
Introdução ao Cálculo Fracionário com aplicações

Matheus Dias de Carvalho

matheusdiaspaes@gmail.com

Universidade Federal de São João del-Rei, Ouro Branco, MG, Brazil

José Eloy Ottoni

jeottoni@ufsj.edu.br

Universidade Federal de São João del-Rei, Ouro Branco, MG, Brazil

Resumo

No presente trabalho pretende-se fazer uma introdução ao Cálculo Fracionário, que é o Cálculo com ordens de integração e derivação generalizadas. Para isto, é realizada uma abordagem histórica e conceitual, tendo como objetivo aguçar o interesse pelo assunto, além de melhor situar os leitores leigos na área. Uma apreciação adequada do conteúdo do presente trabalho, bem como do sentido essencial do Cálculo Fracionário faz uso de conceitos não muito avançados que um graduando de Matemática, Física ou Engenharia em geral detém, como um conhecimento prévio elementar sobre Equações Diferenciais Ordinárias e Parciais, além das regras básicas do Cálculo Diferencial e Integral tradicional. Para estudo inicial se faz necessário o entendimento de algumas funções especiais, sendo elas: a Gama, a Beta e a de Mittag-Leffler, e que serão apresentadas com a devida profundidade requerida para o entendimento geral do texto. Dentro do Cálculo Fracionário existem diversas formulações, neste texto serão estudadas as de Caputo, Grünwald-Letnikov e Riemann-Liouville, sendo essas as mais conhecidas e utilizadas. Dentro dessas formulações será feita a diferenciação entre integral e derivada fracionária para facilitar o estudo. E por último serão analisadas algumas aplicações clássicas interessantes, já generalizadas com o Cálculo Fracionário; um problema de uma variável, o movimento harmônico simples, e um problema de várias variáveis, o fenômeno de difusão.

Palavras-chave

Cálculo Fracionário, Funções especiais, Aplicações.

1 Introdução

O Cálculo Fracionário pretende ser o cálculo da modernidade, onde a limitação das ordens de integração e derivação aos números inteiros é superada e se passa a trabalhar com as ordens desses operadores em valores arbitrários, reais ou complexos. Tamanha extensão de significado é comparável à que ocorreu na antiguidade quando surgiu a necessidade do conceito de números racionais, e na sequência e em momentos posteriores, dos irracionais, dos reais, etc [4]. Essa mesma necessidade de extensão dos corpos numéricos que surgiu ainda no Egito Antigo, apareceu na modernidade em relação às ordens da derivação e integração, na qual a modelagem de certos fenômenos parecem compelir a um estudo de modelos que envolvam operadores de ordens fracionárias [3].

O Cálculo Fracionário vem se tornando alvo de estudos em todo o mundo, não sendo considerado atualmente um assunto “quente” por acaso, o número de artigos publicados na área vem crescendo a cada década. Considera-se que seu nascimento se deu no ano de 1695, numa troca de correspondências entre o marquês de l’Hôpital e Leibniz, ainda durante o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral clássico. Nestas correspondências Leibniz incitou a possível generalização da derivada de ordem inteira para uma ordem arbitrária, l’Hôpital então questionou-o sobre o caso especial em que a ordem da derivada fosse um meio. A carta resposta, datada de 30 de setembro de 1695, apresentava uma reflexão acertada de Leibniz, na qual afirmava que consequências importantíssimas adviriam desses desenvolvimentos [6].

Com o intuito de compreender melhor essa nova ferramenta, a partir do século XVIII, iniciam-se os estudos do Cálculo Fracionário, como os apresentados por Euler e Lagrange, sendo o último responsável por uma das propriedades mais úteis e elementares dentro do cálculo, fracionário ou não, conhecida como lei dos expoentes:

$$\frac{d^m}{dx^m} \frac{d^n}{dx^n} y = \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}} y. \quad (1)$$

Mas somente no século seguinte o estímulo ao estudo desses objetos se deu de forma mais sistemática, como principais contribuintes desse período têm-se matemáticos como Laplace, Lacroix e Joseph Fourier [2].

