Sobre a Seqüência de Fibonacci

Marcos Paulo Teodoro marcospauloteodoro@oi.com.br
Instituto Nossa Senhora do Sagrado Coração, Divinópolis, MG, Brazil

Telles Timóteo da Silva timoteo@ufsj.edu.br
Universidade Federal de São João Del-Rei, Ouro Branco, MG, Brazil

Resumo

Neste trabalho revisamos aspectos numéricos e geométricos relativos à seqüência de Fibonacci. Vamos desenvolver diversas propriedades aritméticas e analíticas sobre a seqüência de Fibonacci. Vamos também abordar sua relação com a razão áurea. Outro aspecto discutido é sua generalização em termos da chamada seqüência de Gibonacci. O trabalho finaliza com sua aplicação num passeio aleatório.

Palavras-chave

Sequência de Fibonacci, Fórmula de Binet, Número de ouro, Sequência de Gibonacci, Passeio aleatório, Probabilidade.

1 Introdução

A sequência de Fibonacci é uma sequência numérica em que cada termo é igual a soma dos dois termos anteriores, sendo os dois primeiros iguais a um. Neste trabalho revisamos aspectos numéricos e geométricos relativos à seqüência de Fibonacci. Além de apresentar um pouco sobre a história de Fibonacci e algumas propriedades da sequência que leva seu nome, mostramos a relação da seqüência de Fibonacci com a razão áurea e discorremos sobre uma generalização da seqüência de Fibonacci, denominada Gibonacci (Seção 2). São utilizados recursos de ágebra, análise e geometria para a demonstração de proposições.

Na Seção 3, baseando-nos no trabalho de M. Griffiths [5], desenvolvemos um tipo de passeio aleatório que utiliza a sequência de Fibonacci para construir sua distribuição de probabilidades.

2 Fibonacci

2.1 Vida de Fibonacci

Leonardo de Pisa $(1170 - 1250)$, conhecido como Leonardo Fibonacci, nasceu em Pisa na Itália. É tido como um dos grandes matemáticos italianos.

No início do século XII, Pisa era um dos grandes centros comerciais italianos e o pai de Fibonacci ocupou um cargo de chefe de um desses entrepostos, o que fez com que Fibonacci recebesse suas primeiras aulas de matemática com professores islâmicos. Depois Fibonacci viajou pelo Mediterrâneo onde entrou em contato com os procedimentos matemáticos orientais, com os métodos algébricos árabes, os numerais indo-arábicos e também as obras de Al-Khwarismi.

Quando voltou a Pisa, continuou seu estudos e escreveu um livro intitulado *Liber Abaci* (Livro do Abaco), que retrata problemas algébricos recolhidos durante as suas viagens e métodos de solução destes. Nesse livro, ele introduziu os algarismos indo-arábicos na Europa, mostrando que as operações com eles eram mais fáceis e, pela sua fama, aos poucos foram bem aceitos.

Para saber mais sobre a vida de Fibonacci o leitor pode consultar [1] e [4].

2.2 A Sequência de Fibonacci

Um dos problemas que está no livro *Liber Abaci* é o problema dos pares de coelhos

> Suponha que um par recém-nascido de coelhos, sendo um macho e uma fêmea, seja colocado em um campo. Os coelhos são capazes de acasalar com a idade de um mês e têm um período de gestação de um mês, de modo que, no final de seu segundo mês, uma fêmea produza um par de coelhos. Supondo que nossos coelhos nunca morram e que cada fêmea sempre produz exatamente um par misto (um macho, uma fêmea) a partir do final de seu segundo mês, quantos pares haverá em um ano?

Uma análise direta do problema nos revela que:

- começamos com um par de coelhos;
- no segundo mês, temos um par de coelhos com um mês;
- no terceiro mês, temos dois pares de coelhos: 1 par adulto e 1 par recém-nascido;
- no quarto mês, temos três pares de coelhos: 1 par adulto e 1 par com um mês e 1 par recém-nascido;
- no quinto mês temos 5 pares de coelhos: 2 pares adultos e 2 pares recém-nascido e 1 par com um mês;
- no sexto mês temos 8 pares: 3 pares adultos e 3 pares recém-nascidos e 2 pares com um mês

e continua através dos meses até completar um ano.

Assim, temos a sequência numérica, conhecida como **Sequência de Fibonacci**

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...)$$

Observamos que a resposta do problema proposto por Fibonacci é 233. Podemos definir a sequência de Fibonacci F_n de forma recursiva.

Definição 2.1. *Uma sequência F_0, F_1, F_2, $F_3, ...$ formada por números inteiros positivos é uma sequência de Fibonacci se para cada natural $n \geq 1$ tem-se $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ com $F_1 = F_2 = 1$.*

A sequência de Fibonacci tem diversas propriedades. Vamos apresentar algumas dessas propriedades como proposições.

Proposição 2.1. *Dois números consecutivos na sequência de Fibonacci são primos entre si, isto é* $mdc\,(F_n,\, F_{n+1}) = 1$, *para todo natural* $n \geq 1$.

Demonstração. Seja $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Vamos provar que

$$mdc\,(F_n,\, F_{n+1}) = F_2 = 1.$$

Sabemos que um número qualquer de Fibonacci é igual à soma dos dois termos anteriores. Assim um número de Fibonacci não será maior que o dobro do termo anterior, tirando o caso do terceiro número que é o dobro do segundo, $\{F_n\}$ é crescente para $n \geq 3$. Portanto, quando dividirmos um termo da sequência de Fibonacci pelo seu antecessor o quociente é igual a 1 e o resto será a subtração do dividendo com o divisor. Portanto, continuando o processo e utilizando o algoritmo de Euclides para o cálculo do máximo divisor comum entre esses dois números consecutivos, vamos ter:

$$\begin{array}{rcl} F_{n+1} & = & F_n \cdot 1 + F_{n-1} \\ F_n & = & F_{n-1} \cdot 1 + F_{n-2} \\ F_{n-1} & = & F_{n-2} \cdot 1 + F_{n-3} \\ & \vdots & \\ F_4 & = & F_3 \cdot 1 + F_2 \\ F_3 & = & F_2 \cdot 2 + 0. \end{array}$$

