Sobre a Reta de Euler

Bárbara C. Toledo limabarbarac@gmail.com
Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil

Thiago Fontes Santos santostf@iceb.ufop.br
Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil

Resumo

Neste trabalho iremos provar que baricentro, ortocentro e circuncentro sempre estão alinhado. Este resultado foi descoberto por Euler e ficou conhecido por Reta de Euler.

Palavras-chave

Reta, Euler, Circunferência.

1 Introdução

Leonhard Euler que viveu no século 18, fez grandes contribuições para matemática, desde de métodos para resolução de problemas de cunho prático, a outros que sobressaiam às mentes mais curiosas. Um destes problemas consistia em construir um triângulo a partir de seus contras, que levou Euler a descobrir de forma acidental a reta de Euler.

Ao final do século 19, a geometria euclidiana era considerada um conquista valiosa da matemática e a descoberta da Reta de Euler foi uma de suas mais belas joias.

Para chegar na reta de Euler foi necessário revisar alguns conceitos primitivos e também utilizar dos 9 pontos notáveis do triângulo, como: Altura, Ponto Médio, Mediana, Mediatriz, Ortocentro, Baricentro e Circuncentro. Para mostrar e demonstrar esta Reta.

Após a confirmação da Reta de Euler, foi iniciada a Circunferência dos Nove Pontos, que é formada pelos pontos de Euler, os pés da altura de um triângulo e os pontos médios do triângulo. Os mesmos foram mostrados e demonstrados neste trabalho. As bases do nosso estudo se encontram em [3, 1, 2].

2 Noções Básicas

Nesta seção irei definir uma única vez, todos os conceitos básicos necessários para demonstrar a Reta de Euler e os Nove Pontos Notáveis. Caso haja dúvida e seja necessário conferir alguma definição, retorne a esta secção.

Definição 1. *Chamamos de triangulo a união dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$, onde A, B e C são pontos não colineares.*

$$\triangle ABC = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{AC}$$

Podemos classificar os triângulos de três formas:

- **Equilátero:** Quando seus três lados são congruentes.
- **Isósceles:** Quando dois de seus lados são congruentes.
- **Escaleno:** Quando dois de seus lados não são congruentes.

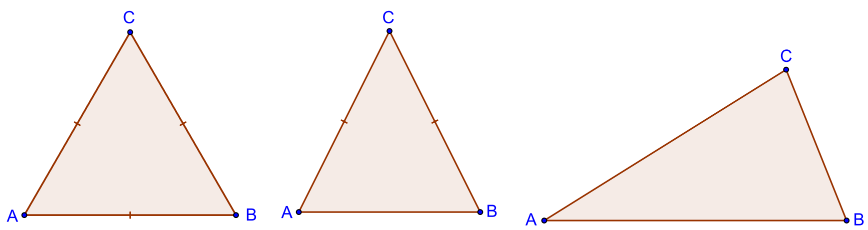

Figura 1: $\triangle ABC$ Equilátero, Isósceles e Escaleno respectivamente.

A definição do ponto médio é de extrema importância para demonstrar a mediatriz, baricentro, ortocentro e circuncentro, então agora iremos definir o que é o ponto médio.

Definição 2 (Ponto Médio)**.** *Definimos ponto médio como o ponto em que divide um segmento em dois segmentos iguais.*

A definição de mediana é de extrema importância para demonstrar o baricentro, então agora iremos definir o que é a mediana.

Definição 3 (Mediana)**.** *Definimos como mediana de um triângulo um segmento cuja suas extremidades são o vértice do triângulo e o ponto médio oposto.*

A definição de mediatriz é de extrema importância para demonstrar o ortocentro e o circuncentro, então agora iremos definir o que é a mediatriz.

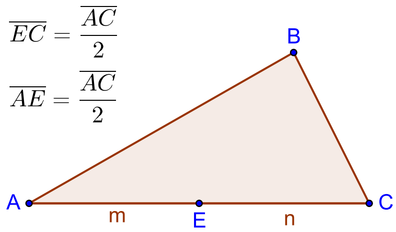

Figura 2: Exemplo de Ponto Médio

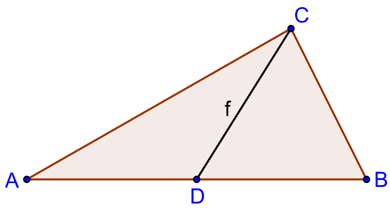

Figura 3: Exemplo de mediana partindo de um único vértice.