Até o ano de 1823 o Cálculo Fracionário não havia sido aplicado a nenhum problema específico de matemática ou qualquer outra área do conhecimento, mas foi neste ano que Niels Abel, matemático norueguês, conseguiu solucionar a equação integral fracionária do famoso problema da tautócrona com o ¹CF, no qual aparece uma integral de ordem meia [2].

Estimulados por essa nova perspectiva da aplicação do Cálculo Fracionário, vários autores desenvolveram definições para derivadas e integrais de ordem fracionária nas décadas subsequentes, porém algumas dessas definições entraram em contradição aparentes entre si. Uma dessas definições, surgida ainda no século XIX; é a proposta por Liouville, que posteriormente foi reformulada por Riemann, promovendo a importantíssima definição denominada Derivada (e Integral) de Riemann-Liouville [3], que será apresentada na seção 3.1.

O final do século XIX e o século XX trouxeram nomes importantes no desenvolvimento matemático da área, como Grünwald, Letnikov, Caputo, Riesz, Weyl e outros, sendo que o maior desenvolvimento das aplicações do Cálculo Fracionário se deu a partir da década de 70, quando avolumou-se o emprego do CF nos mais diversos ramos da Ciência. Nestes anos o CF já havia sido aplicado em várias áreas, como: Biologia, Eletroquímica, Estatística, Reologia e Fenômenos

¹A abreviação CF neste trabalho se refere ao Cálculo Fracionário. Atente-se também ao fato de que “Fracionário” é um termo infeliz para *ordem arbitrária*, que pode ser uma fração, um real qualquer, ou mesmo um número complexo.

de Difusão [3].

Em junho de 1974, ocorreu na Universidade de New Haven, nos Estados Unidos, a primeira conferência internacional sobre o CF. Posteriormente outra conferência sobre o assunto foi realizada na Universidade de Strathclyde, em Glasgow, Escócia, no ano de 1984. A terceira aconteceu em 1989 na Universidade de Nihon, em Tóquio, Japão, dentre outras. Essas conferências surtiram grande efeito no estudo do CF, pois incentivaram vários novos pesquisadores, ao passo que motivara os já estudiosos. Pode-se perceber tamanho crescimento nesse campo tendo em vista que entre os anos 1975 até o ano 2000, mais ou menos 600 artigos sobre o assunto foram publicados. Desde então o aumento do interesse sobre o desenvolvimento e aplicação do cálculo de ordem arbitrária cresce exponencialmente no mundo, inclusive no Brasil [3].

Um grande desafio no Cálculo Fracionário é conseguir uma representação geométrica deste, e isso vem sendo trabalhado por diversos autores renomados da área na atualidade, entre eles: Igor Podlubny, Tenreiro Machado, Lorenzo e Hartley. Estes dois últimos em 1998 conseguiram algo do tipo através de uma análise numérica utilizando a derivada de Grünwald-Letnikov [3].

No Brasil, o primeiro a estudar o Cálculo Fracionário foi o físico Aguinaldo Ricieri, que em 1993 mencionou algo sobre o CF em seus estudos. Existem ainda grupos de estudos no Paraná que surgiram no final do século XX, estes são formados por físicos liderados por Abilio Lenzi [3]. Vários outros grupos existem no Brasil, como na Unicamp, Unesp, UFMG, CBPF, UFRRJ, UFSJ.

A Universidade de Campinas passa a ser o grande centro de estudos relacionados ao Cálculo Fracionário, onde no ano de 2008, Danilo de Castro Rosendo publica sua dissertação de mestrado, na qual faz um estudo sobre a função de Mittag-Leffler e Equações Diferenciais Fracionárias. No ano de 2009, Rubens de Figueiredo Camargo publica sua tese de doutorado, fazendo um estudo sobre Cálculo Fracionário Local e Funções Contínuas não-diferenciáveis. Em 2012, Felix Silva Costa apresenta sua tese de doutorado sobre a função H de Fox e Aplicações no Cálculo Fracionário. E para finalizar, no ano de 2015 foi lançado o primeiro livro em língua portuguesa sobre o Cálculo Fracionário, com autoria de Rubens de Figueiredo Camargo e Edmundo Capelas de Oliveira, mostrando o grande potencial deste assunto avançar no Brasil.