Seguindo isso, como o máximo divisor comum é sempre o último resto, diferente de zero, teremos

$$mdc\,(F_n, F_{n+1}) = F_2 = 1.$$

□

Proposição 2.2. *A soma* S_n *dos* n *primeiros termos da sequência de Fibonacci, para* $n > 1$, *é*

$$S_n = F_{n+2} - 1.$$

Demonstração. Temos na sequência de Fibonacci

$$\begin{array}{rcl} F_1 & = & F_3 - F_2 \\ F_2 & = & F_4 - F_3 \\ F_3 & = & F_5 - F_4 \\ & \vdots & \\ F_{n-1} & = & F_{n+1} - F_n \\ F_n & = & F_{n+2} - F_{n+1}. \end{array}$$

Ao somar $F_1 + F_2 + F_3 + ... + F_{n-1} + F_n$ e simplificando os termos dessas igualdades, temos

$$\begin{aligned} S_n &= F_1 + F_2 + F_3 + ... + F_{n-1} + F_n \\ &= F_{n+2} - F_2 \\ &= F_{n+2} - 1. \end{aligned}$$

□

Proposição 2.3. *Dado três números de Fibonacci consecutivos F_{n-1}, F_n e F_{n+1}, temos $F_n^2 = F_{n+1} \cdot F_n - F_n \cdot F_{n-1}$, para todo $n \geq 2$.*

Demonstração. Para provar a equação, basta colocar F_n em evidência no segundo membro. Com isso

$$F_{n+1} \cdot F_n - F_n \cdot F_{n-1} = F_n \left(F_{n+1} - F_{n-1}\right) = F_n \cdot F_n = F_n^2.$$

□

Para a proposição seguinte, defina S_{n^2} como sendo a soma dos quadrados dos n primeiros termos da sequência de Fibonacci, isto é,

$$S_{n^2} = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \cdots + F_n^2,$$

para $n \geq 1$.

Proposição 2.4. *A soma dos quadrados dos n primeiros termos da sequência de Fibonacci é*

$$S_{n^2} = F_{n+1} \cdot F_n.$$

Demonstração. Primeiramente note que F_1^2 pode ser escrito como $F_2 \cdot F_1$. Seguindo a Proposição 2.3, vamos escrever o quadrado dos números de Fibonacci do F_2 ao F_n. Com isso

$$\begin{aligned} F_2^2 &= F_3 \cdot F_2 - F_2 \cdot F_1 \\ F_3^2 &= F_4 \cdot F_3 - F_3 \cdot F_2 \\ &\vdots \\ F_n^2 &= F_{n+1} \cdot F_n - F_n \cdot F_{n-1}. \end{aligned}$$

Ao somar $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \cdots + F_n^2$ e simplificando os termos da igualdade, conseguimos

$$\begin{aligned} S_{n^2} &= F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \cdots + F_n^2 \\ &= F_{n+1} \cdot F_n. \end{aligned}$$

□

Proposição 2.5. *Se F_{n-1}, F_n e F_{n+1} são três números consecutivos na sequência de Fibonacci, então $F_{n+1} \cdot F_{n-1} = F_n^2 + (-1)^n$, para todo natural $n \geq 2$.*

Demonstração. Verificando por indução em n. Para $n = 2$
1º membro: $F_{2+1} \cdot F_{2-1} = F_3 \cdot F_1 = 2 \cdot 1 = 2$
2º membro: $F_2^2 + (-1)^2 = 1^2 + 1 = 2$
A igualdade é verdadeira para $n = 2$.

Supondo que a igualdade $F_{k+1} \cdot F_{k-1} = F_k^2 + (-1)^k$ seja válida para algum de $k > 2$. Queremos mostrar que

$$F_{k+2} \cdot F_k = F_{k+1}^2 + (-1)^{k+1}.$$

Partindo de $F_{k+2} \cdot F_k$, pela sequência de Fibonacci sabemos que $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$, assim

$$F_{k+2} \cdot F_k = (F_{k+1} + F_k) \cdot F_k = F_{k+1} \cdot F_k + F_k^2. \tag{1}$$

Como $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$, temos que $F_k = F_{k+1} - F_{k-1}$ substituindo em (1) obtemos:

$$\begin{aligned}
F_{k+2} \cdot F_k &= F_{k+1} \cdot (F_{k+1} - F_{k-1}) + F_k^2 \\
&= F_{k+1}^2 - F_{K+1} \cdot F_{k-1} + F_k^2 \\
&= F_{k+1}^2 - \underbrace{F_k^2 - (-1)^k}_{H.I.} + F_k^2 \\
&= F_{k+1}^2 + (-1) \cdot (-1)^k \\
&= F_{k+1}^2 + (-1)^{k+1}.
\end{aligned}$$

□

2.2.1 Fórmula de Binet

A fórmula de Binet[1] é uma representação do termo geral da sequência de Fibonacci. Ela permite que encontremos qualquer número de Fibonacci, se conhecermos a sua posição na sequência, sendo F_n um número qualquer de Fibonacci que está na posição n.

Para obter a sua equação geral, utilizaremos recorrência linear de segunda ordem. Usando a equação recursiva $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, a equação característica associada a essa recorrência será $r^2 = r + 1$, calculando as raízes da equação do segundo grau encontramos $r_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $r_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. Assim, qualquer sequência na forma $F_n = C_1 \cdot r_1^n + C_2 \cdot r_2^n$ será solução da recorrência $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Substituindo as raízes encontradas r_1 e r_2, teremos

[1] Philippe Marie Binet (1786-1856) matemático francês.

$$F_n = C_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n. \tag{2}$$

Como na sequência de Fibonacci temos $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$, substituindo na equação (2) temos

$$F_0 = C_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + C_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 = 0$$

e

$$F_1 = C_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + C_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 = 1$$

portanto

$$C_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{e} \quad C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Concluímos que

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \tag{3}$$

que é chamada Fórmula de Binet.

