Existência de soluções para um problema de quarta ordem assintoticamente linear quando a não-linearidade cruza autovalores [1]

Monteiro, E.[a]

[a] Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Alfenas, Campus Alfenas, Rua Gabriel Monteiro da Silva, 700, CEP 37130-000 - Alfenas - MG. evandromonteiro@unifal-mg.edu.br

Neste trabalho, estamos interessados em obter existência e multiplicidade de soluções para a equação de quarta ordem

$$\begin{cases} \Delta^2 u + c\Delta u = g(x,u) & \text{em} \quad \Omega \\ u = \Delta u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado com fronteira suave $\partial\Omega$. Consideramos a não-linearidade $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como uma função de classe C^1. Além disso, suporemos g assintoticamente linear e $g(x,0) = 0$, ou seja, a função nula é uma solução de (1). A constante c é um número real que caracteriza o funcional associado ao problema (1).

O estudo do problema (1) iniciou-se através do estudo da equação

$$\begin{cases} \Delta^2 u + c\Delta u = b[(u+1)^+ - 1] & \text{em} \quad \Omega \\ u = \Delta u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{2}$$

Nos trabalhos de A. C. Lazer e P. J. McKenna [1] e P. J. McKenna e W. Walter [2] e [3] foi apontado que o problema (2) é um bom modelo para estudar ondas viajantes sobre pontes suspensas. Além disso, nesses trabalhos os autores observaram que o problema (2) é também interessante quando a não-linearidade $(u + 1)^+ - 1$ é substituída por uma não-linearidade mais geral $g(., u)$.

Entre os trabalhos com não-linearidade mais geral $g(., u)$, conforme abordado neste trabalho, destacamos os trabalhos de A. M. Micheletti e A. Pistoia [4] e [5], e A. Qian e S. Li [9]. No trabalho [4] as autoras obtiveram existência de duas soluções para o problema (1) com $c < \lambda_1$ quando $b > \lambda_1(\lambda_1 - c)$ e $g(., s) = bf(., s)$ e de três soluções quando b está próximo de $\lambda_k(\lambda_k - c)$. A função $f(., s)$ é subcrítica e sua primitiva $F(., s)$ tem comportamento subquadrática *q.t.p.* em Ω e para todo $s \in \mathbb{R}$. No trabalho [5] as autoras mostraram que se $c > \lambda_1$ e $b < \lambda_1(\lambda_1 - c)$ existem duas soluções não triviais para (1) com $g(., s) = bf(., s)$. Neste mesmo trabalho verificaram que se $\lambda_k \leq c \leq \lambda_{k+1}$, $f(s) = (s + 1)^+ - 1$ e $\lambda_k < b < \lambda_{k+1}$ então o problema (1) possui somente a solução trivial. As técnicas aplicadas nestes trabalhos são basicamente técnicas variacionais que consiste em aplicações do Teorema do Passo da Montanha e variações do Teorema do Enlace. No trabalho [8] A. Qian e S. Li mostraram a existência de três soluções não triviais para o problema assintoticamente linear. Duas destas soluções são obtidas pelo Teorema do Passo da Montanha (uma positiva e uma negativa) e uma terceira solução via Teorema do Ponto de Sela.

Denotando por $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_j \leq \ldots$ os autovalores de $(-\Delta, H_0^1)$ e φ_j as autofunções associadas a λ_j, então $\mu_j = \lambda_j(\lambda_j - c)$ são os autovalores de $(\Delta^2 + c\Delta, V)$ com autofunções φ_j.

[1] *O autor agradece a FAPEMIG pelo apoio financeiro.*

Sejam

$$g_0 := \lim_{t \to 0} \frac{g(x,t)}{t}, \qquad \text{uniformemente em } \Omega$$

$$g_\infty := \lim_{|t| \to \infty} \frac{g(x,t)}{t}, \qquad \text{uniformemente em } \Omega.$$

Em nosso trabalho mostramos existência de ao menos duas soluções não triviais para o problema (1) quando o parâmetro $c < \lambda_1$ e os limites g_0 e g_∞ interagem com o espectro do operador $\Delta^2 + c\Delta$ das seguintes formas: $\mu_{k-1} \leq g_0 < \mu_k$, $\mu_{k-1} < g(x,t)/t$ e $\mu_m < g_\infty < \mu_{m+1}$, onde $k \geq 2$, $m \geq k+1$; $\mu_1 < g_\infty < \mu_2$ e que existe $m \geq 2$ tal que $\mu_m < g_0 < \mu_{m+1}$. Além disso, estudamos existência de solução quando o parâmetro $\lambda_k < c < \lambda_{k+1}$, $k \geq 1$.
As técnicas utilizadas em nosso trabalho consistem basicamente em aplicações de teoremas do tipo min-max e Teoria de Morse.
Os resultados obtidos podem ser encontrados em [6] e [7].

Referências

[1] A. C. Lazer and P. J. McKenna. *Large-amplitude periodic oscillations in suspension bridges: some new connections with nonlinear analysis.* SIAM, 32: 537-578, 1990.

[2] P. J. McKenna and W. Walter. *Nonlinear oscillations in a suspension bridge.* Arch. Ration. Mech. Anal., 98: 167-177, 1987.

[3] P. J. McKenna and W. Walter. *Travelling waves in a suspension bridge.* SIAM J. Appl. Math., 50(3): 703-715, June, 1990.

[4] A. M. Micheletti and A. Pistoia. *Multiplicity results for a fourth-order semilinear elliptic problem.* Nonlinear Analysis, Theory Methodes and Applications, 31(7): 895-908, 1998.

[5] A. M. Micheletti and A. Pistoia. *Nontrivial solutions for some fourth-order semilinear elliptic problems.* Nonlinear Analysis 34: 509-523, 1998.

[6] E. Monteiro. *Asymptotically linear fourth-order elliptic problems whose nonlinearity crosses several eigenvalues.* Electron. J. Differential Equations 145: 1-11, 2011.

[7] E. Monteiro, *Multiplicidade de Soluções para Equação de Quarta Ordem.* 2011. 93f. Tese (Doutorado em Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Matemática, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2011.

[8] A. Qian and S. Li. *Multiple Solutions for a fourth-order asymptotically linear elliptic problem.* Acta Mathematica Sinica, English Series, 22 (4): 1121-1126, 2006.

[9] A. Qian and S. Li. *On the existence of nontrivial solutions for a fourth-order semilinear elliptic problem.* Abstract and App. Analysis 6: 673-683, 2005.