2 Conceitos Básicos

Antes de apresentar como pode-se realizar operações de derivação e/ou integração de ordem não inteira, faz-se necessário a apresentação das ferramentas básicas utilizadas nesse procedimento, na sequência, três dessas ferramentas indispensáveis do CF - a Função Gama, a Função Beta e a Função de Mittag-Leffler.

2.1 Função Gama

A Função Gama ou função de Euler de segunda espécie foi desenvolvida com o intuito de se generalizar o conceito de *fatorial de um número natural*. Dessa forma, definindo-se adequadamente, é possível computar o fatorial até de números complexos. Entretanto, a Função Gama possui pólos no 0 e em todos os inteiros negativos - e portanto não pode ser usada para se calcular o valor do fatorial desses números (a função diverge para eles). A definição mais comum da função Gama é sua forma integral, que está representada a seguir:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad z \neq 0, -1, -2, \dots \quad (2)$$

Porém também podemos defini-la como um limite, ou pela representação de Weierstrass, respectivamente descritas pelas equações (3) e (4).

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{(z)_n}, \quad (3)$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}}. \quad (4)$$

A Função Gama é particularmente útil na definição de integral fracionária e no Cálculo Fracionário de maneira geral, como será evidente neste trabalho. Para um melhor visualização do comportamento da Função Gama para valores reais de seu argumento, seu gráfico pode ser visto na figura abaixo:

Com base em uma análise rápida pode-se perceber um crescimento abrupto da Função Gama, como era de se esperar, já que se trata de uma generalização do fatorial.

Uma das principais propriedades dessa função é a seguinte relação de recorrência:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad (5)$$

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (6)$$

A equação (5) provavelmente é a mais importante de todas as propriedades, que pode ser facilmente demonstrada através da integração por partes da integral em (2). Essa propriedade nos dá a possibilidade de conhecer a Gama de valores que diferem de z por algum inteiro, assim "escapando" de integrais impróprias. Lembrando que essa propriedade não pode ser utilizada para inteiros negativos e para o zero.

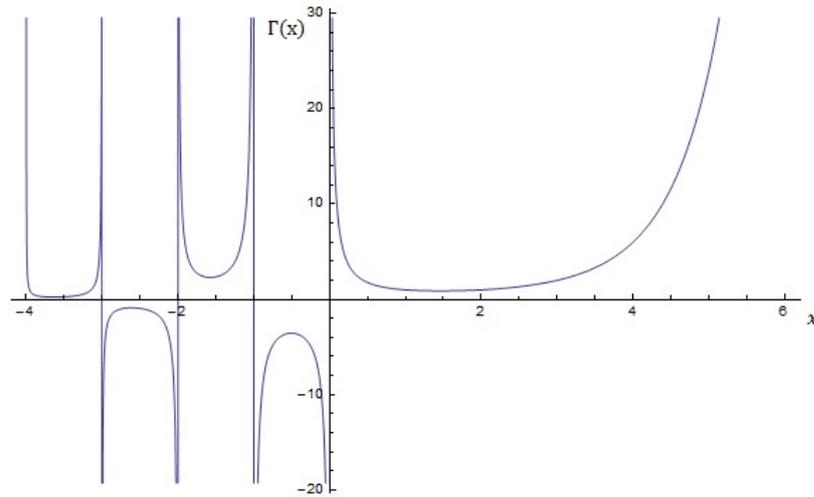


Figura 1: Função Gama. [7]

Existem outras propriedades que são menos utilizadas e necessitam de uma demonstração mais elaborada. A equação (8) é conhecida como fórmula da duplicação de Legendre:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\text{sen}(\pi z)}, \quad (7)$$