Para uma escrita mais simples da fórmula de Binet, vamos fazer $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, com isso

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \alpha^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \beta^n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}},$$

sabendo que $\alpha - \beta = \sqrt{5}$, temos

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}. \tag{4}$$

O número α é conhecido como número de ouro, que na sua forma decimal vale aproximadamente $1,6180339887...$, o que será detalhado na próxima seção.

2.3 Número de Ouro

O número de ouro ou razão áurea, conhecido por muitos como o símbolo da harmonia, é um dos números mais importantes na matemática, é utilizado na arquitetura, na música, nas obras de artes, etc.

O número de ouro decorre da ideia de dividir um segmento de reta $\overline{AB}$ em dois segmentos pelo ponto C. Existem infinitas formas de fazer essa divisão, entretanto tem uma delas que é mais agradável, a divisão desse segmento é feita de forma harmoniosa: o segmento é divido em média e extrema razão. Segundo proposto por Euclides de Alexandria[2], no livro VI de Os Elementos, *um segmento de reta fica divido em média e extrema razão quando a razão do todo para o maior segmento é igual a razão do maior segmento para o menor* [3]. Para obter esta divisão, considere a Figura 1.

Figura 1: Divisão de um segmento em média e extrema razão.

Segundo o que foi proposto por Euclides queremos encontrar um ponto C entre A e B tal que

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{BC}. \tag{5}$$

Como $AB = AC + BC$ substituindo em (5), temos

$$\frac{AC + BC}{AC} = \frac{AC}{BC}$$

o que implica

$$1 + \frac{BC}{AC} = \frac{AC}{BC}. \tag{6}$$

Tomando $x = \dfrac{AC}{BC}$ e substituindo na equação (6), obtemos

$$1 + \frac{1}{x} = x$$

donde temos a equação

$$x^2 - x - 1 = 0. \tag{7}$$

Ao calcular as suas raízes encontramos

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ e } x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2},$$

em que x_1 é o número de ouro.

O número de ouro é reconhecido na pirâmide de Quéops, localizada em Gizé no Egito, pois

[2]Euclides de Alexandria, pouco se sabe sobre sua vida pessoal, mas tudo indica que sua origem é grega. Foi matemático da escola platônica, é conhecido como o Pai da Geometria, nasceu na Síria aproximadamente em 330 a.C. e realizou seus estudos em Atenas. Euclides reuniu o que se tinha de matemática até sua época e escreveu 13 volumes de um livro denominado “Os Elementos".

a razão entre a altura dessa pirâmide pela metade do lado da base é igual ao número de ouro. O Pártenon, templo feito em homenagem à Deusa Atena, no século V a.C., localizado na cidade de Atenas, na antiga Grécia, teve como escultor o arquiteto Fídias que construiu a fachada de forma que a razão do comprimento pela altura é o número de ouro. Hoje em dia o número de ouro é conhecido pela letra grega Φ (lê-se fi) em homenagem a Fídias.

2.4 Razão Áurea na sequência de Fibonacci

A partir da sequência de Fibonacci podemos obter um nova sequência onde o termo geral r_n, para $n \geq 1$, é igual a $\dfrac{F_{n+1}}{F_n}$. Essa sequência pode ser vista abaixo

$$\left(\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, ...\right),$$

na forma decimal será

$$(1; 2; 1,5; 1,666...; 1,6; 1,625; 1,61538...; ...)\,.$$

Observamos que r_n não é uma sequência monótona, mas podemos obter duas novas sequências a partir da sequência r_n que são monótonas: uma sequência crescente $r_{2n+1} = \dfrac{F_{2n+2}}{F_{2n+1}}$, para $n \geq 0$, formada com termos das posições ímpares; outra decrescente $r_{2n} = \dfrac{F_{2n+1}}{F_{2n}}$, para $n \geq 1$, formada com termos das posições pares.

Formalizado os resultados para r_{2n} e r_{2n+1}, temos:

Proposição 2.6. *A sequência formada com os termos com subíndices pares r_{2n} é estritamente decrescente, limitada, e seu limite é $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.*

Demonstração. A sequência r_{2n} será decrescente se

$$r_2 > r_4 > r_6 > r_8 > r_{10} > ...,$$

assim se fizermos um termo subtraído pelo seu antecessor, conseguiremos como resultado um número negativo. Para verificar se $r_{2n+2} - r_{2n}$ é um número negativo, vamos utilizar a igualdade $r_n = \dfrac{F_{n+1}}{F_n}$. Com isso

$$\begin{aligned}
r_{2n+2} - r_{2n} &= \frac{F_{2n+3}}{F_{2n+2}} - \frac{F_{2n+1}}{F_{2n}} \\
&= \frac{F_{2n+3} \cdot F_{2n} - F_{2n+1} \cdot F_{2n+2}}{F_{2n+2} \cdot F_{2n}} \\
&= \frac{(F_{2n+2} + F_{2n+1}) \cdot F_{2n} - F_{2n+1} \cdot (F_{2n+1} + F_{2n})}{F_{2n+2} \cdot F_{2n}} \\
&= \frac{F_{2n+2} \cdot F_{2n} + F_{2n+1} \cdot F_{2n} - F_{2n+1}^2 - F_{2n+1} \cdot F_{2n}}{F_{2n+2} \cdot F_{2n}},
\end{aligned}$$

seguindo a Proposição 2.5, temos que $F_{2n+2} \cdot F_{2n} = F_{2n+1}^2 + (-1)^{2n+1}$, assim

$$\begin{aligned} r_{2n+2} - r_{2n} &= \frac{F_{2n+1}^2 + (-1)^{2n+1} - F_{2n+1}^2}{F_{2n+2} \cdot F_{2n}} \\ &= \frac{-1}{F_{2n+2} \cdot F_{2n}}. \end{aligned}$$

Nesta divisão, o numerador é sempre negativo e o denominador é sempre positivo, assim a divisão será negativa, concluimos que a diferença $r_{2n+2} - r_{2n}$ é sempre negativa.

