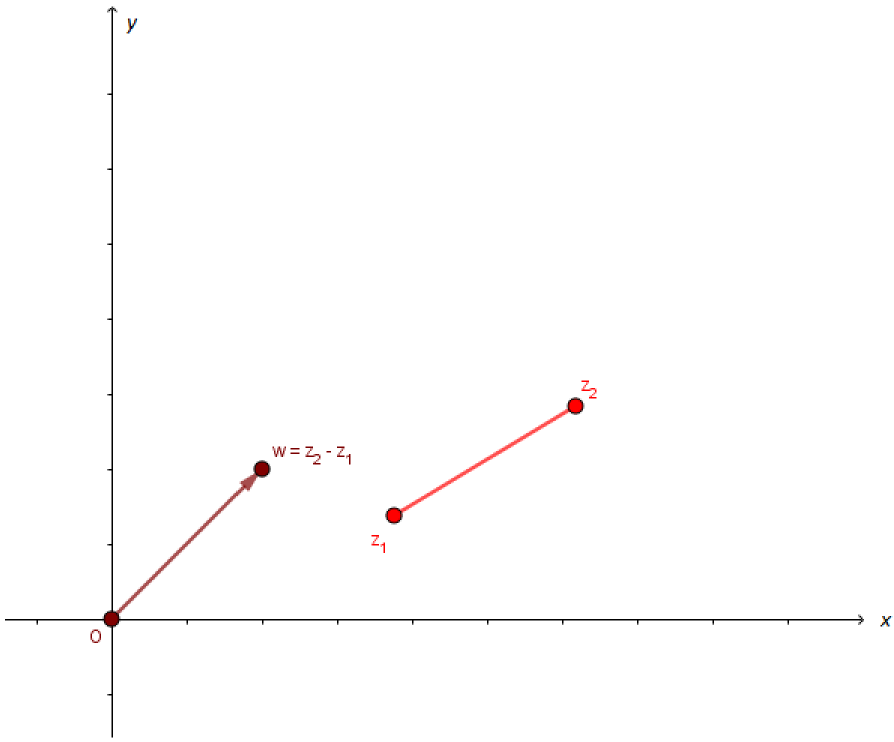

Figura 1: Distância Entre Dois Pontos

Prova: Dados os pontos z_1 e z_2 que podem ser escritos da forma z_1=a_1+ib_1 e z_2=a_2+ib_2 e que podem ser representados no plano complexo e formando um triângulo da seguinte maneira:

Para achar a distância entre os pontos, basta aplicar o Teorema de Pitágoras na qual a distância será equivalente a hipotenusa.

$$Hipotenusa^2 = \text{cateto } oposto^2 + \text{cateto } adjacente^2$$
$$Distncia^2 = (a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2$$
$$\text{Distância}= \sqrt{a_2^2 - a_1^2 + b_2^2 - b_1^2}$$
$$\text{Distância}= \sqrt{(a_2^2 + b_2^2) - (a_1^2 + b_1^2)}$$
$$\text{Distância}= |z_2 - z_1|$$

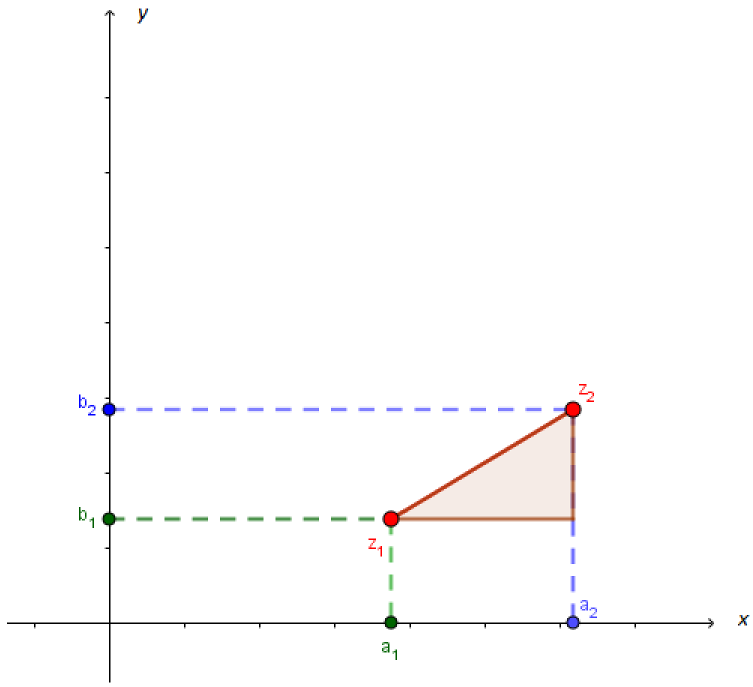

Figura 2: Representação dos pontos complexos e triângulo

3.2 Ângulo Orientado Entre Retas

Primeiramente, a definição de ângulo significa a abertura entre dois segmentos e além disso, sabemos que orientação se relaciona em direção e sentido.

Em segundo lugar, dado dois números complexos distintos z_1e z_2 e a origem do plano complexo *O*, o ângulo $\widehat{z_1 O z_2}$ é orientado se os pontos z_1e z_2 são ordenado no sentindo positivo (anti-horário).

3.3 Ângulo Formado Entre Duas Retas

Considerando a reta *r* que passa pela origem e tem extremidade em z_1 e a reta *s* que possui extremidade em z_2, o ângulo formado entre essas duas retas é representado por $\widehat{z_1 O z_2}$ e pode ser ser dado pela expressão:

$$\widehat{z_1 O z_2} = arg\frac{z_2}{z_1} = arg z_2 - arg z_1$$

Prova: Seja z_1 e z_2 números complexos qualquer, podemos reescreve los da forma trigonométrica para melhor compreensão da demonstração, na qual ficaria da seguinte maneira: $z_1 = \rho_1(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ e $z_2 = \rho_2(\cos\beta + i\sin\beta)$.Com isso, *arg*$z_1 = \alpha$ e *arg*$z_2 = \beta$, e pela divisão de números complexos na forma trigonométrica, temos:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\alpha - \beta) + i\sin(\alpha - \beta)]$$

$$arg\frac{z_1}{z_2} = \alpha - \beta = arg z_1 - arg z_2$$

3.4 Condição de Alinhamento de Três Pontos no Plano Complexo

Preposição 1: Três pontos distintos z_1, z_2 e z_3 são colineares se, e somente se,

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \in \mathbb{R}$$

.

Prova: Seja z_1, z_2 e z_3 um número complexo qualquer, para dizer que eles são colineares equivale dizes que o ângulo $\widehat{z_2 z_1 z_3}$ na qual o arg $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$=0 ou

igual a π.
Outra Maneira de provar, se considerarmos z_1, z_2 e z_3 pontos do plano complexo , pode-se dizer que se o determinante é igual a zero , significa que os pontos são colineares quando:

$$det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

3.5 Equação da Reta

Preposição 2: Sejam z_1 e z_2 pontos distintos do plano complexo. A equação da reta que passa por esses dois pontos é dada por

$$\frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{\bar{z} - \bar{z_1}}{\bar{z_2} - \bar{z_1}},$$

que é equivalente a

$$(z_2 - z_1)\bar{z} - (\bar{z_2} - \bar{z_1})z = z_2\bar{z_1} - z_1\bar{z_2}$$

.