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right). \quad (8)$$

Um resultado bem interessante e facilmente demonstrável é referente ao valor da $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, com base nesse se pode calcular o fatorial de outros números que diferem por algum inteiro deste. O seu resultado está expresso a seguir:

$$\Gamma(1/2) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt = \sqrt{\pi}. \quad (9)$$

Uma forma de demonstração deste resultado é utilizando a propriedade expressa na equação (7), substituindo o parâmetro z por $\frac{1}{2}$, tem-se:

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = \frac{\pi}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \pi, \quad (10)$$

logo:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \quad (11)$$

2.2 Função Beta

A Função Beta ou função de Euler de primeira espécie também apresenta significativa relevância no Cálculo Fracionário. A definição na forma integral é:

$$\beta(p, q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt, \quad \Re(p) > 0, \Re(q) > 0. \quad (12)$$

Para se obter a forma trigonométrica, se substitui a variável de integração t por $\cos^2\theta$ na equação (12), que também é uma representação muito útil da Função Beta.

$$\beta(p, q) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1}\theta \sin^{2q-1}\theta d\theta, \quad \Re(p) > 0, \Re(q) > 0. \quad (13)$$

Também se consegue a forma racional quando se substitui a variável de integração t por $\frac{u}{1+u}$ na equação (12):

$$\beta(p, q) = \int_0^\infty \frac{u^{p-1}}{(1+u)^{p+q}} du, \quad \Re(p) > 0, \Re(q) > 0. \quad (14)$$

Outra forma importante é a generalização da Função Beta, em que o limite superior passa a ser um número arbitrário a , pode-se obtê-la a partir da substituição da variável de integração t por $\frac{y}{a}$:

$$\beta(p, q) = \frac{1}{a^{p+q-1}} \int_0^a y^{p-1}(a-y)^{q-1} dy, \quad \Re(p) > 0, \Re(q) > 0. \quad (15)$$

A Função Beta possui determinada relação com a Função Gama, que é expressa pela fórmula a seguir:

$$\beta(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \quad (16)$$

2.3 Função de Mittag-Leffler

Juntamente com as funções anteriores definidas por Euler, a Função de Mittag-Leffler (na verdade, toda uma *classe* de funções), é de presença ubíqua no CF. A Função de Mittag-Leffler trata-se de uma generalização da exponencial, e tem um papel equivalente na resolução de Equações Diferenciais Fracionárias lineares ao que a função exponencial tem para as Equações Diferenciais lineares de ordens inteiras. A Função de Mittag-Leffler foi introduzida primeiramente em 1903 pelo matemático sueco Magnus Gösta Mittag-Leffler [5], e posteriormente generalizada contendo mais parâmetros. Essa função é dependente de um parâmetro complexo α , como se mostra na série a seguir:

$$E_{\alpha}(x) = 1 + \frac{x}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{x^2}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \frac{x^3}{\Gamma(3\alpha + 1)} + \dots + \frac{x^n}{\Gamma(n\alpha + 1)} + \dots \quad (17)$$

Para o caso particular onde $\alpha = 1$, a função de Mittag-Leffler se reduz à própria exponencial.

$$E_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma(n + 1)} = e^x. \quad (18)$$

No ano de 1905, a função de Mittag-Leffler passou por uma alteração, que foi a adição de um segundo parâmetro, sendo essa generalização que será utilizada no presente trabalho [5]. A forma final da função de Mittag-Leffler com dois parâmetros está expressa à seguir:

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma(n\alpha + \beta)}. \quad (19)$$