Desta forma, sendo r_{2n} uma sequência monótona e limitada, então é convergente. Com isso

$$\begin{aligned} r_{2n} &= \frac{F_{2n+1}}{F_{2n}} = \frac{F_{2n} + F_{2n-1}}{F_{2n}} \\ &= 1 + \frac{F_{2n-1}}{F_{2n}} \\ &= 1 + \frac{F_{2n-1}}{F_{2n-1} + F_{2n-2}} \\ &= 1 + \frac{1}{\frac{F_{2n-1}+F_{2n-2}}{F_{2n-1}}} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{F_{2n-2}}{F_{2n-1}}} \\ r_{2n} &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{r_{2n-2}}}. \end{aligned} \tag{8}$$

Na equação (8), aplicando o limite a ambos os membros, obtemos

$$L = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{L}}$$

donde temos

$$L^2 - L - 1 = 0.$$

Resolvendo a equação do segundo grau obtemos como raízes os valores de

$$L = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ e } L = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

A única raiz válida é a positiva, pois a sequência é de termos positivos, logo vemos que a sequência r_{2n} converge para o número de ouro. □

Com uma demonstração análoga à da proposição anterior obtemos o resultado seguinte.

Proposição 2.7. *A sequência formada com os termos com os subíndices ímpares r_{2n+1} é* *estritamente crescente, limitada e seu limite é* $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Nas subsequências de r_n, as sequências r_{2n} e r_{2n+1}, vimos que as duas convergem para o número de ouro. Com isso podemos afirmar que a sequência r_n também convergirá para o número de ouro (veja-se o exercício 2, da seção 1, página 33 da referência [6]), portanto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Para aprofundar no assunto das duas últimas proposições, o leitor pode consultar a referência [2].

Observamos que r_n satisfaz a igualdade abaixo

$$r_n = \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{F_n + F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{\frac{F_n}{F_{n-1}}}$$

donde temos a equação

$$r_n = 1 + \frac{1}{r_{n-1}}.$$

Continuando com processo descrito acima, obtemos

$$\begin{aligned}
r_n &= 1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{r_{n-2}}} \\
&= 1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{r_{n-3}}}} \\
&= 1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{r_{n-4}}}}} \\
&= 1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{r_{n-5}}}}}}
\end{aligned}$$

depois de n repetições conseguimos a igualdade para r_n

$$r_n = 1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\dots\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}}}}}}}.$$

Para um valor de n muito grande, r_n se aproxima de $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, o segundo membro se torna

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}}}}}}.$$

2.5 Sequência de Gibonacci

A sequência de Gibonacci é a sequência de Fibonacci generalizada, pois os dois primeiros termos não precisam ser iguais a 1. Na sequência de Gibonacci cada termo será igual a soma dos dois anteriores e seus termos serão números inteiros positivos.

Definição 2.2. *Uma sequência $G_1,\, G_2,\, G_3,\, \ldots$ formada por números inteiros positivos é uma sequência de Gibonacci se para cada $n \geq 3$ temos $G_n = G_{n-1} + G_{n-2}$ para $G_1 = a$ e $G_2 = b$ com $a, b \in \mathbb{N}$.*

Assim, a Sequência de Gibonacci será da forma

$$(a,\, b,\, a+b,\, a+2b,\, 2a+3b,\, 3a+5b,\, 5a+8b, \ldots).$$

Proposição 2.8. *Na sequência de Gibonacci, conhecendo seus termos iniciais $G_1 = a$ e $G_2 = b$, podemos escrever a sequência na forma $G_n = aF_{n-2} + bF_{n-1}$ para todo $n \geq 3$, com F_{n-2} e F_{n-1} sendo números de Fibonacci.*

Demonstração. Vamos verificar essa proposição por indução em n. Sabemos que $G_1 = a$ e $G_2 = b$, como

$$G_3 = G_1 + G_2$$

então

$$G_3 = a + b.$$

Temos que $F_1 = 1$ e $F_2 = 1$, assim podemos escrever $G_3 = a \cdot F_1 + b \cdot F_2$. Isto mostra que a igualdade $G_n = aF_{n-2} + bF_{n-1}$ é verdadeira para $n = 3$.

Suponhamos que a igualdade $G_k = aF_{k-2} + bF_{k-1}$ seja verdadeira para todo n, com $3 \leq n \leq k$. Mostraremos que

$$G_{k+1} = aF_{k-1} + bF_k.$$

Partindo de G_{k+1}, temos

$$\begin{aligned}
G_{k+1} &= G_k + G_{k-1} \\
&= aF_{k-2} + bF_{k-1} + aF_{k-3} + bF_{k-2}, \text{ pela hipótese de indução} \\
&= a\,(F_{k-2} + F_{k-3}) + b\,(F_{k-1} + F_{k-2}) \\
&= aF_{k-1} + bF_k
\end{aligned}$$

□

3 Passeio aleatório decorrente do cenário dos coelhos de Fibonacci

Passeio aleatório é um modelo probabilístico que representa, por exemplo, o caminhar de um indivíduo que escolhe a direção de seus passos de acordo com uma certa distribuição de probabilidade. Pode descrever também ganhos ou perdas de um apostador num jogo que se repete várias vezes. É um modelo estocástico muito útil pois corresponde a uma discretização de um processo de difusão [7]. O termo "Passeio Aleatório" surgiu em 1905 com Karl Pearson[3] que deparou com problemas que envolvem o deslocamento de uma partícula nos caminhos disponíveis de forma totalmente aleatória, buscando descobrir a posição dessa partícula no decorrer do tempo.