Prova: Seja z um complexo qualquer da forma z = *x*+*iy* , e seu $\bar{z}$ um conjugado qualquer escrito da seguinte maneira; $\bar{z}$=*x*-*iy*. Se consideramos o sistema:

$$\begin{cases} z = x + iy \\ \bar{z} = x - iy \end{cases}$$

Somando as equações obteremos:

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}$$

e

$$y = \frac{z - \bar{z}}{2}$$

Além disso, sabemos que a equação da reta pode ser dada como: *ax+by+c* sendo *a,b* e *c* $\in \mathbb{C}$. Se substituímos os resultados encontrados acima iremos achar os seguintes resultados:

$$a(\frac{z+\bar{z}}{2})+b(\frac{z-\bar{z}}{2})+2c=0$$
$$a(z+\bar{z})+b(Z-\bar{z})+2c=0$$
$$z(a+b)+\bar{z}(a-b)+2c=0$$

Daí, como os resultados acimas são números quaisquer , podemos falar que os resultados são equivalentes para os pontos z_1,z_2 $\bar{z_1}$,$\bar{z_2}$. Logo, seja z_1,z_2 $\bar{z_1}$,$\bar{z_2}$ $\in$ retas temos:

$$\begin{cases} z(a+b) + \bar{Z}(a-b) + 2c = 0 \\ z_1(a+b) + \bar{z_1}(a-b) + 2c = 0 \\ z_2(a+b) + \bar{z_2}(a-b) + 2c = 0 \end{cases}$$

Que pode ser escrito da seguinte forma:

$$det \begin{pmatrix} z & \bar{z} & 2 \\ z_1 & \bar{z_1} & 2 \\ z_2 & \bar{z_2} & 2 \end{pmatrix} =0 \leftrightarrow \frac{z-z_1}{z_2-z_1} = \frac{\bar{z}-\bar{z_1}}{\bar{z_2}-\bar{z_1}}$$

3.6 Equação Paramétrica da Reta

Inicialmente, sabemos que a equação da reta pode ser representada da forma geral, reduzida e paramétrica. Nesta seção iremos falar sobre as equações paramétricas. A definição de retas paramétricas , diz que dado uma equação com um parâmetro (variável qualquer) , esta equação representará a equação da reta em diferentes pontos no plano cartesiano.

Assim, considerando um número complexo *z,* z_1 *e* z_2 e uma reta *r*, tal que *z,*z_1, z_2 $\in$*r.* Então pela equação da reta na seção 3.4 , podemos escrever:

$$\frac{z-z_2}{z_1-z_2} = t, ondet \in \mathbb{R}$$

e que pode ser reescrito como:

$$z - z_1 = t(z_2 - z_1)$$

$$z = (1-t)z_1 + tz_2, t \in \mathbb{R}.$$

Portanto, a equação paramétrica pode ser escrita das três formas acima.

3.7 Equação do Círculo

Preposição 3: Quatro pontos distintos z_1, z_2, z_3 e z_4 estão situados em uma circunferência (uma reta) se, e somente se, o número

$$\left(\frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}\right) / \left(\frac{z_2 - z_4}{z_1 - z_4}\right)$$

é um número real.

Prova: Primeiramente, vamos supor que os pontos z_1, z_2, z_3 e z_4 pertencem a uma circunferência,se e somente se, $\widehat{z_1 z_3 z_2} = \widehat{z_1 z_4 z_2}$, que é verdade devido as relações métricas na circunferência.

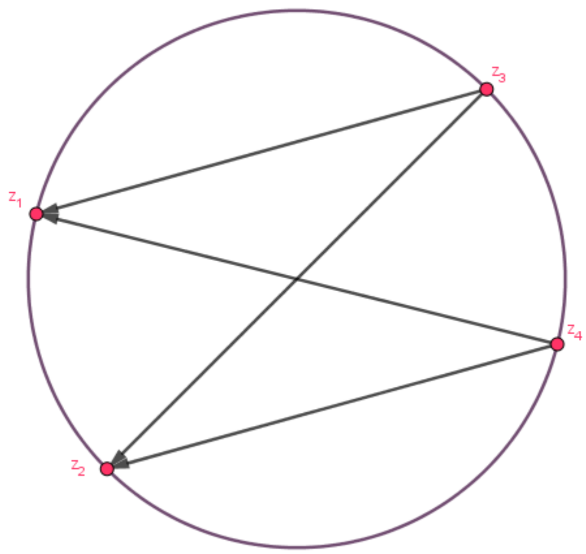

Figura 3: Ilustração dos pontos z_1, z_2, z_3 e z_4 pertencente a circunferência.

Primeiramente, vamos considerar o primeiro caso sendo $\widehat{z_1 z_3 z_2} = \widehat{z_1 z_4 z_2}$.

Então temos:

$$arg\frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} = arg\frac{z_2 - z_4}{z_1 - z_4}$$

na qual temos que

$$arg\frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} - arg\frac{z_2 - z_4}{z_1 - z_4} = 0$$

e podemos concluir que $\dfrac{arg\frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}}{arg\frac{z_2 - z_4}{z_1 - z_4}}$ é um número real .

Em segundo lugar, se $\dfrac{arg\frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}}{arg\frac{z_2 - z_4}{z_1 - z_4}}$ é um número real $\in \mathbb{R}$, temos que :

$$arg\frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} - arg\frac{z_2 - z_4}{z_1 - z_4} = k\pi, comk \in \mathbb{Z}.$$

Além de que, como z_3 e z_4 estão no mesmo semiplano em relação a reta z_1z_2, temos que k=0. Logo:

$$arg\frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} - arg\frac{z_2 - z_4}{z_1 - z_4} = \widehat{z_1z_3z_2} = \widehat{z_1z_4z_2}$$

O outro caso pode ser provado analogamente.