A título de curiosidade, é fácil mostrar que existem alguns casos particulares da função de Mittag-Leffler com dois parâmetros que se relacionam com funções já conhecidas:

$$E_{2,1}(x^2) = \cosh(x), \quad (20)$$

$$E_{2,2}(x^2) = \frac{\sinh(x)}{x}. \quad (21)$$

3 Formulações do Cálculo Fracionário

O Cálculo Fracionário possui diversas formulações, entretanto, com o tempo, aparentemente muitas delas entravam em contradição, dando resultados diferentes para uma mesma aplicação, o que gerava uma certa controvérsia. Existe hoje toda uma verdadeira profusão de definições diferentes e com propriedades distintas. Serão apresentadas aqui as características das três definições principais: Riemann-Liouville, Caputo e Grünwald-Letnikov. Porém, no presente trabalho se utilizará, nas aplicações, apenas a definição de Caputo, em sua grande parte devido a presença de valores iniciais com interpretação física, pois, as derivadas destes são de ordem inteira, conforme será visto.

Neste trabalho, as derivadas e integrais de ordem arbitrária terão uma notação muito simples; para a derivada de ordem α de uma função $f(x)$, a representação será $D^{\alpha}f(x)$, e para integrais de ordem arbitrária utilizar-se-á $J^{\alpha}f(x)$.

Uma curiosidade que muitas vezes passa despercebida no Cálculo de ordem inteira, mas que porém fica em maior evidência no Cálculo Fracionário é que derivar uma função e depois integrar, assim como integrar e depois derivar a mesma função, nem sempre devolvem o mesmo

resultado, como fica explícito a seguir (Teorema Fundamental do Cálculo):

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(u)du = f(x), \tag{22}$$

$$\int_a^x \frac{d}{du} f(u)du = f(x) - f(a). \tag{23}$$

A observação desse fato é importante para a distinção de algumas definições.

3.1 A integral de ordem fracionária de Riemann-Liouville

Para definir a integral de ordem fracionária deve-se generalizar a ideia de integral iterada, de modo que se consiga fazer cálculos desta através de uma única integral. Primeiramente, considera-se a integral de ordem 1 de uma função $f(x)$:

$$J^1 f(x) = \int_0^x f(t)dt. \tag{24}$$

De forma análoga se define a integral dupla:

$$J^2 f(x) = \int_0^x \int_0^{t_1} f(t)dt dt_1. \tag{25}$$

Neste caso, está se fazendo uma integral de tipo 1 com a seguinte área de integração:

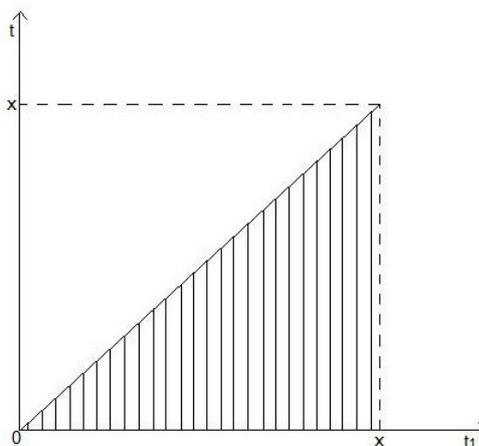


Figura 2: Área de integração de tipo 1.

Mudando o modo de integração para o tipo 2, tem-se que:

$$J^2 f(x) = \int_0^x \int_t^x f(t) dt_1 dt. \tag{26}$$

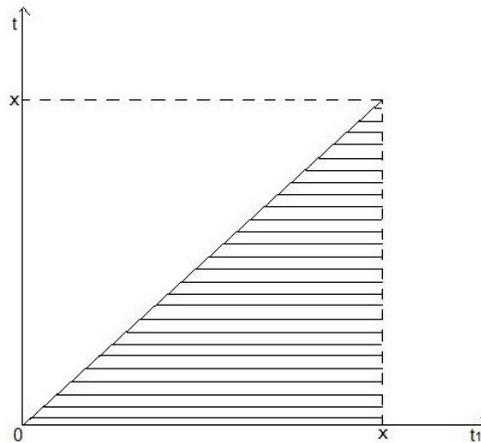


Figura 3: Área de integração de tipo 2.

