
Resolvendo problemas em Geometria Diferenciais com o uso do método das variações

Stefani Rose Teixeira

stefanirose1995@gmail.com

Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil

Gil F. de Souza

gilsouza@iceb.ufop.br

Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil

Resumo

Neste trabalho estudamos uma parte da vasta aplicação do Lema Fundamental do Cálculo das Variações. Tais aplicações são problemas de otimização na busca de máximos ou mínimos do Cálculo Diferencial para funcionais.

Palavras-chave

Multiplicadores de Lagrange, Problema Isoperimétrico, Superfícies Mínicas, Variações.

1 Introdução

O Cálculo das Variações nos fornece técnicas analíticas para obter soluções de problemas do seguinte tipo:

- O caminho mais curto entre dois pontos em uma superfície.
- A superfície que possui menor área superficial.
- a trajetória de uma partícula que, sujeita a um campo gravitacional constante, sem atrito e com velocidade inicial nula, se desloca entre dois pontos no menor intervalo de tempo.
- Obtenção de Soluções de equações diferenciais parciais que possuam uma estrutura apropriada.

Mesmo a Física Matemática atual se sustem em grande parte, via o Princípio do menor esforço. O cálculo das variações lida com o problema de encontrar extremos de "funcionais", o que é, de certo modo uma generalização do problema

de encontrar extremais de funções de várias variáveis do cálculo. Esta generalização é bem direta, desde que se tenha conhecimento de Cálculo Diferencial.

2 Lema fundamental do Cálculo de Variações

Sejam $u = (u_1, \dots, u_n)$ e $v = (v_1, \dots, v_n)$ de \mathbb{R}^n , o produto interno (ou escalar) desses vetores é dado por

$$\langle u, v \rangle = u \cdot v = u_1v_1 + \dots + u_nv_n.$$

Uma curva parametrizada em \mathbb{R}^n é uma aplicação $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t))$ em que t pertence a um intervalo. No caso em que α é de classe C^2 , o seu vetor tangente é dado por $\alpha'(t) = (\alpha'_1(t), \dots, \alpha'_n(t))$ e seu vetor derivada é $\alpha''(t) = (\alpha''_1(t), \dots, \alpha''_n(t))$.

Uma superfície parametrizada regular é uma aplicação $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, $(u, v) \in U$, definida em um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ tal que

$$X_u(u, v) \times X_v(u, v) \neq 0,$$

em que X_u e X_v são as derivadas parciais de X .

O Cálculo de Variações é uma espécie de generalização da teoria de Máximos e Mínimos do Cálculo Diferencial, porém neste caso trabalhamos com funcionais definidos em um espaço de funções ou curvas de nosso interesse.

O Cálculo das Variações trata principalmente da determinação de pontos (ou funções) críticos(as) e a obtenção de máximos ou mínimos de funcionais. O Resultado principal do Cálculo de Variações é o **Lema Fundamental do Cálculo de Variações** que é enunciado a seguir.

Lema 1 (O Lema Fundamental do Cálculo de Variações). *Se uma função contínua $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é tal que*

$$\int_0^1 \langle f(t), h(t) \rangle dt = 0,$$

para toda função $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^2 com $h(0) = h(1) = 0$, então $f \equiv 0$.

As funções $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $h(0) = h(1) = 0$ do Lema fornecem uma

“perturbação” da função f que queremos tratar, permitindo-nos encontrar mais facilmente funções críticas de um funcional.

Uma alteração (ou mesmo aplicação) do Lema Fundamental do Cálculo de Variações é uma versão dos Multiplicadores de Lagrange para o Cálculo Variacional e é utilizado para resolver problemas de maximização de funcionais restritos por alguma informação denominada *vínculo*. O método de Multiplicadores de Lagrange do Cálculo das Variações é a aplicação de do Lema 1 a funcionais do tipo

$$\tilde{S}[\alpha] = S[\alpha] - \lambda(\text{vínculo})$$

3 Aplicações

Nesta seção apresentaremos uma série de resultados que são aplicações do Lema 1 ou de sua forma alterada, o método dos multiplicadores de Lagrange.

3.1 Geodésicas no plano

Como primeiro exemplo, vamos à verificação de que a curva de menor comprimento (geodésica) unindo dois pontos no plano é, de fato, o segmento de reta com extremidades nos pontos avaliados. Porém, antes introduziremos um pouco de notação.

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n$ uma função diferenciável, $x \in U$ é um ponto crítico de f de $Df(x) = 0$, em que $Df(x)$ é a matriz jacobiana de f . Esta condição é equivalente a $Df(x)\varepsilon = 0$ para todos os vetores tangentes ε em x . Esta condição é equivalente a

$$\left. \frac{d}{ds} f(x + s\varepsilon) \right|_{s=0} = 0.$$

Proposição 1. *A curva de menor comprimento ligando dois pontos em \mathbb{R}^2 é um segmento de reta. A conclusão de que a curva α é, de fato, a solução vem do fato que o funcional avaliado é convexo e portanto a curva crítica encontrada é a que minimiza o funcional.*

Demonstração. Para melhor compreensão da proposição e do método analítico, observe a figura 1, ela contém diversas curvas interligando o ponto P ao ponto Q .

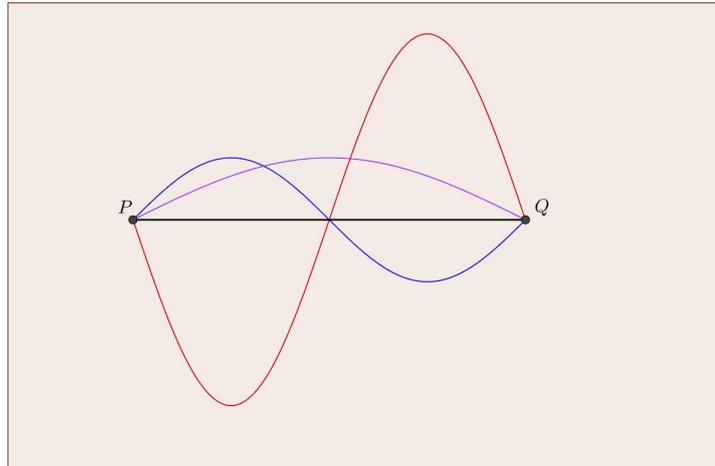


Figura 1: Menor caminho entre P e Q .