Definição 4 (Mediatriz)**.** *Definimos como mediatriz de um segmento, a reta perpendicular ao segmento que contém seu ponto médio.*

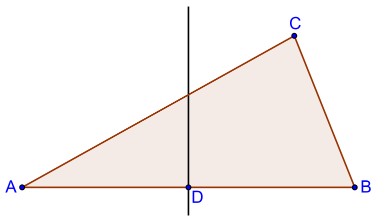

Figura 4: Ilustração da mediatriz.

A definição de bissetriz utilizada para demonstrar o incentro, então agora iremos definir o que é a bissetriz.

Definição 5 (Bissetriz)**.** *Definimos bissetriz de um triângulo como um segmento de reta com origem em um dos vértices do triângulo com a outra extremidade no lado oposto a esse vértice. Sendo que ela divide o ângulo correspondente ao vértice ao meio.*

Após definir alguns conceitos necessários iremos agora enunciar e demonstrar as seguintes proposições

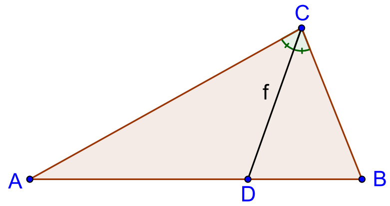

Figura 5: Exemplo de bissetriz.

Proposição 1 (Circuncentro - E)**.** *O circuncentro de um triângulo é o ponto de encontro das mediatrizes de seus lados.*

Demonstração. Sejam ABC um triângulo qualquer e r,s e t as mediatrizes correspondentes aos lados $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ e $\overline{AB}$ e seja E o ponto de intersecção das retas r e s. Pela caracterização da mediatriz de um triângulo e como o ponto médio divide $\overline{BC}$ em duas partes iguais então podemos dizer que $\overline{EB} = \overline{EC}, E \in r$ e da mesma forma podemos dizer que $\overline{EC} = \overline{EA}, E \in s$. Portanto $\overline{EB} = \overline{EA}$, dessa forma $E \in t$.

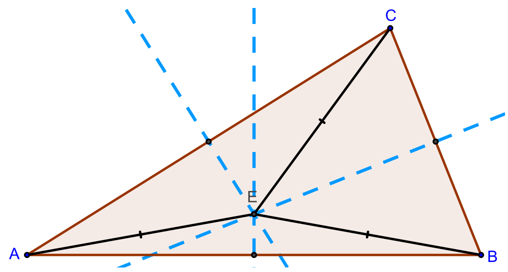

Figura 6: Exemplo de circuncentro

□

Proposição 2 (Baricentro)**.** *O baricentro de um triângulo é o encontro das três medianas do triângulo em um mesmo ponto.*