Nessa seção trataremos do modelo em que duas populações distintas de coelhos se desenvolvem num mesmo cercado. Se não ocorre cruzamento entre elas, as espécies de coelhos P_1 e P_2 farão disputas para *ganhar espaço no terreno*, segundo modelo desenvolvido em [5]. Assim, seguindo essa ideia, coloca-se um par de coelhos recém-nacidos da espécie P_1 e, um mês depois, coloca-se um par de coelhos recém-nascidos da espécie P_2. Os coelhos irão procriar de forma que no mês n a população P_1 terá F_{n+1} coelhos e a espécie P_2 terá F_n coelhos, como mostra a Figura 2.

Tempo (meses)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...	n
P_1	1	1	2	3	5	8	13	21	34	...	F_{n+1}
P_2		1	1	2	3	5	8	13	21	...	F_n
Total	1	2	3	5	8	13	21	34	55	...	F_{n+2}

Figura 2: Figura que mostra o crescimento das populações P_1 e P_2 no decorrer do tempo.

Das disputas para ocupar a maior parte do terreno, uma população ganha um pedaço de terra com uma certa probabilidade. Suponha que a probabilidade de ganhar um pedaço de terra por cada população pode ser calculada pela razão entre o número de coelhos da população, P_1 ou P_2,

[3] Karl Pearson (1857-1936) matemático britânico conhecido como o fundador da estatística aplicada.

pelo total de coelhos. Com isso temos as probabilidades de ganho de terra:

$$\mathbb{P}(P_1 \text{ ganha 1 pedaço de terra em } t_1) = \frac{1}{2} \tag{9}$$

$$\mathbb{P}(P_1 \text{ ganha 1 pedaço de terra em } t_2) = \frac{2}{3} \tag{10}$$

$$\mathbb{P}(P_1 \text{ ganha 1 pedaço de terra em } t_3) = \frac{3}{5} \tag{11}$$

$$\vdots$$

$$\mathbb{P}(P_1 \text{ ganha 1 pedaço de terra em } t_n) = \frac{F_{n+1}}{F_{n+1} + F_n} = \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}} \tag{12}$$

em que t_n representa o mês n de observação.

3.1 Passeio Aleatório Y_n

Como visto na última seção, as populações partem de um ponto inicial e terão um ganho de terra no passar dos meses, representando um passeio aleatório unidimensional sobre os inteiros. Esse processo pode ser representado por meio de uma sequência de variáveis aleatórias $\{Y_n\}$ dado por

$$Y_n = Y_0 + \sum_{k=1}^{n} T_k, \tag{13}$$

onde Y_0 é a posição de partida e $\{T_k\}$ é a sequência de variáveis aleatórias independentes, com cada termo recebendo valores 1 ou -1.

Para exemplificar esse passeio aleatório, fazemos P_1 igual bolinha preta e P_2 igual bolinha branca. Colocando essas bolinhas em uma urna, se sortearmos uma bolinha preta damos um passo para direita e se sortearmos uma bolinha branca damos um passo para esquerda. Depois de cada sorteio, a bola sorteada é colocada de volta na urna e passamos para o próximo passo.

Vamos fazer $\mathbb{P}(preta)$ a probabilidade de sortearmos uma bolinha preta e $\mathbb{P}(branca)$ a probabilidade de sortearmos uma bolinha branca.

Para ficar mais claro, vamos recorrer à tabela da Figura 2. Para o primeiro passo vamos olhar a coluna 1, para o segundo passo a coluna 2 e analogamente para os passos seguintes. Com isso:

- Inicialmente, na urna temos uma bolinha preta e uma branca, ou seja, um coelho de cada espécie, como na coluna número 1 na tabela da Figura 2. Assim damos um passo para direita com probabilidade $\mathbb{P}(preta) = \frac{1}{2}$ e damos um passo para esquerda com probabilidade $\mathbb{P}(branca) = \frac{1}{2}$. Veja a Figura 3.

- A seguir, uma bolinha preta é colocada na urna. Vemos pela configuração da coluna número 2 na tabela da Figura 2 que há 3 bolinhas dentro da urna: duas pretas e uma branca. Temos aqui duas situações que podem ter acontecido no primeiro momento, se retirou uma bola

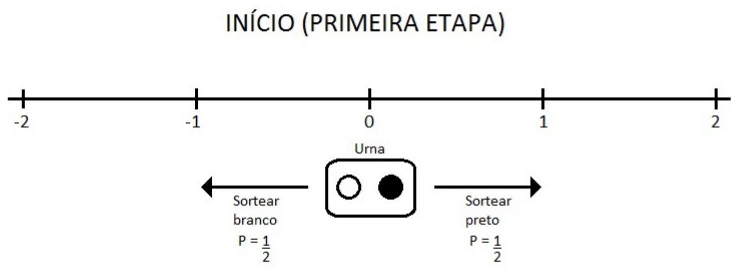

Figura 3: Urna na posição 0.

preta estamos na posição 1 conforme a Figura 4, caso retirou uma bola branca estamos na posição -1 conforme Figura 5, e as probabilidades que vamos conseguir nos dois casos seram iguais a $\mathbb{P}(preta) = \dfrac{2}{3}$ e $\mathbb{P}(branca) = \dfrac{1}{3}$.

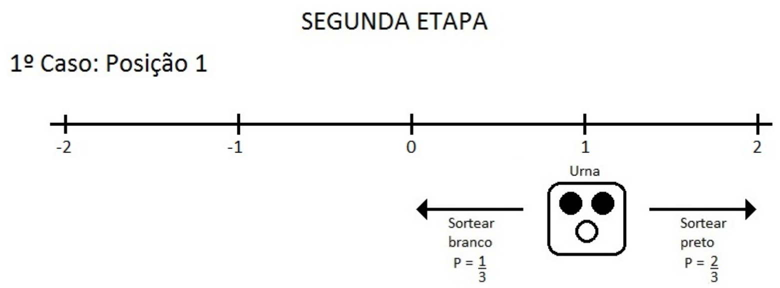

Figura 4: Urna na posição 1.