A intuição geométrica leva-nos a concluir que a curva de menor comprimento ligando P a Q é um segmento de reta. Para a comprovação desse fato, efetuaremos cálculos analíticos que nos conduzirão ao resultado.

Considere uma curva $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [0, 1]$, de classe C^2 , tal que $\alpha(0) = P$ e $\alpha(1) = Q$. O funcional comprimento de arco do caminho $\alpha(t)$ é :

$$S[\alpha] = \int_0^1 \|\alpha'(t)\| dt = \int_0^1 \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

Considerando uma aplicação ε tal que $\varepsilon(0) = \varepsilon(1) = 0$, a “perturbação” $\alpha(t) + s\varepsilon(t)$ é de extremidades fixas em P e Q e calculando a variação de $S[\alpha + \varepsilon]$ à procura de uma função crítica, teremos

$$\left. \frac{d}{ds} S[\alpha + s\varepsilon] \right|_{s=0} = \left(\left. \frac{d}{ds} \int_0^1 \|\alpha'(t) + s\varepsilon'(t)\| dt \right) \right|_{s=0} = 0, \quad \forall \varepsilon \in [0, 1] \tag{1}$$

Na equação (5), podemos derivar sob o sinal de integral pelo Teorema de Leibnitz para integrais, e o cálculo de

$$\left. \frac{d}{ds} S[\alpha + s\varepsilon] \right|_{s=0} = \left(\int_0^1 \frac{d}{ds} \|\alpha'(t) + s\varepsilon'(t)\| dt \right) \Big|_{s=0} = 0$$

que após simplificações, nos leva a

$$\int_0^1 \frac{\langle \alpha'(t) + s\varepsilon'(t), \varepsilon'(t) \rangle}{\|\alpha'(t) + s\varepsilon'(t)\|} dt = 0 \quad (2)$$

Realizando $s = 0$ na equação (2) :

$$\frac{d}{ds} S[\alpha + \varepsilon] = \int_0^1 \left\langle \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}, \varepsilon'(t) \right\rangle dt \quad (3)$$

Aplicando a integração por partes na integral da equação (3), e utilizando o fato de $\varepsilon(0) = \varepsilon(1) = 0$

$$\left. \frac{d}{ds} S[\alpha + s\varepsilon] \right|_{s=0} = - \int_0^1 \left\langle \varepsilon(t), \frac{d}{dt} \left(\frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} \right) \right\rangle dt = 0, \quad \forall \varepsilon(t) \in [0, 1] \quad (4)$$

Sendo (4) é válida para todo $\varepsilon(t)$ de classe C^2 , o que nos leva a $\frac{d}{dt} \left(\frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} \right) = \alpha''(t) = 0$.

Para que a $\alpha''(t)$ seja o vetor nulo, $\alpha'(t)$ deve ser uma constante vetorial e isto ocorre se, somente se $\alpha(t)$ for um segmento de reta.

□

3.2 Geodésicas na esfera

Proposição 2. *A curva de menor comprimento entre dois pontos distintos na superfície de uma esfera é um arco de um círculo máximo unindo estes dois pontos.*

Demonstração. Tome dois pontos distintos P e Q na superfície de uma esfera unitária S^2 em \mathbb{R}^3 e uma curva α de classe C^2 tal que $\alpha(0) = P$ e $\alpha(1) = Q$. Utilizando coordenadas esféricas, podemos escrever α como

$$\alpha(t) = (\cos \theta(t) \sin \phi(t), \sin \theta(t) \sin \phi(t), \cos \phi(t)).$$

Sendo a expressão do vetor tangente $\alpha'(t)$ dada por

$$(-\sin \theta(t) \sin \phi(t) + \cos \theta(t) \cos \phi(t), \cos \theta(t) \sin \phi(t) + \sin \theta(t) \cos \phi(t), -\sin \phi(t)) \phi'(t)$$

Após simplificações, a norma do vetor tangente é

$$\|\alpha'(t)\| = (\theta')^2 \sin^2 \phi(t) + (\phi')^2 (\cos^2 \phi(t) + \sin^2 \phi(t))$$

e portanto, o funcional comprimento de arco da curva será

$$S[\alpha] = \int_0^1 \sqrt{(\theta'(t))^2 \sin^2 \phi(t) + (\phi'(t))^2} dt. \quad (5)$$

Utilizando a mesma técnica da subseção anterior, podemos obter a o menor caminho entre P e Q . Além disso, podemos simplificar os cálculos com a substituição simples de θ por $\theta(\phi)$:

$$d\phi = \phi'(t) dt \quad (6)$$

$$\theta(t) = \theta(\phi(t))$$

Derivando em função de t obtemos:

$$\theta'(t) = \theta'(\phi(t))\phi'(t) \longleftrightarrow \phi'(t) = \frac{\theta'(t)}{\theta'(\phi(t))} \quad (7)$$

Substituindo o valor de $\phi'(t)$ obtido na equação (2) na equação (5):

$$\begin{aligned} S[\theta, \phi] &= \int_0^1 \left(\sqrt{(\theta'(t))^2 \sin^2 \phi(t) + \left(\frac{\theta'(t)}{\theta'(\phi(t))} \right)^2} \right) dt = \\ &= \int_0^1 \left(\sqrt{(\theta'(t))^2 \sin^2 \phi(t) + \frac{(\theta'(t))^2}{(\theta'(\phi(t)))^2}} \right) dt = \end{aligned}$$

Pela equação 2 utilizaremos a substituição simples.

$$S[\theta] = \int_{\phi_P}^{\phi_Q} \left(\sqrt{\sin^2 \phi (\theta'(\phi))^2 + 1} \right) d\phi$$

Aplicando uma “perturbação” em $\theta(\phi)$ com extremidades fixas nos pontos P e Q sendo esta curva $\theta(\phi) + s\bar{\theta}(\phi)$ que contém as propriedades de $\bar{\theta}(\phi_{(Q)}) = \bar{\theta}(\phi_{(P)}) = 0$ pertencente ao \mathbb{R}^3 , podemos afirmar que cada $\theta(\phi)$ corresponde a

um $\bar{\theta}(\phi)$, para cálculo do comprimento da distância entre os pontos P e Q as funções estão descritas na figura 2.