Preposição 4: A equação da circunferência (da reta) que passa pelos pontos z, z_1, z_2 e z_3 é dada por :

$$\frac{\left(\dfrac{z - z_2}{z_1 - z_2}\right)}{\left(\dfrac{z - z_3}{z_1 - z_3}\right)} = \frac{\left(\dfrac{\bar{z} - \bar{z}_2}{\bar{z}_1 - \bar{z}_2}\right)}{\left(\dfrac{\bar{z} - \bar{z}_3}{\bar{z}_1 - \bar{z}_3}\right)}$$

Prova: Supondo que os pontos z_1, z_2, z_3 e z_4 pertencem a uma circunferência, então pela Preposição 3 temos que :

$$\left(\frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}\right) / \left(\frac{z_2 - z_4}{z_1 - z_4}\right)$$

na qual, é um número real e que pode ser reescrito como:

$$\frac{\left(\dfrac{z-z_2}{z_1-z_2}\right)}{\left(\dfrac{z-z_3}{z_1-z_3}\right)}=\frac{\left(\dfrac{\bar{z}-\bar{z}_2}{\bar{z}_1-\bar{z}_2}\right)}{\left(\dfrac{\bar{z}-\bar{z}_3}{\bar{z}_1-\bar{z}_3}\right)}$$

3.8 Perpendicularismo no Plano Complexo

Preposição 5: As retas z_1z_2 e z_3z_4 são ortogonais se, e somente se,

$$\frac{z_2-z_1}{z_4-z_3}$$

for imaginário puro.

Prova: Inicialmente sabemos que para ser perpendicular os ângulos formados entre as retas tem que ser $\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$, então:

$$arg(z_2-z_1)-arg(z_4-z_3)=\frac{\pi}{2}ou\frac{3\pi}{2}\leftrightarrow arg\frac{z_2-z_1}{z_4-z_3}\in\left\{\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right\}.$$

Além disso, como estamos trabalhando em um plano complexo, equivale dizer que o resultado entre o ângulo formado tem que ser um imaginário puro, isto é:

$$arg\frac{z_2-z_1}{z_4-z_3}=ki,\forall k\in\mathbb{R}.$$

Uma outra maneira de demonstrar é, dado a reta z_1z_2 e a reta z_3z_4 o coeficiente angular entre eles será:

$$z_1z_2=\frac{-1}{z_3z_4},$$

pois supondo que a reta $z_1z_2=-\beta$ e a reta $z_3z_4=\beta+\frac{\pi}{2}$, e pela definição de ângulo oposto pelo vértice seu ângulo será de $\frac{\pi}{2}$.

3.9 Equação da Reta Perpendicular

Preposição 6: A equação da reta perpendicular á reta z_1z_2 e que passa por z_3 é dada por:

$$\frac{z-z_3}{z_2-z_1}+\frac{\bar{z}-\bar{z}_3}{\bar{z}_2-\bar{z}_1}=0$$

que é equivalente a

$$(z_2 - z_1)\bar{z} + (\bar{z_2} - \bar{z_1})z = z_3(\bar{z_2} - \bar{z_1}) + \bar{z_3}(z_2 - z_1).$$

Prova: Considerando a reta *r* formada pelos pontos zz_3 que passa pelos pontos z e z_3 e a reta *s* que é expressa por z_1z_2 formada pelos pontos z_1 e z_2, como vimos na seção acima a condição para as retas serem perpendiculares, isto é ,$zz_3 \perp z_1z_2$ se, somente se,

$$\frac{z - z_3}{z_2 - z_1} \text{ é um imaginário puro.}$$

Além disso, sabemos que o conjugado do número complexo é expresso da forma $\bar{z}$ = a-ib e que possui a mesma equação da reta perpendicular só seu coeficiente angular possui o sinal contrário, por estar representada no quadrante oposto da reta, isto é:

$$\frac{z - z_3}{z_2 - z_1} = -\frac{\bar{z} - \bar{z_3}}{\bar{z_2} - \bar{z_1}}.$$

Com isso temos que a equação da reta perpendicular é formada pela reta dos números complexos e pela reta do conjugado dos números complexos, além de que $\dfrac{z - z_3}{z_2 - z_1}$ é um imaginário puro , podendo ser escrito como:

$$\frac{z - z_3}{z_2 - z_1} + \frac{\bar{z} - \bar{z_3}}{\bar{z_2} - \bar{z_1}} = 0$$

que é equivalente a

$$(z_2 - z_1)\bar{z} + (\bar{z_2} - \bar{z_1})z = z_3(\bar{z_2} - \bar{z_1}) + \bar{z_3}(z_2 - z_1).$$

3.10 Equação da Mediatriz de um Segmento

O conceito de mediatriz diz que, dada uma reta perpendicular ao segmento z_1z_2 e que passa pelo ponto $z_3 = \dfrac{z_1 + z_2}{2}$, sendo z_3 o ponto médio. Assim, mediatriz é uma reta perpendicular que passa pelo ponto médio, que delimita o segmento da reta que possui os pontos z_1z_2.

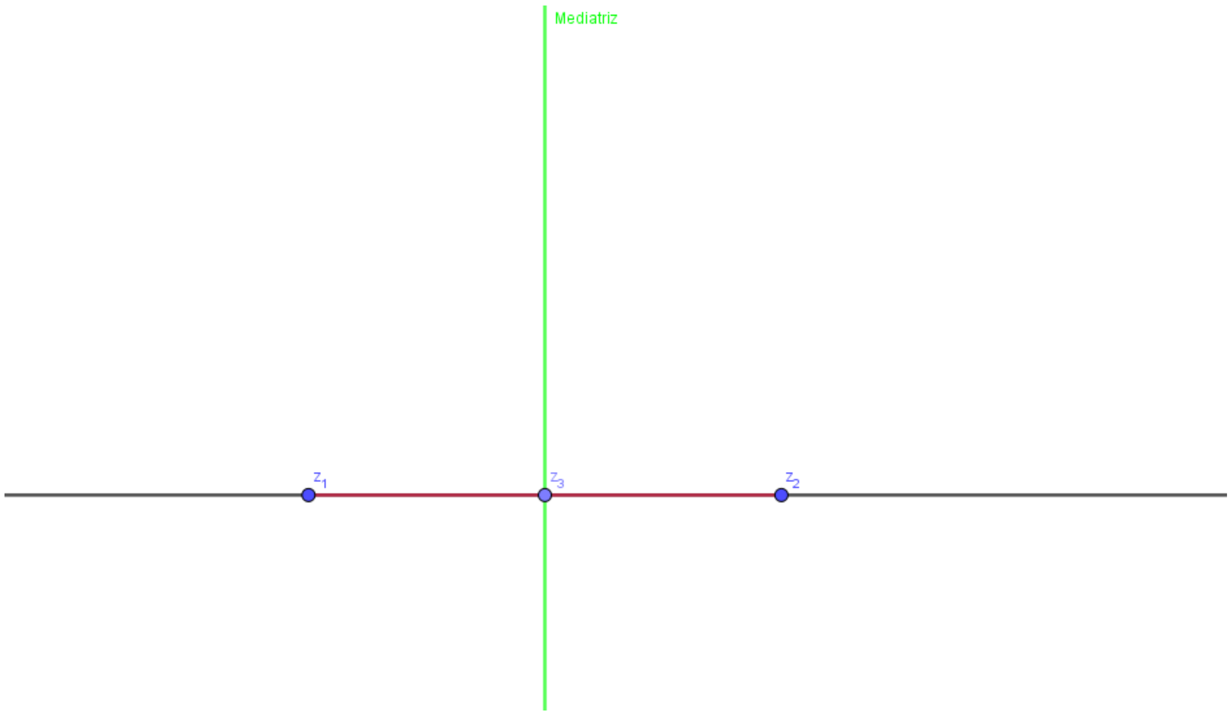

Figura 4: Mediatriz

Além disso,podemos encontrar a mediatriz que intercepta o segmento z_1z_2 e que passa por z_3 pela equação da reta perpendicular que definimos anteriormente. Logo, a equação da mediatriz é dada por:

$$z_3(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) + \bar{z}_3(z_2 - z_1) = 0$$

só que z_3 é o ponto médio, então podemos reescrever a equação da mediatriz como:

$$\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) + \left(\frac{\bar{z}_1 + \bar{z}_2}{2}\right)(z_2 - z_1) \leftrightarrow |z_2|^2 - |z_1|^2 .$$

