Uma breve introdução ao Conjunto de Cantor

Elder Cesar de Almeida elderufop@gmail.com
Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil

Thiago Fontes Santos santostf@iceb.ufop.br
Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil

Resumo

Neste trabalho falaremos sobre o interessante conjunto de Cantor, que desperta a curiosidade de muitos por seu modo de construção. Veremos também algumas propriedades e suas demonstrações, tais como é não vazio, não contém intervalo, é perfeito, é desconexo, é não enumerável e tem um vínculo intrínseco na base ternária. Dentre esses e outros assuntos teremos também exemplos para que o leitor entenda de forma clara o conteúdo desta apresentação.

Palavras-chave

Cantor, Analise, Base Ternária.

1 Introdução

George Cantor (1845-1918) foi o criador da teoria dos conjuntos, que foi uma grande contribuição para matemática moderna. Seu trabalho tinha o foco de entender as diferentes maneiras da infinitude dos conjuntos. Um de seus trabalhos é o conjunto que iremos abordar, que doravante denotaremos por $\mathcal{C}$.

Considere o intervalo $I_0 = [0, 1]$, dividiremos este intervalo em três partes iguais e na sequência removeremos o terço médio aberto. Os conjuntos que restam são dois intervalos fechados, a saber, $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ e $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Denotaremos por I_1 a união destes intervalos. Note que o comprimento de cada intervalo de I_1 é $\frac{1}{3}$ e $I_1 \subset I_0$.

A seguir, dividiremos cada intervalo que compõe I_1 em três partes iguais e removeremos o terço médio aberto de cada um deles. Agora restaram quatro intervalos fechados, que denotaremos por I_2 a união destes intervalos, ou seja,

$$I_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

Observe que cada intervalo que compõe I_2 tem comprimento $\dfrac{1}{3^2}$ e $I_2 \subset I_1$

Repetindo esse processo sucessivamente, obteremos intervalos I_n que são união de 2^n intervalos fechados, onde cada um deles tem comprimento $\dfrac{1}{3^n}$. Além disso temos que $I_{n+1} \subset I_n \; \forall n \in \mathbb{N}$. A figura (1) ilustra alguns passos que fizemos acima.

Definição 1. *O conjunto de Cantor* $\mathcal{C}$ *é a interseção infinita dos intervalos* $I_n, n \in \mathbb{N}$ *que foram obtidos acima, ou seja,*

$$\mathcal{C} = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n.$$

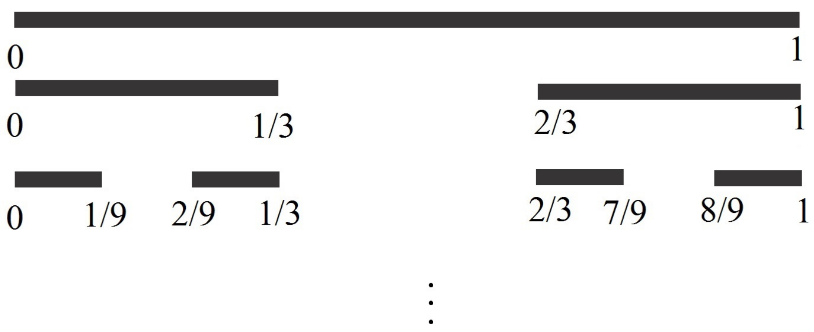

Figura 1: Construção do Conjunto de Cantor

2 Algumas propriedades de $\mathcal{C}$.

A próxima proposição trata de mostrar que dentro do conjunto de cantor ($\mathcal{C}$) existem pontos chamados pontos de fronteira, nos informando que o Conjunto é não vazio.

Proposição 1. *O Conjunto* $\mathcal{C}$ *é não vazio.*

Demonstração. Com efeito, observe que cada I_n é um intervalo fechado pois é uma união finita de intervalos fechados não vazios. Como $I_{n+1} \subset I_n \subset [0, 1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, usando o teorema dos intervalos encaixados(Cf. [2, 1]) , podemos afirmar que $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$. Esta interseção infinita é justamente o conjunto $\mathcal{C}$ definido acima. $\square$

A próxima proposição nos mostra que não existem intervalos dentro do conjunto de Cantor através do conceito aplicado pela propriedade arquimediana, ou seja $\mathcal{C}$ é totalmente desconexo.

Proposição 2. *O Conjunto $\mathcal{C}$ não contém intervalos.*

Demonstração. Seja $I = (a, b) \subseteq [0, 1]$, assuma $b > a$. Considere o seguinte conjunto :

$$M = \{n \in \mathbb{N} : -\log_3(b - a) < n\}.$$

Vamos mostrar que $M \neq \emptyset$. Note que, como $I \subset [0, 1]$ então $b - a < 1$. Daí, $-log_3(b - a) > 0$ e assim pela propriedade arquimediana, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $-log_3(b - a) < m$ portanto $M \neq \emptyset$.

Pelo princípio da boa ordenação (Cf.[2]) M possui um elemento mínimo, ou seja, $\exists k \in M$ tal que $k \leq x, \forall x \in M$. Deste modo,temos as seguintes desigualdades equivalentes:

$$\begin{gathered} -log_3(b - a) < k \\ log_3(b - a) > -k \\ b - a > 3^{-k} \end{gathered}$$

Mas I_k é a união de intervalos de $[0, 1]$ com comprimento $\frac{1}{3^k}$, logo $I \not\subseteq I_k$ e portanto $I \notin \mathcal{C}$. $\square$

Na próxima proposição mostraremos que $\mathcal{C}$ é perfeito ou seja, dados $p \in \mathcal{C}$ e $\epsilon > 0$ arbitrário, toda vizinhança aberta $V_\epsilon(p)$ contêm pontos de $\mathcal{C}$ diferente de p.