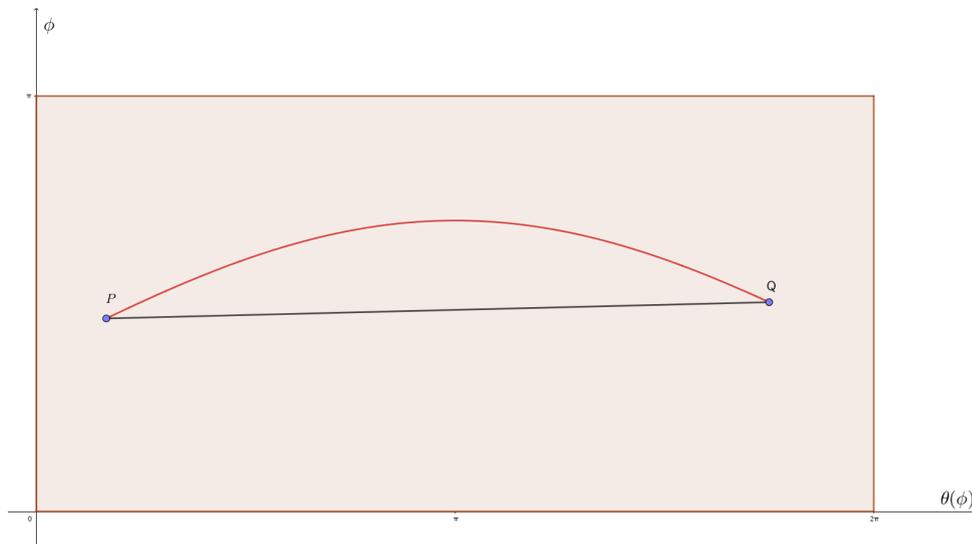


Figura 2: Representação da area superficial da esfera.

Estas equações nos levam a uma equação diferencial que nos conduzirão à obtenção da natureza da curva de menor comprimento que une P e Q.

$$\frac{d}{ds} S[\theta + s\bar{\theta}] \Big|_{s=0} = \left(\frac{d}{ds} \int_{\phi_P}^{\phi_Q} \left(\sqrt{\sin^2 \phi [(\theta(\phi) + s\bar{\theta}(\phi))']^2 + 1} \right) d\phi \right) \Big|_{s=0} =$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} S[\theta + s\bar{\theta}] \Big|_{s=0} &= \left(\int_{\phi_P}^{\phi_Q} \frac{d}{ds} \left(\sqrt{\sin^2 \phi [(\theta(\phi) + s\bar{\theta}(\phi))']^2 + 1} \right) d\phi \right) \Big|_{s=0} = \\ &= \left(\int_{\phi_P}^{\phi_Q} \left(\frac{2 \sin^2 \phi [\theta'(\phi) + s\bar{\theta}'(\phi)] \bar{\theta}'}{2 \sqrt{\sin^2 \phi [\theta'(\phi) + s\bar{\theta}'(\phi)]^2 + 1}} \right) d\phi \right) \Big|_{s=0} \end{aligned}$$

Realizando s=0 valido para $\forall \bar{\theta}$.

$$\frac{d}{ds} S[\theta + s\bar{\theta}] \Big|_{s=0} = \int_{\phi_P}^{\phi_Q} \left[\bar{\theta}' \left(\frac{\sin^2 \phi [\theta'(\phi)]}{\sqrt{\sin^2 \phi [\theta'(\phi)]^2 + 1}} \right) \right] d\phi$$

Utilizando o lema fundamental de variações a igualdade é válida se $\sin^2 \phi$ ou $\bar{\theta}'(\phi)$ são iguais a zero. A primeira opção, $\sin^2 \phi = 0$, resulta em $\phi(\theta) = 0$ ou $\phi(\theta) = \pi$, mostrando que ψ não depende de θ e é constante, portanto, obtemos um círculo máximo relativo a um dos meridianos de S^2 . No caso em que $\theta'(\phi) = 0$, teremos $\theta(\phi) = Const.$, com o ϕ variando e isso nos leva a um círculo máximo da esfera passando pelos pontos P e Q. Com isto, concluímos a Proposição. □

3.3 Obtendo a Superfície de Revolução de menor área superficial

Uma superfície de revolução é obtida como a rotação de uma curva denominada *geratriz*, em torno de um eixo de revolução que pertence ao mesmo plano da curva.

Por exemplo, um cone duplo é superfície de revolução gerada pela rotação da geratriz $x = y$ em torno do eixo y que é o eixo de revolução. A figura 3 é uma parte da superfície obtida pela rotação da curva em torno do eixo y .