3.11 Triângulos

Na geometria plana,um dos assuntos mais trabalhados no ensino básico é conceitos fundamentais sobre triângulos. Inicialmente,o conceito de triângulo afirma que dado três pontos não colineares A, B e C, podemos dizer que a união desses pontos formam três pontos forma os segmentos : AB, AC e BC , que recebe o nome de triângulo.

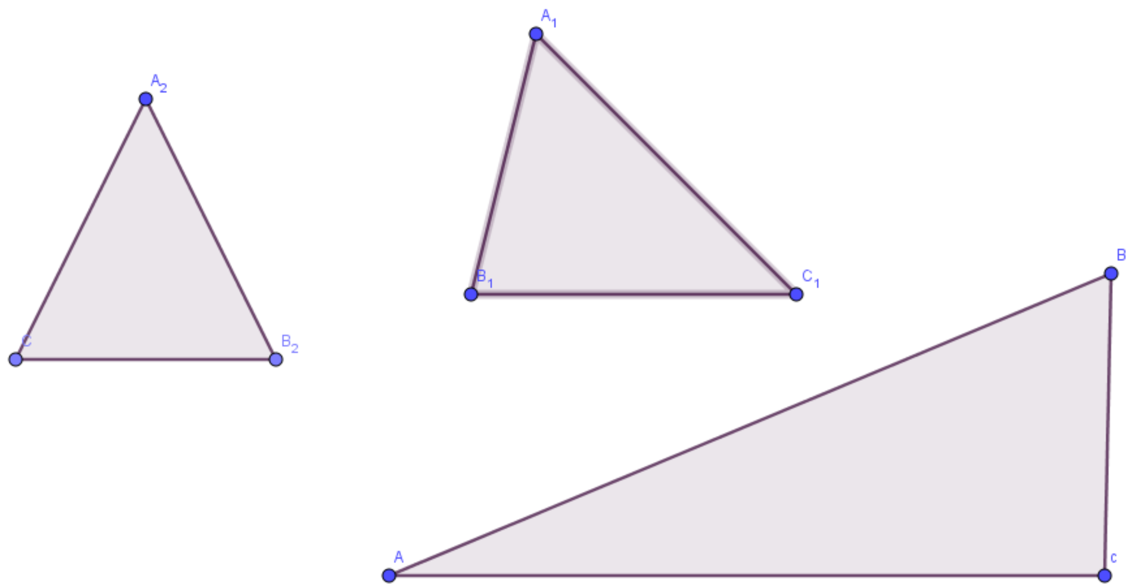

Figura 5: Exemplos de Triângulos

Antes de apresentarmos os semelhança de triângulos, triângulos equiláteros e pontos notáveis de um triângulo, devemos compreender as seguintes convenções: Seja $z_1, z_2, z_3, w_1, w_2, w_3$ números complexos qualquer, temos que:

• Dizemos que um triângulo é orientado(isto é, possui modulo , direção e sentido) , se a ordem dos vértices é especificada. A orientação pode ser positiva (sentido anti- horário) ou negativa (sentido horário).

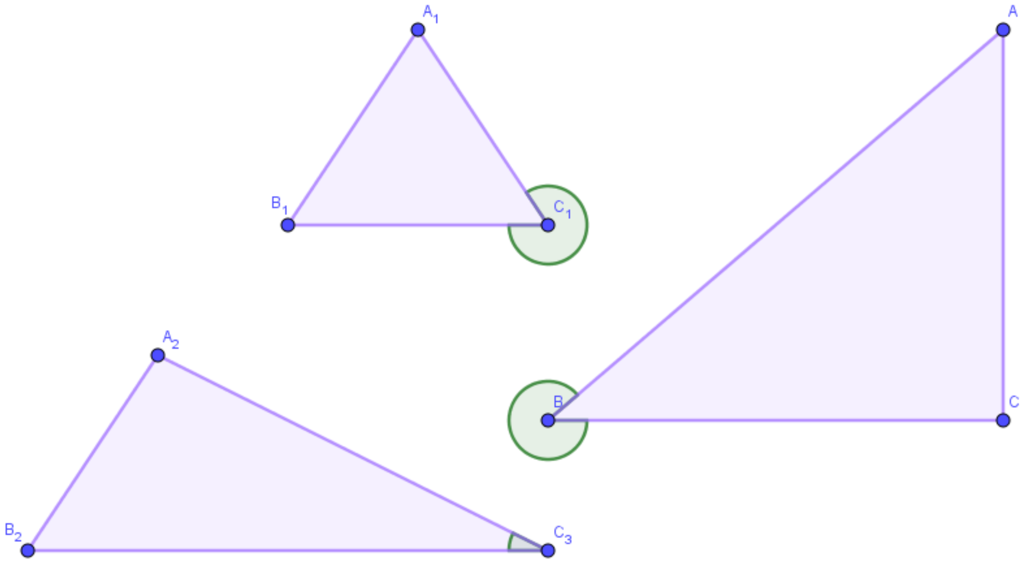

Figura 6: Exemplos de Triângulos Orientados

• Os $\triangle z_1z_2z_3$ e $\triangle w_1w_2w_3$ possuem mesma orientação se ambos são horários ou anti-horário.

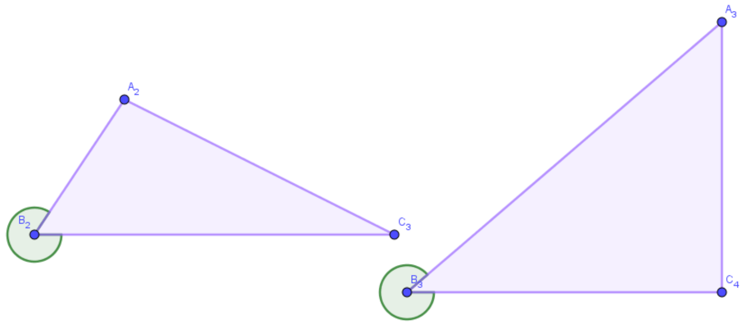

Figura 7: Exemplos de Triângulos Orientados Iguais

3.11.1 Triângulos Semelhantes

Considere os pontos $z_1, z_2, z_3, w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}$. Podemos dizer que o $\triangle z_1z_2z_3$ e $\triangle w_1w_2w_3$ são semelhantes se,somente se, o ângulo z_k for igual ao ângulo $w_k \forall k \in 1, 2, 3$.