Demonstração. Sendo ABC um triangulo, temos que $\overline{AM_1}, \overline{BM_2}, \overline{CM_3}$ são medianas, queremos chegar que $\overline{AM_1} \cap \overline{BM_2} \cap \overline{CM_3} = \{G\}$ e que $\overline{AG} = 2 \cdot \overline{GM_1}, \overline{BG} = 2 \cdot \overline{GM_2}$ e $\overline{CG} = 2 \cdot \overline{GM_3}$. Seja então X o ponto tal que: $\overline{BM_2} \cap \overline{GM_3} = \{X\}$. Considerando os pontos médios D e $\overline{BX}$ e E de $\overline{XC}$, temos que o $\triangle ABC$ com $\overline{AM_3} \equiv \overline{BM_3}$ e $\overline{AM_2} \equiv \overline{CM_2}$ então $\overline{M_3M_3}$ é paralela a $\overline{BC}$ e $\overline{M_3M_3} = \frac{\overline{BC}}{2}$ por consequência da base média de um triângulo, que nos diz que se um segmento tem extremidades nos pontos médios de dois lados de um triângulo, então ele é paralelo ao seu terceiro lado e ele é a metade do terceiro lado. E também temos que $\triangle XBC$ com $\overline{XD} \equiv \overline{BD}$ e $\overline{XE} \equiv \overline{CE}$ então $\overline{DE}$ é paralela a $\overline{BC}$ e $\overline{DE} = \frac{\overline{BC}}{2}$, então $\overline{M_2M_3}$ é paralelo a $\overline{DE}$ e $\overline{M_3M_3} \equiv \overline{DE}$, sendo assim M_2M_3DE é paralelogramo e $\overline{DX} \equiv \overline{XM_2}$ e $\overline{EX} \equiv \overline{XM_3}$ então temos que $\overline{BX} = 2 \cdot \overline{XM_2}$ e $\overline{CX} = 2 \cdot \overline{XM_3}$. Sendo assim a mediana será $\overline{BM_2}$ intercepta a mediana $\overline{CM_3}$ em um ponto X, tal que $\overline{CX} = 2 \cdot \overline{XM_3}$. Tomando as medianas $\overline{AM_1}$ e $\overline{CM_3}$ e sendo Y um ponto tal que $\overline{AM_1} \cap \overline{CM_3} = \{Y\}$. Da mesma forma $\overline{CY} = 2 \cdot \overline{YM_3}$ e $\overline{AY} = 2 \cdot \overline{YM_1}$, logo X=Y. Chamando X=Y=G e considerando $\overline{BX} = 2 \cdot \overline{XM_2}, \overline{CX} = 2 \cdot \overline{XM_3}, \overline{CY} = 2 \cdot \overline{YM_3}$ e $\overline{AY} = 2 \cdot \overline{YM_1}$ temos que $\overline{AM_1} \cap \overline{BM_2} \cap \overline{CM_3} = \{G\}$ e $\overline{AG} = 2 \cdot \overline{GM_1}, \overline{BG} = 2 \cdot \overline{GM_2}$ e $\overline{CG} = 2 \cdot \overline{GM_3}$.

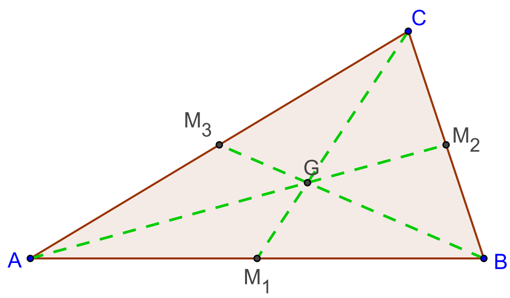

Figura 7: Exemplo de Baricentro

□

Proposição 3 (Ortocentro). *O ortocentro é o ponto de intersecção das retas suporte das alturas de um triângulo.*

Demonstração. Sejam ABC um triângulo de alturas $\overline{AH_1}, \overline{BH_2}$ e $\overline{CH_3}$. Temos que $\overleftrightarrow{AH_1}, \overleftrightarrow{BH_2}, \overleftrightarrow{CH_3}$ retas que contém as alturas $\overleftrightarrow{AH_1} \cap \overleftrightarrow{BH_2} \cap \overleftrightarrow{CH_3} = \{H\}$. Pelos vértices A, B e C do triângulo conduzimos retas paralelas aos lados opostos, obtendo o triângulo MNP. Onde $A \in \overline{NP}$ e $\overline{NP}$ é paralela a $\overline{BC}$, $B \in \overline{MP}$ e $\overline{MP}$ é paralela a $\overline{AC}$, $C \in \overline{MN}$ e $\overline{MN}$ é paralela a $\overline{AB}$. Então, APBC e ABCN são paralelogramos, então $\overline{AP} \equiv \overline{BC}$ e $\overline{AN} \equiv \overline{BC}$. Dessa forma A é o ponto médio de $\overline{NP}$. Sendo $\overrightarrow{AH_1} \perp \overline{BC}$ e $\overline{NP}$ paralelo a $\overline{BC}$ então $\overrightarrow{AH_1} \perp \overline{NP}$. Dessa forma como A é o ponto médio de $\overline{NP}$ e $\overrightarrow{AH_1} \perp \overline{NP}$ decorre que a reta $\overrightarrow{AH}$ é mediatriz de $\overline{NP}$. De maneira análoga temos que a reta $\overrightarrow{BH_2}$ é mediatriz de $\overline{MP}$ e $\overrightarrow{CH_3}$ é mediatriz de $\overline{MN}$. Logo considerando $\triangle MNP$, as mediatrizes $\overrightarrow{AH_1}, \overrightarrow{BH_2}$ e $\overrightarrow{CH_3}$ dos lados do triângulo se interceptam no ponto H. Logo $\overrightarrow{AH_1} \cap \overrightarrow{BH_2} \cap \overrightarrow{CH_3} = \{H\}$.