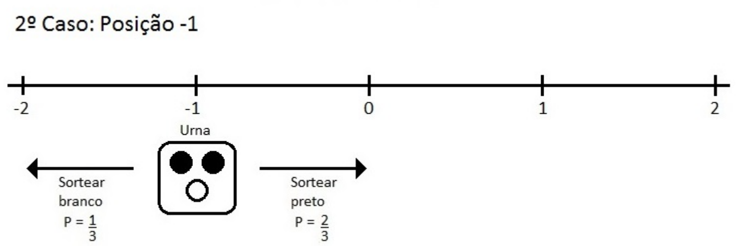

Figura 5: Urna na posição -1.

- Em seguida, iremos acrescentar uma bolinha preta e uma branca, seguindo aqui a coluna número 3 da Tabela 2. As posições em que podemos estar depois de ter realizado o segundo passo serão: posição 2, posição 0 ou na posição -2. As probabilidades de ganho de terreno, para cada população são $\mathbb{P}(preta) = \dfrac{3}{5}$ e $\mathbb{P}(branca) = \dfrac{2}{5}$, como nas Figuras 6 , 7 e 8.

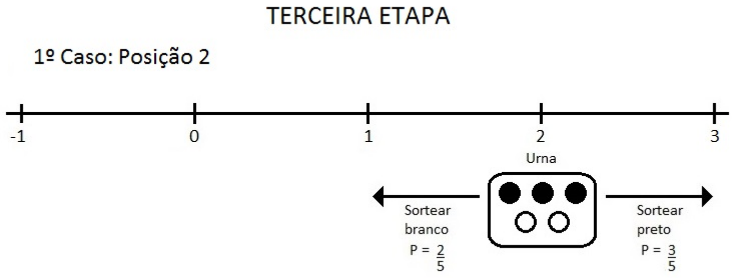

Figura 6: Urna na posição 2.

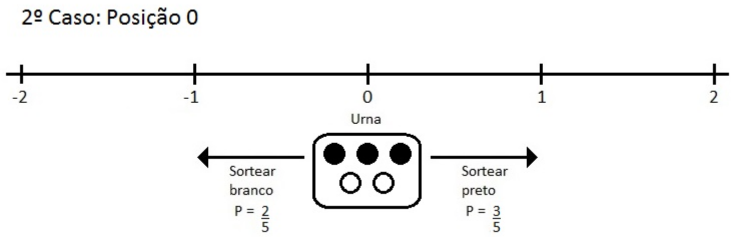

Figura 7: Urna na posição 0.

Podemos representar as possíveis configurações num diagrama da árvore, representado na Figura 9.

Seguindo essa ideia no enésimo passo a urna sempre terá F_n bolinhas pretas e F_{n-1} bolinhas brancas, com isso, teremos que acrescentar na urna F_{n-1} bolinhas pretas e F_{n-2} bolinhas brancas, assim, na urna terá F_{n+1} e F_n bolinhas pretas e brancas respectivamente.

As probabilidades de dar um passo para direita e um passo para esquerda serão

$$\mathbb{P}(preta) = \frac{F_{n+1}}{F_n + F_{n+1}} = \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}} \text{ e } \mathbb{P}(branca) = \frac{F_n}{F_{n+2}}. \tag{14}$$

Com essas probabilidades a população P_1 ganha um pedaço de terra com probabilidade

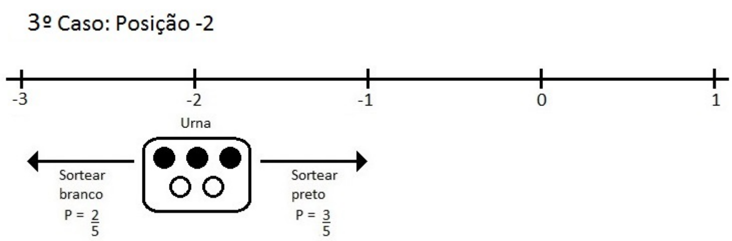

Figura 8: Urna na posição -2.

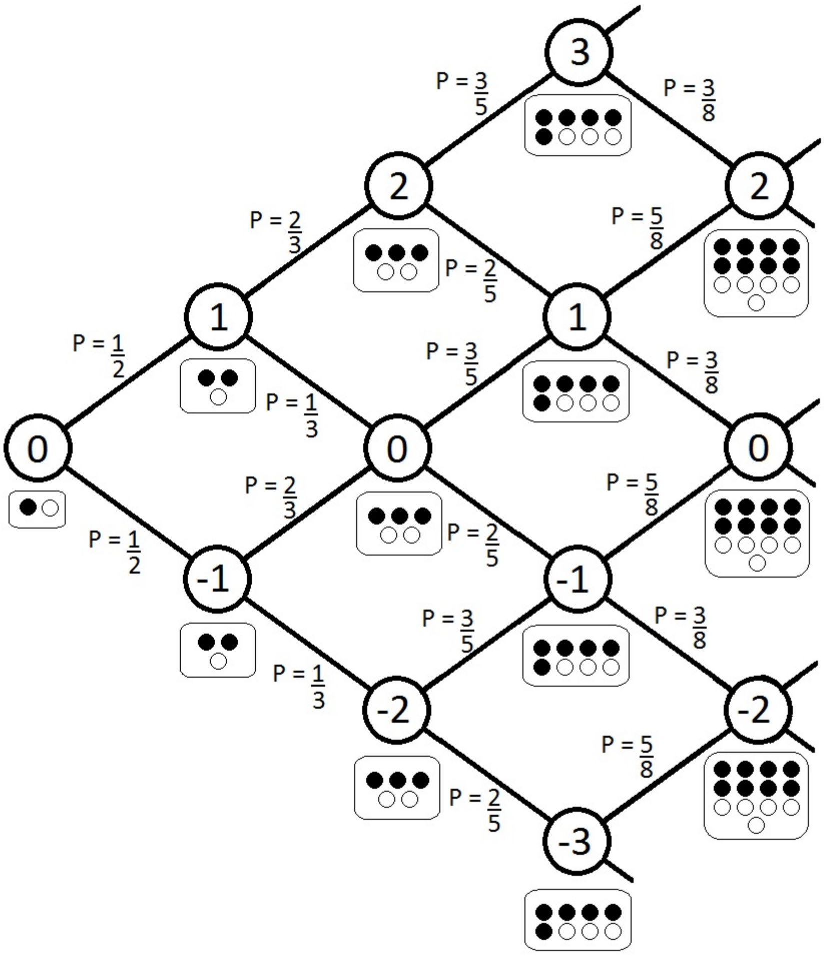

Figura 9: Diagrama mostrando as probabilidades do ganho de terreno.