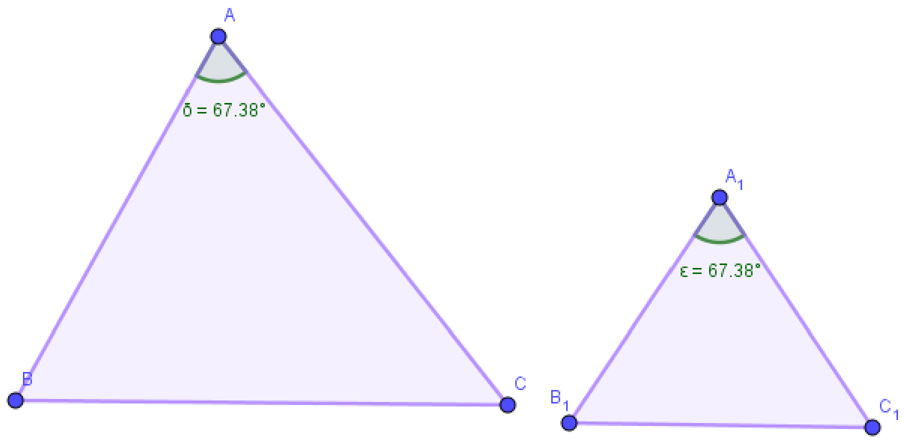

Figura 8: Ângulo $\widehat{BAC}$ e $\widehat{B_1A_1C_1}$ iguais semelhantes

Preposição 7: Os triângulos $\triangle z_1z_2z_3$ e $\triangle w_1w_2w_3$ são semelhantes, com mesma orientação se, e somente se,

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1}.$$

Prova: Se os $\triangle z_1z_2z_3 \sim \triangle w_1w_2w_3$ se, somente se,

$$\widehat{z_3z_1z_2} = \widehat{w_3w_1w_2} \leftrightarrow arg\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = arg\frac{w_3 - w_1}{w_2 - w_1} \leftrightarrow \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{w_3 - w_1}{w_2 - w_1}, \in \mathbb{R}$$

Além disso, se os triângulos são semelhantes, vão possuir a mesma equação da reta, isto é:

$$\begin{vmatrix} z_1 & w_1 & 1 \\ z_2 & w_2 & 1 \\ z_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Que pode ser escrita também como:

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1}$$

Preposição 8: Os triângulos $\triangle z_1z_2z_3$ e $\triangle w_1w_2w_3$ são semelhante com orientação oposta, que indicaremos por $\triangle z_1z_2z_3 \sim_{op} \triangle w_1w_2w_3$ se, e somente se,

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{\bar{w_2} - \bar{w_1}}{\bar{w_3} - \bar{w_1}}.$$

Prova:A reflexão em relação ao eico x, transforma os pontos w_1, w_2, w_3 no seu conjugado , que seria; $\bar{w_1}, \bar{w_2}, \bar{w_3}$. Além disso, por causa do conjugado as orientações o $\triangle \bar{w_1}\bar{w_2}\bar{w_2} \sim_{op} \triangle w_1w_2w_3$. Daí, podemos concluir que os $\triangle \bar{w_1}\bar{w_2}\bar{w_2} \sim \triangle z_1z_2z_3$ e possuem a mesma orientação.

3.11.2 Triângulo Equilátero

Preposição 9: Considerando um triângulo qualquer tal que os vértices sejam z_1, z_2 e z_3, será um triângulo equilátero se, e somente se, $\triangle z_1z_2z_3 \sim \triangle 1ww^2$. Isto é, $z_1 + wz_2 + w^2z_3 = 0$,onde w é uma das raízes complexas da unidade.

Prova: Se os $\triangle z_1z_2z_3 \sim \triangle 1ww^2$, serão somente triângulos equiláteros se o determinante for igual a zero, isto é:

$$\begin{vmatrix} z_1 & 1 & 1 \\ z_2 & w & 1 \\ z_3 & w^2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \leftrightarrow z_1(w - w^2) + z_2(w^2 - 1) + z_3(1 - w)$$

Então temos que w é uma das raízes da unidades $w^2 + w + 1 = 0$, então:

$$z_1(w - w^2) + z_2(w^2 - w^3) + z_3(w^3 - w) = 0$$

$$z_1 w(1 - w) + z_2 w^2(1 - w) + z_3 w(1 - w)(1 + w) = 0$$

$$z_1 + wz_2 + w^2 z_3 = 0.$$

3.11.3 Pontos Notáveis de um Triângulo

(a). Circuncentro

Preposição 10:As três mediatrizes de um triângulo qualquer se encontra em um único ponto. este ponto é chamado de circuncentro do triângulo.

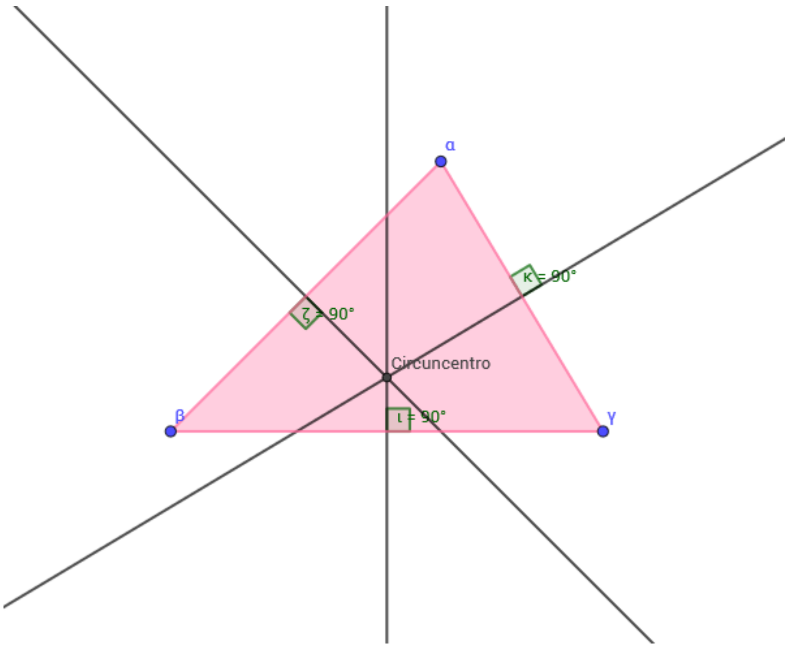

Figura 9: Circuncentro

Prova: Seja α, β e γ vértices do triângulo. Se calcularmos a mediatriz de cada lado, iremos encontrar:

$$\begin{cases} \alpha\beta = (\alpha-\beta)\bar{z} + (\bar{\alpha}-\bar{\beta})z = |\alpha|^2 - |\beta|^2 \\ \gamma\alpha = (\gamma-\alpha)\bar{z} + (\bar{\gamma}-\bar{\alpha})z = |\gamma|^2 - |\alpha|^2 \\ \beta\gamma = (\beta-\gamma)\bar{z} + (\bar{\beta}-\bar{\gamma})z = |\beta|^2 - |\gamma|^2 \end{cases}$$

Se somarmos duas primeiras equações do sistema acima, implicará na terceira equação. O mesmo acontece se somarmos duas equações qualquer do sistema ,resultará na equação que sobrar. Daí , concluímos que as três mediatrizes de um triângulo qualquer se encontra em um único ponto que é denominado circuncentro.