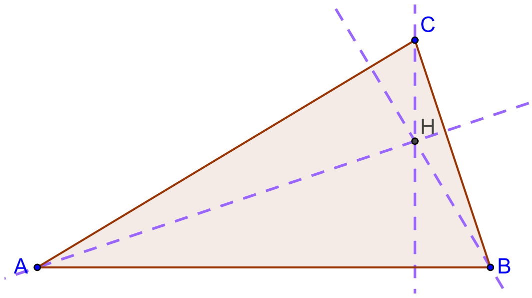

Figura 8: Exemplo de Ortocentro

□

3 Reta de Euler

No Século XIX o matemático Leonhard Euler, descobriu acidentalmente que 3 pontos notáveis de um triângulo são sempre colineares, ou seja, que há três pontos que partilham a mesma reta. Os pontos que apresentavam essa propriedade são o Baricentro, Ortocentro e Circuncentro.

Teorema 1 (Teorema de Euler)**.** *Os três pontos notáveis de um triângulo: Baricentro, Ortocentro e Circuncentro são colineares, além disso a distância entre o Baricentro e o Ortocentro é duas vezes menor que a distância entre o Baricentro e Circuncentro.*

Observação: O baricentro sempre estará entre o circuncentro e o ortocentro, com exceção ao triangulo equilátero, pois neste caso os pontos irão coincidir.

A prova da existência da reta de Euler significa provar que o Baricentro, Ortocentro e Circuncentro são colineares. Dessa forma irei enunciar dois lemas que nos ajudaram neste processo.

Lema 1. *Os segmento que ligam os pontos médios do lado do $\triangle ABC$ são metade do comprimento do terceiro lado paralelo. O triângulo formado por*

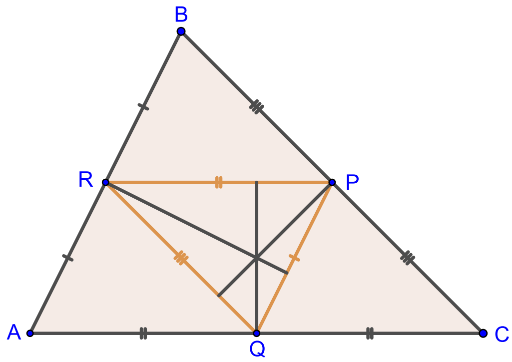

Figura 9: Diagrama 1

todos esses três segmentos é o $\triangle PQR$, similar ao $\triangle ABC$. Dessa forma o Circuncentro do $\triangle ABC$ coincinde com o Ortocentro do $\triangle PQR$. Como mostra a figura 9.

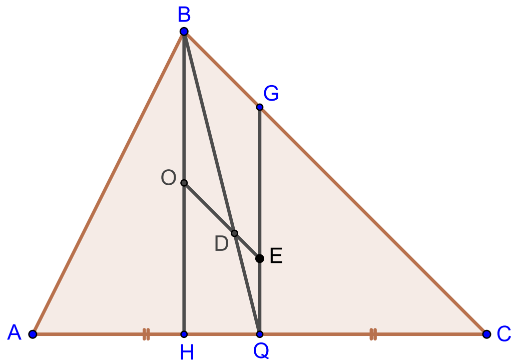

Figura 10: Diagrama 2

Lema 2. *Observando a figura 10 podemos notar que BH é a altura que contém o Ortocentro do triângulo ABC, BQ é a mediana que contém o Baricentro, QG é a mediatriz que é perpendicular a AC e contém o Circuncentro do $\triangle ABC$. Denotaremos o Baricentro de D , o Ortocentro de O e o Circuncentro de E. Sejam $\overline{DO}$ e $\overline{DE}$, queremos provar que ambos pertencem a mesma linha. Dessa forma podemos provar que $B\widehat{D}O \equiv Q\widehat{D}E$ o que só pode acontecer se O, D e E forem colineares, uma vez que O e E estarão em lados opostos a mediana.*

Para provar que esses ângulos são congruentes, mostraremos que o $\triangle BDO$ e $\triangle QDE$ são triângulos semelhantes.