Proposição 3. *O Conjunto $\mathcal{C}$ é perfeito.*

Demonstração. Fixe qualquer $\epsilon > 0$ e um ponto $p \in \mathcal{C}$. Seja $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $\frac{1}{3^n} < \epsilon$. Então p é garantido em um dos intervalos I_n, para algum $n \in \mathbb{N}$, que compõe $\mathcal{C}$, de tamanho $\frac{1}{3^n}$. Existem infinitos pontos de fronteira do conjunto $\mathcal{C}$ contidos neste intervalo e além disso estão todos contidos no intervalo aberto $(p-\epsilon, p+\epsilon)$. Assim, p é um ponto de acumulação do conjunto $\mathcal{C}$. Como estamos considerando qualquer ponto $p \in \mathcal{C}$ então $\mathcal{C}$ é perfeito. $\square$

3 Descrição na base Ternária

Dado um $x \in [0,1]$, sempre podemos reescrevê-lo da seguinte maneira na base ternária:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n},$$

onde $a_n \in \{0,1,2\}$.

A representação na base ternária é considerada útil para descrever os elementos do conjunto de Cantor. A construção clássica $\mathcal{C}$ é via trisecção dos intervalos envolvidos e posterior remoção dos terços médios abertos. Em cada etapa dividiremos os intervalos em três partes iguais, e a seguir faremos um vínculo com os símbolos da base 3:

- representaremos com 0 os elementos que ficam no terço esquerdo da trisecção.

- representaremos com 1 os elementos que ficam no terço médio da trisecção.

- representaremos com 2 os elementos que ficam no terço direito da trisecção.

Vamos verificar que a representação estabelecida acima faz sentido para a trisecção de $[0,1]$, os demais passos seguem o mesmo processo.

Lema 1. *Seja* $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \in [0,1]$. *Então:*

1. *Se* $a_1 = 0$ *então* $x \in [0, \frac{1}{3}]$.

2. *Se* $a_1 = 1$ *então* $x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$.

3. *Se* $a_1 = 2$ *então* $x \in [\frac{2}{3}, 1]$.

Demonstração. Provaremos o item 1. Com efeito, como $a_1 = 0$ e $a_n \leqslant 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, temos que

$$\begin{aligned} x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \\ &\leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{3^n} \\ &= 2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3^n} \\ &= 2\left(\frac{\frac{1}{3^2}}{1-\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

A prova dos demais itens é feita de maneira inteiramente análoga. □

Pela representação feita acima, vemos que os elementos de $\mathcal{C}$ são os pontos de $[0,1]$ cuja a expansão na base 3 tem símbolos 0 ou 2, com exceção dos pontos de fronteira que têm dupla representação uma delas contendo o dígito 1, por exemplo $1/3 = (0,10000...)_3 = (0,02222...)_3$.

Exemplo 1. $1/4 \in \mathcal{C}$.

De fato, a representação de $\frac{1}{4}$ na base 3 é $(0,0202...)_3$ sendo assim, $\frac{1}{4} \in C$. Além disso $1/4$ não é ponto de fronteira de Cantor.

Proposição 4. *O Conjunto $\mathcal{C}$ é não enumerável.*

Demonstração. Definiremos uma função $\varphi : \mathcal{C} \longrightarrow [0,1]$ como segue:

$$\varphi\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}\right) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a_n/2)}{2^n}$$

Iremos mostrar que φ é sobrejetiva. Dado $y \in [0,1]$, podemos escrevê-lo da forma $y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$, sua representação na base 2 (onde $a_n \in [0,1]$). Tomemos, $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a_n}{3^n}$. Observe que $x \in C$, pois $b_n = 2a_n \in \{0,2\}$. Além disso

$$\varphi\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a_n}{3^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{b_n}{2}}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{2a_n}{2}}{2^n} = y.$$

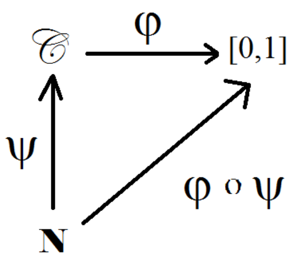

Figura 2: Composição das funções, com φ e ψ sobrejetivas e $\varphi \circ \psi$.

Portanto φ é a sobrejeção de $\mathcal{C}$ em $[0,1]$.

Se $\mathcal{C}$ fosse enumerável então existiria uma sobrejeção de $\psi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{C}$ de modo que $\varphi \circ \psi$ é uma sobrejeção de $\mathbb{N}$ em $[0,1]$, uma contradição. Logo $\mathcal{C}$ é não enumerável. $\square$

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por me proporcionar uma oportunidade de realizar uma etapa muito importante na minha carreira acadêmica, à Pró-Reitoria de Graduação da UFOP e ao PET Matemática pelo apoio e incentivo para a realização deste trabalho, ao meu tutor e orientador Thiago Fontes Santos e aos meus colegas Petianos.

Referências

[1] Robert G. Bartle. *Introduction to Real Analysis*. Eastern Michigan University, Ypsilanti, 2000.

[2] Elon Lages Lima. *Análise Real*. Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, Rio de Janeiro, 2004.

[3] Elon Lages Lima. *Curso de Análise Volume 1*. Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, Rio de Janeiro, 2004.