Para encontra o circuncentro, resolveremos da seguinte maneira.Primeiramente,isolando $\bar{z}$ da primeira equação do sistema, temos:

$$\bar{z} = \frac{|\alpha|^2 - |\beta|^2 - (\bar{\alpha}-\bar{\beta})}{\alpha-\beta}$$

Em segundo lugar, se substituirmos na segunda equação do sistema teremos:

$$(\bar{\gamma}-\bar{\alpha}) + \frac{|\alpha|^2 - |\beta|^2 - (\bar{\alpha}-\bar{\beta})}{\alpha-\beta}(\gamma-\alpha) = |\gamma|^2 - |\alpha|^2$$

$$(\bar{\gamma}-\bar{\alpha})(\alpha-\beta)z + (|\alpha|^2 - (|\beta|^2)(\gamma-\alpha) - (\bar{\alpha}-\bar{\beta})(\gamma-\alpha)z = (|\gamma|^2 - |\alpha|^2)(\alpha-\beta)$$

$$z[\bar{\alpha}(\beta-\gamma) + \bar{\beta}(\gamma-\alpha) + \bar{\gamma}(\alpha-\beta)] = |\alpha|^2(\beta-\gamma) + |\beta|^2(\gamma-\alpha) + |\gamma|^2(\alpha-\beta)$$

$$z = \frac{|\alpha|^2(\beta-\gamma) + |\beta|^2(\gamma-\alpha) + |\gamma|^2(\alpha-\beta)}{\bar{\alpha}(\beta-\gamma) + \bar{\beta}(\gamma-\alpha) + \bar{\gamma}(\alpha-\beta)]}$$

Daí, o circuncentro é dado como:

$$z = \frac{|\alpha|^2 (\beta - \gamma) + |\beta|^2 (\gamma - \alpha) + |\gamma|^2 (\alpha - \beta)}{\bar{\alpha}(\beta - \gamma) + \bar{\beta}(\gamma - \alpha) + \bar{\gamma}(\alpha - \beta)]}$$

(b). Ortocentro

Preposição 11:As três alturas de um triângulo qualquer se encontram em um único ponto. Esse ponto é chamado de ortocentro do triângulo.

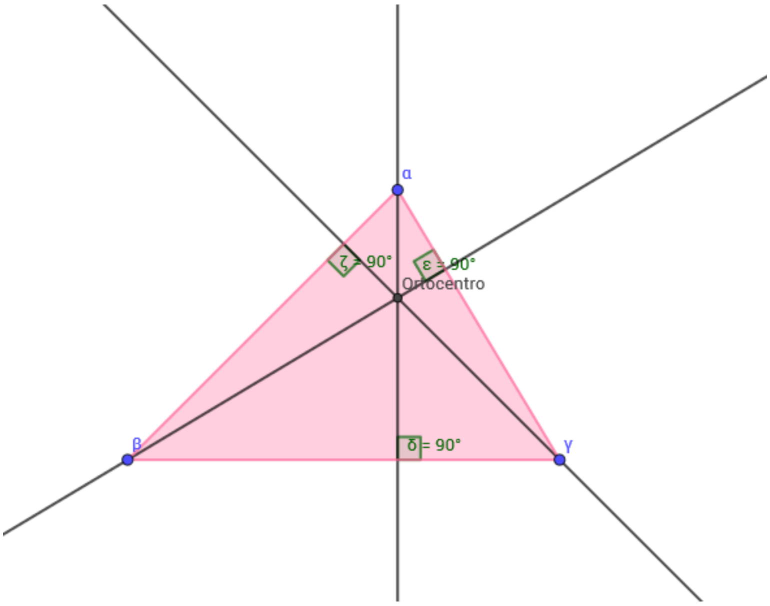

Figura 10: Ortocentro

Prova: Temos que os vértices do triângulo da figura acima , são denominados como: $\alpha, \beta e \gamma$. Primeiramente, sabemos que a altura pode ser expressa pela reta perpendicular que passa pelo vértice α, que é perpendicular ao lado $\beta\gamma$, que pode ser representada pela equação(equação da reta perpendicular):

$$(\beta-\gamma)\bar{z}+(\bar{\beta}-\bar{\gamma})z=\alpha(\bar{\beta}-\bar{\gamma})+\bar{\alpha}(\beta-\gamma).$$

Para encontrar as alturas relativas aos vértices β, γ, basta repete o processo acima. Daí, as equações referentes as alturas dos vértices serão:

$$(\beta-\gamma)\bar{z}+(\bar{\beta}-\bar{\gamma})z=\alpha(\bar{\beta}-\bar{\gamma})+\bar{\alpha}(\beta-\gamma) \tag{1}$$

$$(\alpha-\gamma)\bar{z}+(\bar{\alpha}-\bar{\gamma})z=\beta(\bar{\alpha}-\bar{\gamma})+\bar{\beta}(\alpha-\gamma) \tag{2}$$

$$(\alpha-\beta)\bar{z}+(\bar{\alpha}-\bar{\beta})z=\gamma(\bar{\alpha}-\bar{\beta})+\bar{\gamma}(\alpha-\beta) \tag{3}$$

Se somarmos duas primeiras equações acima, implicará na terceira equação. O mesmo acontece se somarmos duas equações qualquer acima ,isto é, as três equações são combinação linear das outras duas de tal maneira que a interseção de duas equações pertencerá a terceira equação. Daí , concluímos que as três alturas de um triângulo qualquer, se encontra em um único ponto que é denominado ortocentro.