1. A altura e a mediatriz são paralelas, porque as duas são perpendiculares a $\overline{AC}$.

2. $\overline{BD}$ e $\overline{DQ}$ estão em uma proporção 2 por 1, pela propriedade do baricentro.

3. Se considerarmos o $\triangle PQR$ do $\triangle ABC$ como na figura 9, é claro perceber que $\overline{BO}$ e $\overline{QE}$ são correspondentes do $\triangle PQR$ e ao $\triangle ABC$. Assim pelo lema 1, temos que $\overline{BO} : \overline{QE} = 2 : 1$.

Isso prova que os triângulos são da forma Lado, Ângulo, Lado, (LAL), logo temos que D e E são colineares e a reta de Euler existe.

3.1 Propriedades da Reta de Euler

1. O Baricentro é igual a $\frac{1}{3}$ da distância do Circuncentro ao Ortocentro. Isto é o que torna a linha de Euler famosa, pois independente do triângulo as distancias relativas entre O, D e E, permanecem $\overline{ED} : \overline{EO} = 1 : 3$.

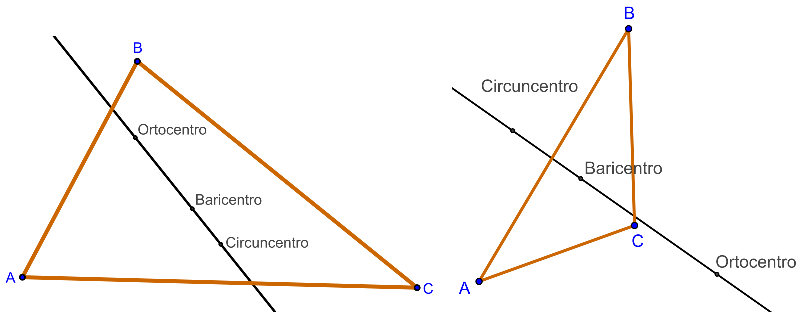

Figura 11: Reta de Euler

2. O Circuncentro, Ortocentro e Baricentro coincidem apenas no triângulo equilátero. Isso ocorre porque o triângulo equilátero tem suas medianas, alturas e bissetrizes iguais.

Referências

[1] O. Dolce and J.N. Pompeo. *Fundamentos de Matemática Elementar - Geometria Plana*. Atual Editora, São Paulo, 9ª edition, 2013.

[2] W. Eduardo. *Construções Geométricas*. Sociedade Brasileira da Matemática, Rio de Janeiro, 1993.

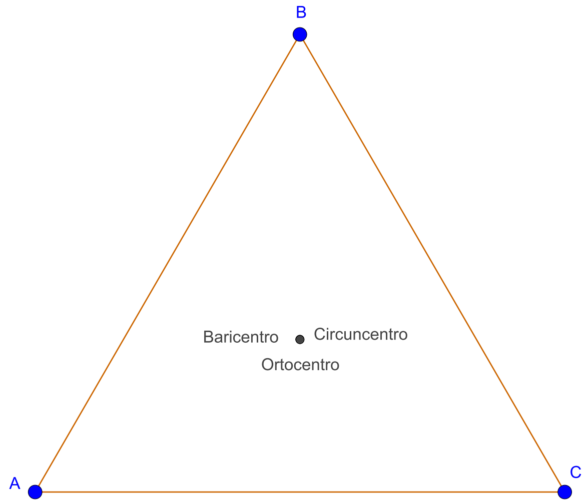

Figura 12: O circuncentro, baricentro e ortocentro

[3] A. NETO. *Geometria*. Sociedade Brasileira da Matemática, Rio de Janeiro, 1ª edition, 2013.