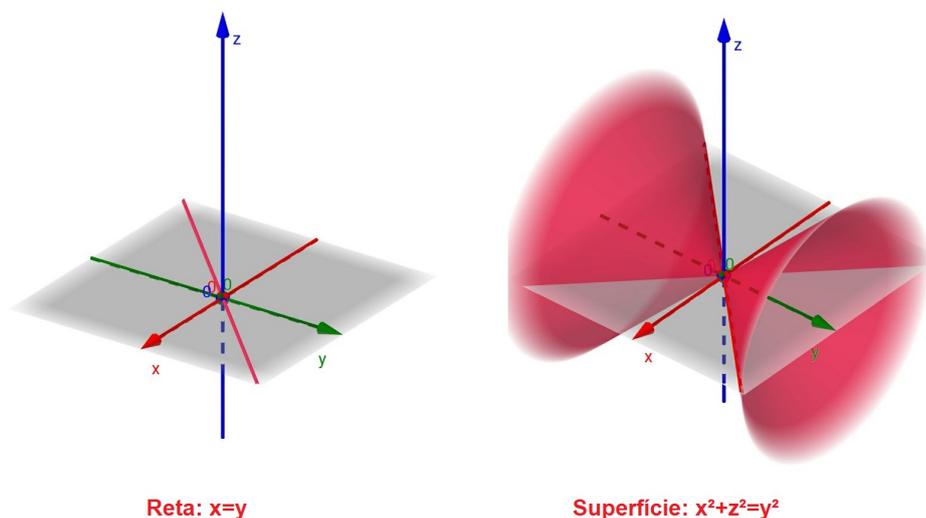


Figura 3: Superfície de Revolução

Pelas informações do triângulo da figura 5, podemos escrever como os pontos

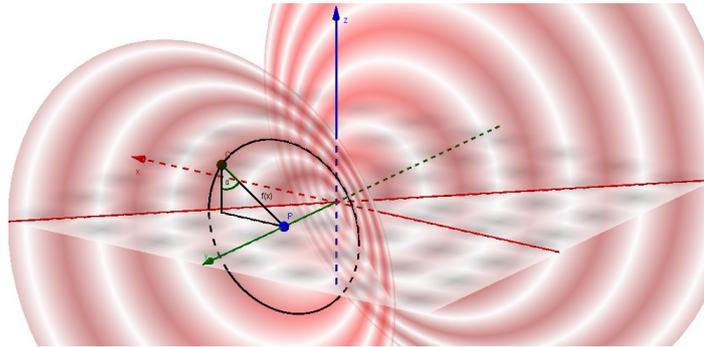


Figura 4: Relação

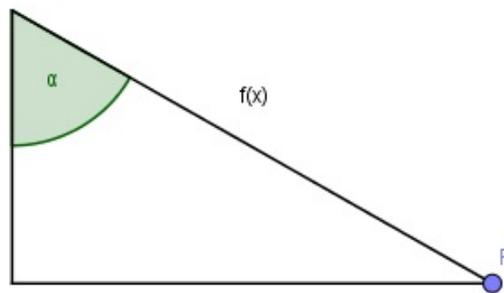


Figura 5: Relação da figura 6

da superfície de revolução como.

$$X(x, \theta) = (x, f(x)\cos(\theta), f(x)\sin(\theta)), \forall x \in [a, b] | f(x) \neq 0$$

Com a hipótese que $f(x) > 0$, para todo x , teremos que a superfície de revolução estudada é uma superfície parametrizada regular (i.e, $X_x \times X_\theta \neq 0$), podemos obter dois vetores distintos:

- $\frac{\partial}{\partial x}[X(x, \theta)] = X_x = (1, f'(x)\cos(\theta), f'(x)\sin(\theta))$;
- $\frac{\partial}{\partial \theta}[X(x, \theta)] = X_\theta = (0, -f(x)\sin(\theta), f(x)\cos(\theta))$

Cujo produto vetorial é

$$X(x) \times X(\theta) = (f(x)f'(x), -\cos(\theta)f(x), -\sin(\theta)f(x)) = (f(x)(f'(x)), -\cos(\theta), -\sin(\theta))$$

Dado que a área superficial de superfície S é dada pela fórmula

$$A(S) = \int_a^b \int_0^{2\pi} \|X_x \times X_\theta\| d\theta dx \tag{8}$$

Substituindo os valores de X_x e X_θ na equação 8:

$$\begin{aligned} A(S) &= \int_a^b \int_0^{2\pi} f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2} d\theta dx \\ &= \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2} \theta \Big|_0^{2\pi} dx \\ &= 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2} dx. \end{aligned}$$

Após esta breve introdução às superfícies de revolução, enunciamos a aplicação do Lema Fundamental do Cálculo de variações desta subseção.

Proposição 3. *A a geratriz da superfície de revolução menor área superficial é uma catenária.*

Demonstração. Considerando uma variação com extremidades fixas dada por uma função $g(x)$ tal que $g(a) = g(b) = 0$. Teremos

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} A(f + sg) \Big|_{s=0} &= \frac{d}{ds} \left(2\pi \int_a^b (f(x) + sg(x))\sqrt{1+(f'(x) + sg'(x))^2} dx \right) \Big|_{s=0} = \\ &= 2\pi \int_a^b \frac{d}{ds} \left((f(x) + sg(x))\sqrt{1+(f'(x) + sg'(x))^2} \right) \Big|_{s=0} = \end{aligned}$$

$$= 2\pi \int_a^b \left(\left(g(x) \sqrt{1 + (f'(x) + sg(x))^2} + \frac{(f(x) + sg(x))(f'(x) + sg(x))g'(x)}{(1 + (f'(x) + sg(x))^2)^{\frac{1}{2}}} \right) dx \right) \Big|_{s=0} =$$

Realizando s=0 obtemos:

$$= 2\pi \int_a^b \left(g(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} + \left(\frac{g'(x)f(x)f'(x)}{(1 + (f'(x))^2)^{\frac{1}{2}}} \right) \right) dx =$$

$$= 2\pi \left(\int_a^b (g(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}) dx + \int_a^b \left(\frac{g'(x)f(x)f'(x)}{(1 + (f'(x))^2)^{\frac{1}{2}}} \right) dx \right) = 0 \quad (9)$$