Além disso, para encontrarmos a equação do ortocentro vamos utilizar um triângulo inscrito no círculo unitário. Com isso, temos que :

$$|\bar{\alpha}|=\left|\bar{\beta}\right|=|\bar{\gamma}|=1 \leftrightarrow |\bar{\alpha}|=\frac{1}{\alpha},\left|\bar{\beta}\right|=\frac{1}{\beta},|\bar{\gamma}|=\frac{1}{\gamma}$$

Se substituirmos as relações acima nas equações (2) e (3) , encontraremos em função de $\bar{z}$:

$$\bar{z}=\frac{1}{\alpha}-\frac{\alpha}{\beta\gamma}+\frac{z}{\beta\gamma} \tag{4}$$

$$\bar{z} = \frac{1}{\gamma} - \frac{\gamma}{\beta\alpha} + \frac{z}{\beta\alpha} \tag{5}$$

Se igualarmos as equações (4) e (5) , obteremos:

$$\frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha}{\beta\gamma} + \frac{z}{\beta\gamma} = \frac{1}{\gamma} - \frac{\gamma}{\beta\alpha} + \frac{z}{\beta\alpha}$$

$$\beta\gamma - \alpha^2 + z\alpha = \beta\alpha - \gamma^2 + z\gamma$$

$$z\alpha - z\gamma = \alpha^2 - \gamma^2 + \alpha\beta - \beta\gamma$$

$$(\alpha - \gamma)z = (\alpha + \gamma)(\alpha - \gamma) + \beta(\alpha - \gamma)$$

$$z = \alpha + \beta + \gamma \tag{6}$$

(c). Baricentro

Proposição 12: As três medianas de um triângulo qualquer se encontram em um único ponto. Esse ponto é chamada de baricentro.

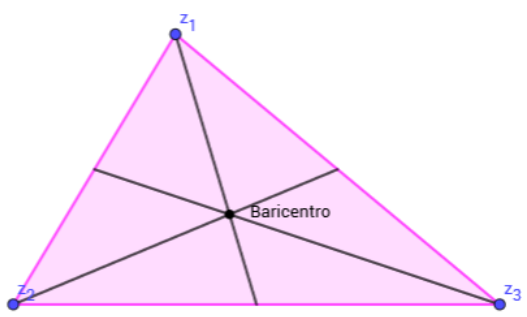

Figura 11: Baricentro

Prova: Considerando a equação da reta, temos que a mediana é a reta suporte que passa ao ponto médio do segmento oposto ao vértice. Com isto, considerando o lado $\beta\gamma$ e a equação da reta, podemos escrever a equação da mediana sendo:

$$\left(\alpha-\frac{\beta+\gamma}{2}\right)\bar{z}-\left(\bar{\alpha}-\frac{\bar{\beta}+\bar{\gamma}}{2}\right)z=\alpha\left(\frac{\bar{\beta}+\bar{\gamma}}{2}\right)-\bar{a}\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)$$

Na qual a equação da reta mediana pode ser escrita como:

$$(2\alpha-\beta-\gamma)\bar{z}-(2\bar{\alpha}-\bar{\beta}-\bar{\gamma})z=\alpha(\bar{\gamma}+\bar{\gamma})-\bar{\alpha}(\beta+\gamma) \tag{7}$$

De modo análogo , podemos obter as retas suportes das medianas dos outros lados do triângulo. Que serão expressa por:

$$(2\beta-\alpha-\gamma)\bar{z}-(2\bar{\beta}-\bar{\alpha}-\bar{\gamma})z=\beta(\bar{\alpha}+\bar{\gamma})-\bar{\beta}(\alpha+\gamma) \tag{8}$$

$$(2\gamma-\alpha-\beta)\bar{z}-(2\bar{\gamma}-\bar{\alpha}-\bar{\beta})z=\gamma(\bar{\alpha}+\bar{\beta})-\bar{\gamma}(\alpha+\beta) \tag{9}$$

Com isso podemos ver que as equações (1), (2) e (3) é combinação linear das outras duas,isto é, somando duas equações acima o resultado obtido será a equação restante.Com isso, as medianas se encontram em um único ponto.

Para encontrar o baricentro, temos que a reta suporte da mediana relativa ao lado $\beta\gamma$, pode ser dada como:

$$z=(1-t)\alpha+t\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)(0\leq t\leq 1).$$

Como t=$\frac{2}{3}$, temos que :

$$z=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} \tag{10}$$

que devido a simetria das equações,também se refere aos lados $\alpha\beta$ e $\alpha\gamma$

4 Teorema de Napoleão

Teorema 1: Sobre cada lado de um triângulo arbitrário , desenhe um triângulo equilátero(no exterior). Temos então que os baricentros desses três triângulos equiláteros são os vértices de um quarto triângulo equilátero.

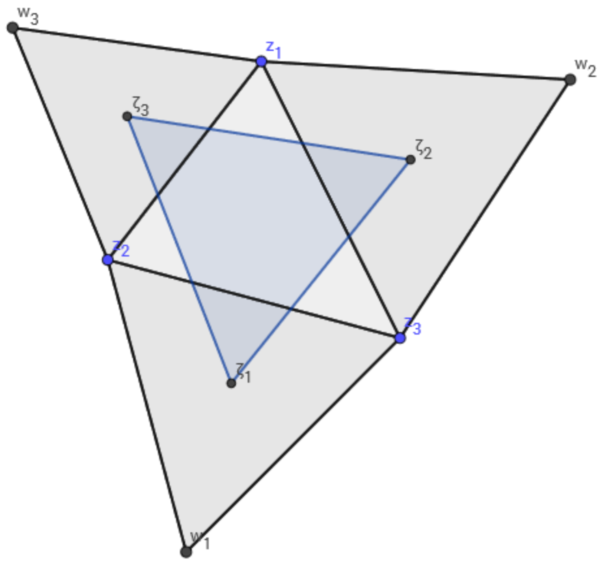

Figura 12: Napoleão

Prova: Inicialmente, vamos considerar nosso triângulo principal sendo $\triangle z_1z_2z_3$, e os triângulos construídos sobre os lados do $\triangle z_1z_2z_3$, iremos nomeá-los como: $\triangle w_1z_2z_3$, $\triangle z_3w_2z_1$ e $\triangle z_2z_1w_3$. Outro aspecto relevante é que os triângulos construídos deverão ter a mesma orientação que $\triangle 1ww^2$ (com $w^2 + w + 1 = 0$). Além disso, temos que os baricentros dos triângulos construídos são $\zeta_1.\zeta_2$ e ζ_3. E que pela equação dos triângulos equiláteros, temos que :

$$w_1 + wz_3 + w^2z_2 = 0$$

$$z_3 + wz_2 + w^2z_1 = 0$$

$$z_2 + wz_1 + w^2w_3 = 0$$

. E para os Provarmos que o $\triangle\zeta_1\zeta_2\zeta_3$, temos que calcular que $\zeta_1+w\zeta_3+w^2\zeta_3 =$

0 e que os baricentros são respectivamente:

$$\begin{cases} \zeta_1 = & \frac{1}{3}(w_1 + z_3 + z_2) \\ \zeta_2 = & \frac{w}{3}(z_3 + w_2 + z_1) \\ \zeta_3 = & \frac{w^2}{3}(z_2 + z_1 + w_3) \end{cases}$$

Substituindo essas relações em $\zeta_1 + w\zeta_3 + w^2\zeta_3 = 0$ temos:

$$\zeta_1 + w\zeta_3 + w^2\zeta_3 = 0$$

$$\frac{1}{3}(w_1 + z_3 + z_2) + \frac{w}{3}(z_3 + w_2 + z_1) + \frac{w^2}{3}(z_2 + z_1 + w_3) = 0$$

$$\frac{1}{3}[(w_1 + wz_3 + w^2 z_2) + (z_3 + w_2 + z_1) + (z_2 + z_1 + w_3)] = 0$$

$$\frac{1}{3}(0) = 0$$

$$0 = 0$$

Logo, o $\triangle\zeta_1\zeta_2\zeta_3$ é um triângulo equilátero.