$\frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}$ e perde um pedaço de terra com probabilidade $\frac{F_n}{F_{n+2}}$. Conhecidas as probabilidades, podemos definir

$$\mathbb{P}(T_n = 1) = \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}} \text{ e } \mathbb{P}(T_n = -1) = \frac{F_n}{F_{n+2}}.$$

Note que as variáveis T_n não são identicamente distribuídas. Como Y_n se refere a um passeio que depende de T_n, as probabilidades condicionais $\mathbb{P}(Y_{n+1} \mid Y_n)$ dependem de n, o que torna sua análise mais complicada, pois Y_n não é homogêneo no tempo. Notamos, porém, que limite de $\mathbb{P}(T_n = 1)$ quando n tende ao infinito é $\frac{1}{\alpha}$, onde α é o número de ouro.

Se S_n representar um passeio aleatório que é homogêneo no tempo e no espaço, como definido no Apêndice, subseção 5, no qual fazemos $p = \dfrac{1}{\alpha}$, então para n muito grande Y_n vai mudar de posição quase com a mesma probabilidade que S_n. Apesar de Y_n não ser homogêneo temporalmente, notamos que S_n é homogêneo, e por isso, de análise mais simples.

Portanto, fazendo $p = \dfrac{1}{\alpha}$, e utilizando a equação (20) temos

$$E[S_n] = n \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{\alpha} - 1\right) = n \cdot \left(\frac{2-\alpha}{\alpha}\right).$$

Temos que α é uma das raízes da equação (7), assim podemos escrever

$$\begin{aligned} \alpha^2 - \alpha - 1 &= 0 \\ \alpha^2 - 1 &= \alpha \\ (\alpha+1)(\alpha-1) &= \alpha \\ \alpha - 1 &= \frac{\alpha}{\alpha+1} \end{aligned}$$

como $\alpha^2 = \alpha + 1$, substituindo

$$\begin{aligned} \alpha - 1 &= \frac{\alpha}{\alpha^2} \\ \alpha - 1 &= \frac{1}{\alpha}. \end{aligned} \tag{15}$$

Temos na equação $\alpha^2 = \alpha + 1$ uma outra identidade; somando $(1 - 2\alpha)$ nos dois membros dessa equação, conseguimos a igualdade

$$\begin{aligned} \alpha^2 - 2\alpha + 1 &= 2 - \alpha \\ (\alpha - 1)^2 &= 2 - \alpha \end{aligned}$$

substituindo o que encontramos na equação (15), obtemos

$$\begin{aligned} 2 - \alpha &= \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 \\ 2 - \alpha &= \frac{1}{\alpha^2} \end{aligned}$$

com isso, podemos concluir

$$\frac{2-\alpha}{\alpha} = \frac{1}{\alpha^3}. \tag{16}$$

Assim, voltando no cálculo da esperança do passeio S_n, obtemos

$$E[S_n] = n \cdot \left(\frac{2-\alpha}{\alpha}\right) = \frac{n}{\alpha^3}. \tag{17}$$

A partir da equação (22), obtemos

$$\begin{aligned} E[S_n^2] &= n \cdot \left[1 + \left(2 \cdot \frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 \cdot (n-1)\right] \\ &= n \cdot \left[1 + \left(\frac{2-\alpha}{\alpha}\right)^2 \cdot (n-1)\right], \end{aligned} \tag{18}$$

aplicando em seguida a equação (16), obtemos

$$\begin{aligned} E[S_n^2] &= n \cdot \left[1 + \left(\frac{1}{\alpha^3}\right)^2 \cdot (n-1)\right] \\ &= n \cdot \left[1 + \frac{n-1}{\alpha^6}\right]. \end{aligned}$$

E da equação (23), calculamos

$$\begin{aligned} Var(S_n) &= n \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{\alpha^3}\right)^2\right) \\ &= n\left[1 - \frac{1}{\alpha^6}\right] = n\left[\frac{\alpha^6 - 1}{\alpha^6}\right] = n\left[\frac{\left(\alpha^2\right)^3 - 1}{\alpha^6}\right], \end{aligned}$$

pela equação de Euclides sabemos que $\alpha^2 = \alpha + 1$, assim

$$\begin{aligned} Var(S_n) &= n\left[\frac{(\alpha+1)^3 - 1}{\alpha^6}\right] = n\left[\frac{\alpha^3 + 3\alpha^2 + 3\alpha + 1 - 1}{\alpha^6}\right] \\ &= n\left[\frac{\alpha^2 + 3\alpha + 3}{\alpha^5}\right] = n\left[\frac{\alpha^2 + 3(\alpha+1)}{\alpha^5}\right] \\ &= n\left[\frac{\alpha^2 + 3\alpha^2}{\alpha^5}\right] = n\left[\frac{4\alpha^2}{\alpha^5}\right] \\ &= \frac{4n}{\alpha^3}. \end{aligned} \tag{19}$$

Apesar de não podermos calcular $E[Y_n]$ e $Var(Y_n)$ exatamente, os resultados obtidos para $E[S_n]$ e $Var[S_n]$ (expressões (17) e (19)) nos fornecem uma indicação do comportamente assintótico de Y_n quando n vai a infinito: em média o ganho de terra para a população P_1 tende a infinito, enquanto a variância segue uma tendência de crescimento linear para tempos cada vez maiores.

4 Conclusão

Neste trabalho, desenvolvemos diversas propriedades da seqüência de Fibonacci. Em particular, destacamos que o limite da razão entre um termo da seqüência e seu antecessor tende ao número de ouro. Mostramos também que os termos da seqüência de Gibonacci podem ser obtidos como uma combinação linear de termos da seqüência de Fibonacci.