Utilizando a integração por partes na segunda integral da equação (9), válido pra todo g(x) no intervalo [a, b] :

$$\int_a^b \left(\frac{g'(x)f(x)f'(x)}{(1 + (f'(x))^2)^{\frac{1}{2}}} \right) dx =$$

$$\left[\frac{g(x)f(x)f'(x)}{(1 + (f'(x))^2)^{\frac{1}{2}}} \right] \Big|_a^b - \int_a^b \left(g(x) \frac{(f(x)f''(x) + (f'(x))^2 + (f'(x))^4)}{(1 + (f'(x))^2)^{\frac{3}{2}}} \right) dx =$$

$$- \int_a^b \left(g(x) \frac{(f(x)f''(x) + (f'(x))^2 + (f'(x))^4)}{(1 + (f'(x))^2)^{\frac{3}{2}}} \right) dx. \quad (10)$$

Substituindo a equação (10) na equação (9):

$$= 2\pi \left(\int_a^b (g(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}) dx - \int_a^b \left(g(x) \frac{(f(x)f''(x) + (f'(x))^2 + (f'(x))^4)}{(1 + (f'(x))^2)^{\frac{3}{2}}} \right) dx \right) =$$

$$= 2\pi \left(\int_a^b g(x) \left(\sqrt{1 + (f'(x))^2} - \frac{(f(x)f''(x) + (f'(x))^2 + (f'(x))^4)}{(1 + (f'(x))^2)^{\frac{3}{2}}} \right) dx \right) = 0.$$

Pelo lema fundamental do cálculo de variações a igualdade é válida quando:

$$(1 + (f'(x))^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{(f(x)f''(x) + (f'(x))^2 + (f'(x))^4)}{(1 + (f'(x))^2)^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

que pode ser manipulada como segue

$$(1 + (f'(x))^2)^{\frac{1}{2}}(1 + (f'(x))^2)^{\frac{3}{2}} - (f(x)f''(x) + (f'(x))^2 + (f'(x))^4) = 0$$

$$(1 + (f'(x))^2)^2 - (f(x)f''(x) + (f'(x))^2 + (f'(x))^4) = 0$$

$$1 + 2(f'(x))^2 + (f'(x))^4 - f(x)f''(x) - (f'(x))^2 - (f'(x))^4 = 0$$

$$1 + (f'(x))^2 - f(x)f''(x) = 0$$

$$1 + (f'(x))^2 - f(x)f''(x) = 0$$

Obtemos a equação diferencial da superfície de revolução de menor área superficial que é:

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{f(x)}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}} \right] = 0 \tag{11}$$

Integrando a equação (11):

$$\frac{f(x)}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}} = C$$

$$\sqrt{1 + (f'(x))^2} = \frac{f(x)}{C}$$

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{1 + (f'(x))^2}\right)^2 &= \left(\frac{f(x)}{C}\right)^2 \\ 1 + (f'(x))^2 &= \left(\frac{f(x)}{C}\right)^2 \\ (f'(x))^2 &= \left(\frac{f(x)}{C}\right)^2 - 1 \\ f'(x) &= \sqrt{\left(\frac{f(x)}{C}\right)^2 - 1} \\ \frac{f'(x)}{\sqrt{\left(\frac{f(x)}{C}\right)^2 - 1}} &= 1 \end{aligned} \tag{12}$$

Integrando a equação (12) obtemos:

$$\int \left(\frac{f'(x)}{\sqrt{\left(\frac{f(x)}{C}\right)^2 - 1}} \right) dx = \int 1 dx \tag{13}$$

Utilizando substituição simples na equação (13): $u = \frac{f(x)}{C}$, $C du = f'(x) dx$.

$$C \int \left(\frac{1}{\sqrt{(u)^2 - 1}} \right) du = \int 1 dx \tag{14}$$

Realizando a substituição trigonométrica na equação (14): $u = \cosh(t)$, $du = \sinh(t) dt$.

$$C \int \left(\frac{\sinh(t)}{\sqrt{(\cosh(t))^2 - 1}} \right) dt = x + D \tag{15}$$

Aplicando a identidade trigonométrica hiperbólica $\sinh^2(t) = \cosh^2(t) - 1$ na equação (15):

$$C \int \left(\frac{\sinh(t)}{\sqrt{\sinh^2(t)}} \right) dt = x + D$$

$$C \int \left(\frac{\sinh(t)}{|\sinh(t)|} \right) dt = x + D$$

$$\pm C \int 1 dt = x + D \leftrightarrow \pm Ct + E = x + D \leftrightarrow t = \frac{x + D - E}{\pm C} \leftrightarrow t = \pm \frac{x}{C} \pm \frac{D - E}{C}$$

$$t = \pm \frac{x}{C} \pm K$$

Substituindo o valor de t obtido em $u = \cosh(t)$ da equação (15) e $u = \frac{f(x)}{C}$ da equação (14) :

$$u = \cosh(t) \leftrightarrow \frac{f(x)}{C} = \cosh \left(\pm \frac{x}{C} \pm K \right)$$

Para a igualdade da equação (9) seja verdadeira, a função que representa a distância do eixo de revolução e o ponto contido na superfície do objeto é $f(x) = C \cosh \left(\pm \frac{x}{C} \pm K \right)$, ou seja uma catenária. □

3.4 A Desigualdade Isoperimétrica

Há a lenda da Rainha Dido de Cartago, que teve que fugir com seus seguidores da cidade Tiro onde vivia, a vida de todos estavam ameaçadas por disputas de poder. Após viajar durante muito tempo, chegou ao norte do continente africano e pediu à população local um assentamento para a construção de um vilarejo. Eles a impuseram que ficasse com a área que pudesse ser cercada pela pele de um boi. O problema que envolvia Dido era encontrar o contorno do assentamento de tal maneira que área delimitada fosse máxima. Inteligentemente ela cortou a pele do boi em tiras muito finas formando uma corda e manuseou-a até formar um semicírculo perpendicular ao mar Mediterrâneo. A rainha resolveu o que hoje chamamos de *Problema Isoperimétrico* relativo. Essa é a lendária história da fundação de Cartago contada por Virgílio (70 a.C.-19 a.C.) no livro Eneida.

A seguir, o enunciado do resultado desta subseção.