5 Teorema do Círculo dos Nove Pontos

Teorema 2: O círculo que passa pelos pés das alturas de qualquer triângulo passa também pelos pontos médios dos lados, bem como pelos pontos médios dos segmentos que unem os vértices ao ortocentro desse triângulo.

Prova: Considerando um triângulo qualquer -$\triangle\alpha\beta\gamma$-, vamos supor sem perder a generalidade que seu círculo circunscrito é o círculo unitário com centro na origem no plano complexo. Com isso temos: $|\bar{\alpha}| = |\bar{\beta}| = |\bar{\gamma}| = 1$.

Primeiramente, vamos encontrar o centro do círculo que passa pelos pontos médios do $\triangle\alpha\beta\gamma$. O ortocentro σ do $\triangle\alpha\beta\gamma$ pode ser expresso por: $\sigma = \alpha+\beta+\gamma$ e $\dfrac{\sigma}{2} = \dfrac{1}{2}\alpha + \beta + \gamma$ é o ponto médio do segmento que une o circuncentro O com

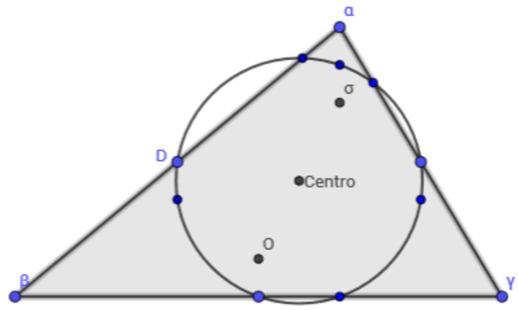

Figura 13: Círculo dos Nove Pontos

o σ. A distância de $\frac{\sigma}{2}$ para o ponto médio D do lado $\alpha\beta$ é:

$$\left|\frac{\beta+\alpha}{2}-\frac{\sigma}{2}\right|=\left|\frac{\gamma}{2}\right|=\frac{1}{2}$$

O mesmo equivale para os outros pontos médios,na qual a distância também será $\frac{1}{2}$. Logo, o centro do círculo é $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$. A distância de $\frac{\sigma}{2}$ para o ponto médio que une o ortocentro ao vértice α é:

$$\left|\frac{\alpha+\sigma}{2}-\frac{\sigma}{2}\right|=\left|\frac{\alpha}{2}\right|=\frac{1}{2}$$

O mesmo ocorre para os outro pontos médios, na qual a distância também será $\frac{1}{2}$. E para finalizar, precisamos encontrar as distância dos pés das alturas (λ do $\triangle\alpha\beta\gamma$).O pé λ da perpendicular do vértice α até o lado $\beta\gamma$ é dada pela intersecção das retas suporte do lado $\beta\gamma$ e da altura relativa ao vértice. As equações dessas retas, são:

$$(\beta-\gamma)\bar{z}-(\bar{\beta}-\bar{\gamma})z=\bar{\gamma}\beta-\gamma\bar{\beta}(\beta-\gamma)\bar{z}+(\bar{\beta}-\bar{\gamma})z=(\beta-\gamma)\bar{\alpha}+(\bar{\beta}-\bar{\gamma})\alpha \quad (11)$$

multiplicando a equação (11) por -1 e somando com a equação (12) , obtemos:

$2z(\bar{\beta}-\bar{\gamma})=\alpha(\bar{\beta}-\bar{\gamma})+\gamma\bar{\beta}-\bar{\gamma}\beta$

$$z = \frac{1}{2}\left[\alpha + \bar{\alpha}\left(\frac{\beta-\gamma}{\bar{\beta}-\bar{\gamma}}\right) + \frac{\gamma\bar{\beta}-\bar{\gamma}\beta}{\bar{\beta}-\bar{\gamma}}\right]$$
$$z = \frac{1}{2}\left[\alpha + \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\beta-\gamma}{\gamma-\beta}\right)\beta\gamma + \left(\frac{\gamma^2-\beta^2}{\beta\gamma}\right)\left(\frac{\beta\gamma}{\gamma-\beta}\right)\right]$$
$$z = \frac{1}{2}\left[\alpha+\beta+\gamma-\frac{\beta\gamma}{\alpha}\right]$$
$$z = \frac{1}{2}\left[\sigma-\frac{\beta\gamma}{\alpha}\right]$$
$$z = \lambda$$

Então, a distância procurada é equivalente a :

$$\left|\lambda - \frac{\sigma}{2}\right| = \left|\frac{\sigma}{2} - \frac{\beta\gamma}{2} - \frac{\sigma}{2}\right| = \left|\frac{\beta\gamma}{2}\right| = \frac{1}{2}.$$

Logo, a distância dos pés das alturas até $\frac{\sigma}{2}$ é dado por $\frac{1}{2}$.

Portanto, podemos concluir que os nove pontos citados no teorema estão a uma mesma distância do ponto $\frac{\sigma}{2}$.

6 Conclusão

Concluímos que a geometria de $\mathbb{C}$ fornece uma ferramenta poderosa na obtenção de resultados em geometria plana tornando-os mais simples e acessíveis.

O conjunto $\mathbb{C}$ é dotado de uma geometria e de diversas propriedades interessantes e úteis, sendo utilizado em diversas áreas da Matemática. Dentre as possíveis aplicaçações dos números complexos, além do que foi apresentado nesse texto, grande destaque é direcionado ao desenvolvimento da teoria de funções de variável complexa e a utilização desta teoria para a obtenção de Superfícies Mínimas em $\mathbb{R}^3$ via a Representação de Weierstrass.

7 Agradecimentos

A Deus, por sempre estar presente na minha vida, conquistas e estudo. Ao meu orientador, Gil Fidelix, por toda paciência, compreensão e por me proporcionar este tema no qual nos dedicamos para concretização do meu sonho - este trabalho. Ao tutor e membros do PETMAT pelo incentivo constante. À minha mãe e Eduardo por me motivarem e sempre me apoiarem nessa jornada. Aos meus amigos, principalmente Cyndi, Stefani , Joyce , Bárbara, Lu , Carol e Leo, pelo companheirismo, ajuda e momentos descontraídos, com muitas risadas.

Referências

[1] FEITOSA, Laércio Francisco. *Aplicações dos Números Complexos na Geometria Plana*. 2013. 74f. Dissertação(Mestrado em Matemática em Rede Nacional)- Universidade Federal da Paraíba.

[2] CANTONI, Ana Catarina Lima. *Números Complexos e Alguns Resultados Clássicos da Geometria Plana*. Monografia de especialização. Universidade Federal de Minas Gerias, 2008.