Terminamos o trabalho construindo um passeio aleatório Y_n que utiliza os termos da sequência de Fibonacci para determinar sua distribuição de probabilidades. Este modelo é espacialmente homogêneo, mas não homogêneo temporalmente. Vimos que, para um valor de n muito grande, o valor de $E[Y_n]$ fica próximo de um passeio aleatório homogêneo no tempo e no espaço, S_n, que depende da constante $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ conhecido como número de ouro.

5 Apêndice: Passeio Aleatório simples em uma dimensão

Considere uma partícula se movendo ao longo de uma reta. Se em determinado instante n ela se encontra na posição x, no instante seguinte ela poderá pular para as posições $x+1$ ou $x-1$ com probabilidade p e $1-p$, respectivamente, como na Figura 10.

Definimos S_n como sendo a posição da partícula após n passos. Então, o processo S_n satisfaz as seguintes probabilidades condicionais

$$\mathbb{P}\left(S_{n+1} = x+1 \mid S_n = x\right) = p \text{ e } \mathbb{P}\left(S_{n+1} = x-1 \mid S_n = x\right) = 1-p.$$

O passeio S_n é homogêneo no tempo e no espaço, pois as probabilidades condicionais não dependem de n e x, respectivamente. A seguir temos a definição formal.

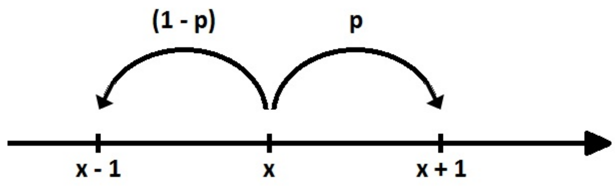

Figura 10: Probabilidade da troca de posições.

Definição 5.1. *Suponha que X_1, X_2, ..., X_n são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, assumindo os valores $X_i = 1$, com probabilidade p ou $X_i = -1$ caso contrário. Seja $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. A sequência $\{S_i, i > 0\}$ é um passeio aleatório simples, com início na origem.*

Para qualquer passeio aleatório simples temos:

- A partícula tem a probabilidade de ir para a direita (Pd) e a probabilidade de ir para esquerda (Pe), e a soma dessas probabilidades é sempre igual a 1;
- Se a $Pd = Pe = \dfrac{1}{2}$ o passeio é dito simétrico;
- A partícula tem seus passos sempre do mesmo tamanho, independente do lado que irá percorrer.

- O passeio aleatório simples será homogêneo no tempo e no espaço, isto é

$$\mathbb{P}(S_n = j|S_0 = x) = \mathbb{P}(S_{n+k} = j + y|S_k = x + y).$$

Vamos obter as expressões da esperança e da variância de S_n, para cada n. Calculando a esperança, ou seja $E[S_n]$, temos

$$\begin{aligned} E[S_n] &= E\left[\sum_{k=1}^{n} X_k\right] = \sum_{k=1}^{n} E[X_k] \\ &= \sum_{k=1}^{n}(1 \cdot p + (-1) \cdot (1-p)) \\ &= \sum_{k=1}^{n}(2p-1) \\ &= n(2p-1). \end{aligned} \tag{20}$$

Para calcular $Var(S_n)$, note inicialmente que S_n^2 pode ser escrito como

$$\begin{aligned} S_n^2 &= \left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^2 \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) \cdot \left(\sum_{r=1}^{n} X_r\right) \\ &= \sum_{k,r} X_k \cdot X_r. \end{aligned} \tag{21}$$

Agora, calculando $E[S_n^2]$, temos

$$\begin{aligned} E[S_n^2] &= E\left[\sum_{k,r} X_k \cdot X_r\right] \\ &= \sum_{k,r} E[X_k \cdot X_r] \\ &= \sum_{k=r} E[X_k \cdot X_r] + \sum_{k \neq r} E[X_k \cdot X_r] \\ &= \sum_{k=1}^{n} E[X_k^2] + \sum_{k \neq r} E[X_k] \cdot E[X_r] \\ &= \sum_{k=1}^{n} 1 + \sum_{k \neq r}(1 \cdot p - 1 \cdot (1-p))^2 \\ &= n + (2p-1)^2 \cdot (n^2 - n). \end{aligned} \tag{22}$$

Assim podemos obter a variância do passeio aleatório simples calculando

$$\begin{aligned} Var(S_n) &= E[S_n^2] - (E[S_n])^2 \\ &= n + (2p-1)^2 \cdot (n^2 - n) - [n \cdot (2p-1)]^2 \\ &= n + (2p-1)^2 \cdot (n^2 - n) - n^2 \cdot (2p-1)^2 \\ &= n + (2p-1)^2 \cdot (n^2 - n - n^2) \\ &= n + (2p-1)^2 \cdot (-n) \\ &= n \cdot (1 - (2p-1)^2) \\ &= n \cdot (1 - (4p^2 - 4p + 1)) \\ &= n \cdot (4p - 4p^2) \\ &= 4pn(1-p). \end{aligned} \tag{23}$$

Referências

[1] Carl B. Boyer and Uta C. Merzbach. *História da Matemática*. Blücher, São Paulo, 2012.

[2] David M. Burton. *Elementary Number Theory*. University of New Hampshire, New York, 6th edition, 2007.

[3] Euclides. *Os Elementos*. Unesp, São Paulo, 2009.

[4] Howard Eves. *Introdução à História da Matemática*. Editora da Unicamp, Campinas, 2004.

[5] Martin Griffiths. Random walks arising from a fibonacci's-rabbits scenario. *The Mathematical Gazette*, pages 60–67, 2015.

[6] Elon Lages Lima. *Análise Real*, volume 1. IMPA Coleção Matemática Universitária, Rio de Janeiro, 2004.

[7] Ronald W. Shonkwiler and James Herod. *Mathematical Biology an introduction With Maple and Matlab*. Springer, Dordrech, 2009.