Proposição 4. *A curva α fechada e simples (sem auto-interseção) no plano, de comprimento dado ℓ , que delimita maior área é o círculo de raio $\frac{\ell}{2\pi}$.*

Demonstração. Utilizaremos o método dos multiplicadores de Lagrange para solucionar este problema. Sem perda de generalidade, suporemos que a curva α está parametrizada pelo comprimento de arco, ou seja, adicionaremos a hipótese que $\|\alpha'\| = \sqrt{(x')^2 + (y')^2} = 1$. Segue do Teorema de Green que a área delimitada por α é $\int_0^\ell \frac{1}{2}(xy' - yx') dt$, queremos maximizar este funcional restrito ao vínculo $\int_0^\ell \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt = \ell$, ou seja, pelo método dos multiplicadores de Lagrange do Cálculo Variacional devemos trabalhar com o funcional

$$S[\alpha] = \int_0^\ell \left(\frac{1}{2}(xy' - yx') - \lambda \sqrt{(x')^2 + (y')^2} \right) dt, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Realizando variação da curva α que contém comprimento l fixo, para uma curva $\alpha + s\epsilon$ que mantém o mesmo perímetro l de α , sendo que $\epsilon_1(0) = \epsilon_2(0) = \epsilon_1(l) = \epsilon_2(l) = 0$, teremos

$$\left. \frac{d}{ds} S[\alpha + s\epsilon] \right|_{s=0} = 0$$

ou

$$\left. \frac{d}{ds} S[\alpha + s\epsilon] \right|_{s=0} =$$

$$= \left. \frac{d}{ds} \left(\int_0^\ell \left[\frac{1}{2} ((x + s\epsilon_1)(y + s\epsilon_2)' - (y + s\epsilon_2)(x + s\epsilon_1)') - \lambda \|\alpha' + s\epsilon'\| \right] dt \right) \right|_{s=0} =$$

$$= \left(\int_0^\ell \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{2} ((x + s\epsilon_1)(y + s\epsilon_2)' - (y + s\epsilon_2)(x + s\epsilon_1)') - \lambda \|\alpha' + s\epsilon'\| \right] dt \right) \Big|_{s=0} =$$

$$= \left(\frac{1}{2} \int_0^\ell [(\epsilon_1)(y + s\epsilon_2)' + (x + s\epsilon_1)(\epsilon_2)' - (\epsilon_2)(x + s\epsilon_1)' - (y + s\epsilon_2)(\epsilon_1)'] dt \right) \Big|_{s=0} - \left(\lambda \int \frac{\epsilon_1'(x + s\epsilon_1)' + \epsilon_2'(y + s\epsilon_2)'}{\sqrt{(x + s\epsilon_1)'^2 + [(y + s\epsilon_2)']^2}} dt \right) \Big|_{s=0} =$$

Realizando s=0.

$$\int_0^\ell \frac{1}{2} [y'\epsilon_1 + x(\epsilon_2)' - x'\epsilon_2 - y(\epsilon_1)'] - \lambda \frac{\epsilon_1'x' + \epsilon_2'y'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} dt \quad (16)$$

Dividiremos a integral da equação (16) em 3 diferentes, para obter uma relação entre os elementos contidos dentro de cada integral. A segunda e na terceira integral utilizaremos o método de integração por partes para obter o ϵ_1 e ϵ_2 pois sabemos o valor que eles assumem nas extremidades. Também utilizaremos o fato de α ter parametrização por comprimento de arco que $\|\alpha\| = \sqrt{(x')^2 + (y')^2} = 1$.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^\ell y'\epsilon_1 - x'\epsilon_2 dt + \frac{1}{2} \int_0^\ell x(\epsilon_2)' - y(\epsilon_1)' dt - \lambda \int_0^\ell (\epsilon_1)'x' + (\epsilon_2)'y' dt = \\ & = \frac{1}{2} \int_0^\ell \langle (y', -x'), (\epsilon_1, \epsilon_2) \rangle dt + \frac{1}{2} \int_0^\ell \langle (y', -x'), (\epsilon_1, \epsilon_2) \rangle dt + \lambda \int_0^\ell \langle (x'', y''), (\epsilon_1, \epsilon_2) \rangle dt \end{aligned}$$

Somando as integrais.

$$\begin{aligned} & = \int_0^\ell \frac{1}{2} \langle (y', -x'), (\epsilon_1, \epsilon_2) \rangle + \frac{1}{2} \langle (y', -x'), (\epsilon_1, \epsilon_2) \rangle + \lambda \langle (x'', y''), (\epsilon_1, \epsilon_2) \rangle dt = \\ & = \int_0^\ell \langle (y', -x'), (\epsilon_1, \epsilon_2) \rangle + \lambda \langle (x'', y''), (\epsilon_1, \epsilon_2) \rangle dt = \end{aligned}$$

$$= \int_0^{\ell} \langle (y' + \lambda x'', -x' + \lambda y''), (\epsilon_1, \epsilon_2) \rangle dt = 0, \quad \forall \epsilon_1, \epsilon_2 \in [0, \ell]$$

Tal igualdade só é possível se $(y' + \lambda x'', -x' + \lambda y'') = 0$, ou

$$\begin{aligned} y' + \lambda x'' &= 0 \\ -x' + \lambda y'' &= 0 \end{aligned}$$

Utilizando $u = x'$ e $v = y'$.

- 1) $v + \lambda u' = 0$
- 2) $-u + \lambda v' = 0 \Leftrightarrow u = \lambda v'$

Substituindo $u = \lambda v'$ na primeira expressão e obtemos $v + \lambda^2 v'' = 0$, cuja solução pode ser obtida pelo método que utilizaremos abaixo.

Suponhamos que a solução seja do tipo $v = e^{rt}$ e substituamos na última equação.

$$\begin{aligned} v + \lambda^2 v'' &= 0 \Leftrightarrow e^{rt} + \lambda^2 (r^2 e^{rt}) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow e^{rt} (1 + \lambda^2 r^2) &= 0 \Leftrightarrow (1 + \lambda^2 r^2) = 0 \Leftrightarrow r^2 = \frac{-1}{\lambda^2} \Leftrightarrow r = \sqrt{\frac{-1}{\lambda^2}} \Leftrightarrow r = \pm \frac{i}{\lambda} \end{aligned}$$

Os valores de λ nos levam aos seguintes casos

- i) $r = \frac{i}{\lambda}$
 $\vec{v}_1 = e^{\left(\frac{it}{\lambda}\right)} = \cos\left(\frac{t}{\lambda}\right) + i \sin\left(\frac{t}{\lambda}\right)$
- ii) $r = -\frac{i}{\lambda}$
 $\vec{v}_2 = e^{\left(-\frac{it}{\lambda}\right)} = \cos\left(\frac{t}{\lambda}\right) - i \sin\left(\frac{t}{\lambda}\right)$

Observado que todas as soluções da equação diferencial acima são escritas como combinação linear de \vec{v}_1 e \vec{v}_2 , teremos

$$\vec{v} = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 \tag{17}$$

Se realizarmos $\frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2}$ e $\frac{\vec{v}_1 - \vec{v}_2}{2i}$ obtemos respectivamente $\vec{v}_1 = \cos\left(\frac{t}{\lambda}\right)$ e $\vec{v}_2 = \sin\left(\frac{t}{\lambda}\right)$ que são duas soluções reais da equação diferencial. Substituindo \vec{v}_1 e \vec{v}_2 na equação (17), teremos

$$v = C_1 \cos\left(\frac{t}{\lambda}\right) + C_2 \sin\left(\frac{t}{\lambda}\right)$$

Como $v = y'$, integrando v obtemos y :

$$\int y' dt = \int C_1 \cos\left(\frac{t}{\lambda}\right) + C_2 \sin\left(\frac{t}{\lambda}\right) dt$$

$$y = \lambda C_1 \sin\left(\frac{t}{\lambda}\right) - \lambda C_2 \cos\left(\frac{t}{\lambda}\right) + C_0 \quad (18)$$

Derivando $v = y'$ para obter y'' para u e x em 1 e 2.

$$y'' = -\frac{1}{\lambda} C_1 \sin\left(\frac{t}{\lambda}\right) + \frac{1}{\lambda} C_2 \cos\left(\frac{t}{\lambda}\right)$$

Substituindo em 2:

$$-x' + \lambda \left(\frac{-C_1}{\lambda} \sin\left(\frac{t}{\lambda}\right) + \frac{C_2}{\lambda} \cos\left(\frac{t}{\lambda}\right) \right) = 0$$

$$x' = -C_1 \sin\left(\frac{t}{\lambda}\right) + C_2 \cos\left(\frac{t}{\lambda}\right) \quad (19)$$

Integrando (19) em ambos os lados da igualdade para obter o valor de x .

$$\int x' dt = \int -C_1 \sin\left(\frac{t}{\lambda}\right) + C_2 \cos\left(\frac{t}{\lambda}\right) dt$$

$$x = \lambda C_1 \cos\left(\frac{t}{\lambda}\right) + \lambda C_2 \sin\left(\frac{t}{\lambda}\right) + C_3 \quad (20)$$

Após as contas realizadas obtemos y na equação (18) e x na equação (20). As constantes C_3 e C_0 só translada o gráfico com isso podemos ignorá-las para os passos seguintes.

- x :

$$\begin{aligned}
x &= \lambda C_1 \cos\left(\frac{t}{\lambda}\right) + \lambda C_2 \sin\left(\frac{t}{\lambda}\right) = \\
&= \sqrt{(\lambda C_1)^2 + (\lambda C_2)^2} \left[\frac{\lambda C_1}{\sqrt{(\lambda C_1)^2 + (\lambda C_2)^2}} \cos\left(\frac{t}{\lambda}\right) + \frac{\lambda C_2}{\sqrt{(\lambda C_1)^2 + (\lambda C_2)^2}} \sin\left(\frac{t}{\lambda}\right) \right] = \\
&= \sqrt{(\lambda C_1)^2 + (\lambda C_2)^2} \left[\sin(\delta) \cos\left(\frac{t}{\lambda}\right) + \cos(\delta) \sin\left(\frac{t}{\lambda}\right) \right] = \\
x &= \sqrt{(\lambda C_1)^2 + (\lambda C_2)^2} \sin\left(\delta + \frac{t}{\lambda}\right)
\end{aligned}$$

• y:

$$\begin{aligned}
y &= \lambda C_1 \sin\left(\frac{t}{\lambda}\right) - \lambda C_2 \cos\left(\frac{t}{\lambda}\right) = \\
&= \sqrt{(\lambda C_1)^2 + (\lambda C_2)^2} \left[\frac{\lambda C_1}{\sqrt{(\lambda C_1)^2 + (\lambda C_2)^2}} \sin\left(\frac{t}{\lambda}\right) - \frac{\lambda C_2}{\sqrt{(\lambda C_1)^2 + (\lambda C_2)^2}} \cos\left(\frac{t}{\lambda}\right) \right] = \\
&= \sqrt{(\lambda C_1)^2 + (\lambda C_2)^2} \left[\sin(\delta) \sin\left(\frac{t}{\lambda}\right) - \cos(\delta) \cos\left(\frac{t}{\lambda}\right) \right] = \\
y &= \sqrt{(\lambda C_1)^2 + (\lambda C_2)^2} \cos\left(\delta + \frac{t}{\lambda}\right)
\end{aligned}$$

Como

$$x = \sqrt{(\lambda C_1)^2 + (\lambda C_2)^2} \sin\left(\delta + \frac{t}{\lambda}\right) \text{ e } y = \sqrt{(\lambda C_1)^2 + (\lambda C_2)^2} \cos\left(\delta + \frac{t}{\lambda}\right),$$

segue que o raio do círculo é $\sqrt{(\lambda C_1)^2 + (\lambda C_2)^2}$, dado que o mesmo possui

comprimento igual a ℓ e o perímetro de um círculo é dado por $P = 2\pi r$ obtemos

$$2\pi\sqrt{(\lambda C_1)^2 + (\lambda C_2)^2} = \ell \longleftrightarrow \sqrt{(\lambda C_1)^2 + (\lambda C_2)^2} = \frac{\ell}{2\pi}.$$

Substituindo o resultado em x e y , obtemos

$$x = \sqrt{(\lambda C_1)^2 + (\lambda C_2)^2} \sin\left(\delta + \frac{t}{\lambda}\right) = \frac{\ell}{2\pi} \sin\left(\delta + \frac{t}{\lambda}\right) \quad (21)$$

$$y = \sqrt{(\lambda C_1)^2 + (\lambda C_2)^2} \cos\left(\delta + \frac{t}{\lambda}\right) = \frac{\ell}{2\pi} \cos\left(\delta + \frac{t}{\lambda}\right) \quad (22)$$

Como a curva é tal que $\|\alpha'\| = 1$.

$$\begin{aligned} \|\alpha\| &= \sqrt{(x')^2 + (y')^2} = \sqrt{\left[\left(\frac{\ell}{2\pi} \sin\left(\delta + \frac{t}{\lambda}\right)\right)'\right]^2 + \left[\left(\frac{\ell}{2\pi} \cos\left(\delta + \frac{t}{\lambda}\right)\right)'\right]^2} = \\ &= \sqrt{(x')^2 + (y')^2} = \sqrt{\left(\frac{\ell}{2\pi\lambda} \cos\left(\delta + \frac{t}{\lambda}\right)\right)^2 + \left(\frac{-\ell}{2\pi\lambda} \sin\left(\delta + \frac{t}{\lambda}\right)\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{\ell^2}{(2\pi\lambda)^2}\right) \left(\cos^2\left(\delta + \frac{t}{\lambda}\right) + \sin^2\left(\delta + \frac{t}{\lambda}\right)\right)} = \sqrt{\left(\frac{\ell^2}{(2\pi\lambda)^2}\right)} = \\ &= \frac{\ell}{2\pi|\lambda|} = 1 \longleftrightarrow |\lambda| = 2\pi\ell \longleftrightarrow \lambda = 2\pi\ell \end{aligned}$$

Substituindo o valor de λ na equação (21) e (22).

$$x = \frac{\ell}{2\pi} \sin\left(\delta + \frac{t}{\lambda}\right) = \frac{\ell}{2\pi} \sin\left(\delta + \frac{t}{2\pi\ell}\right)$$

$$y = \frac{\ell}{2\pi} \cos\left(\delta + \frac{t}{\lambda}\right) = \frac{\ell}{2\pi} \cos\left(\delta + \frac{t}{2\pi\ell}\right)$$

A curva α é caracterizada como

$$\alpha(t) = \left(\frac{\ell}{2\pi} \sin \left(\delta + \frac{t}{2\pi\ell} \right), \frac{\ell}{2\pi} \cos \left(\delta + \frac{t}{2\pi\ell} \right) \right),$$

concluindo a demonstração. □

4 Conclusão

Nesse trabalho, apresentamos aplicações do Cálculo das Variações a alguns problemas em Geometria Diferencial. Outras aplicações possíveis, dentro da Geometria Diferencial, é a obtenção de superfícies de revolução vinculadas a um volume fixado, cujo desenvolvimento leva-nos a obter as Superfícies de Delaunay que aparecem no estudo das Superfícies de Curvatura Média Constante que são amplamente estudadas na literatura. O Cálculo das Variações é usado ostensivamente em diversas áreas da Matemática e uma área em que é amplamente utilizada é o de Equações Diferenciais Parciais em que funcionais são associados a equações que possuam uma “estrutura variacional” e cujas soluções são funções críticas de tais funcionais.

Dadas as inúmeras aplicações do Cálculo das variações, concluímos que o estudo do Cálculo das Variações é de grande importância em diversas áreas, sendo o seu estudo justificado e de extremo interesse aos envolvidos no projeto.

5 Agradecimentos

Agradeço a todos que ajudaram para que este trabalho de iniciação científica se tornasse realidade, principalmente ao meu orientador Gil Fidelix de Souza, pelo suporte, orientação, confiança e apoio na elaboração deste trabalho. Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pela oportunidade de desenvolver este tema como bolsista.

Às pessoas que sempre estiveram ao meu lado; minha mãe Rosilene, meu pai Luiz, meu irmão Luigi e aos meus amigos Ana, Bárbara, Isabela, Mônica e Pedro do #vai time.

Referências

- [1] C. Delaunay; *Sur la Surface de Revolution dont la Courbure Moyenne est Constante*, Journal de Mathematiques Pures e Appliquées, (1841), 309-320,

Paris.

- [2] M. P. do Carmo, *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. Sociedade Brasileira de Matemática, 3ª edição, Coleção Textos Universitários.
- [3] J. Eells, *The Surfaces of Delaunay*. The Math. Int. vol. 9, n° 1, Springer-Verlag New York, (1987), 53-57.
- [4] J. Figueroa-O’Farril, *Brief notes on the Calculus of Variations*. Disponível online em <http://www.maths.ed.ac.uk/~jmf/Teaching/Lectures/CoV.pdf>. Acesso em 10/05/2016.
- [5] E. L. Lima; *Álgebra Linear, terceira edição*. SBM, Coleção Matemática Universitária, (1998).
- [6] E. L. Lima, *Curso de Análise, Volume 2, quinta edição*. SBM, Projeto Euclides, 1999.
- [7] J. Oprea; *Differential Geometry and its Applications*. Association of America, 2nd edition, 2007.
- [8] J. Stewart; *Cálculo, Volumes 1 e 2*. Ed. Cengage Learning, 7ª edição.
- [9] K. Tenenblat; *Introdução à Geometria Diferencial*. Ed. Edgard Blücher, 2ª edição.