Logo, a integração em (26) pode ser feita com uma única integral simples:

$$J^2 f(x) = \int_0^x (x - t) f(t) dt. \tag{27}$$

Por indução, é fácil mostrar que:

$$J^{n+1} f(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x (x - t)^n f(t) dt. \tag{28}$$

Fazendo o uso de J^α como a notação da integral de uma ordem positiva real arbitrária, e já que com a Função Gama pode-se “calcular” o fatorial de α , define-se então que:

$$J^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x - t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad \alpha > 0. \tag{29}$$

3.2 Formulação da derivada fracionária de Grünwald-Letnikov

A formulação da derivada fracionária de Grünwald-Letnikov parte da definição de derivada do Cálculo Diferencial clássico, onde a definição da derivada é:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}. \tag{30}$$

E da derivada segunda:

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h) - f(x+h)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}{h}. \quad (31)$$

Logo:

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2}. \quad (32)$$

Generalizando esse resultado para derivadas de ordem n-ésimas, chega-se ao seguinte somatório:

$$f^{(n)}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} f(x - mh). \quad (33)$$

Onde $f^{(n)}(x)$ representa a n-ésima derivada. Conhecendo as propriedades dos coeficientes binomiais, sabe-se que:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r-1)}{r!}. \quad (34)$$

Generalizando o resultado obtido em (33), onde α é um número arbitrário, com $\alpha \in \mathbb{R}$ e o coeficiente binominal expresso em termos da função Gama, se obtêm a formulação geral de Grünwald-Letnikov:

$$\frac{d^\alpha}{[d(x-a)]^\alpha} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{x-a}{h} \rfloor} (-1)^m \frac{\Gamma(\alpha+1)}{m! \Gamma(\alpha-m+1)} f(x - mh). \quad (35)$$

3.3 Formulação da derivada fracionária de Riemann-Liouville

Definida a integral de ordem arbitrária, fica simples obter a derivação fracionária. Na formulação de Riemann-Liouville para derivada, primeiramente se faz uma integração de ordem arbitrária e posteriormente uma derivação de ordem inteira, como na equação a seguir:

$$D^\alpha f(x) = D^m [J^v f(x)], \quad m = [\alpha], \quad v = m - \alpha. \quad (36)$$

O grande problema dessa formulação é que ao utilizá-la para resolução de equações diferenciais fracionárias por transformada de Laplace, não se obtêm valores iniciais com derivada inteira, o que não é fisicamente interpretável.

Um detalhe bem interessante que deve ser ressaltado é que a derivada de uma constante, na formulação de Riemann-Liouville, nem sempre é nula.

3.4 Formulação da derivada fracionária de Caputo

A derivada fracionária de Caputo é, de certa forma, muito similar à de Riemann-Liouville, somente diferindo pela ordem das operações, o que pode parecer a primeira vista um simples detalhe, porém possui consequências relevantes, levando a utilizar preferencialmente uma no lugar da outra.

Na formulação de Caputo se faz em primeiro lugar uma derivação de ordem inteira e posteriormente uma integração de ordem fracionária, como fica explícito na equação a seguir:

$$D_*^\alpha f(x) = J^v [D^m f(x)], \quad m = [\alpha], \quad v = m - \alpha. \quad (37)$$

Na equação (37) é possível notar a presença do asterisco no subíndice da notação de derivada, essa é a notação usual para diferenciar a derivada fracionária de Caputo para a de Riemann-Liouville.

Na formulação de Caputo há uma vantagem quando utilizada em aplicações que envolvam Equações Diferenciais Fracionárias, que é a presença de valores iniciais fisicamente interpretáveis, e por isso sua preferência no presente trabalho. Outro fator é que nessa formulação, a derivada qualquer de uma constante é sempre nula, o que faz com que ganhe crédito em relação à formulação de Riemann-Liouville - isso é relevante quando se procura interpretar as derivadas como taxas de variação e se quer calcular a taxa de uma constante, de modo que seja nula.

3.5 Exemplo de cálculos em CF:

Nesta seção serão realizados os cálculos das derivadas de ordem $\frac{1}{2}$ da função x^2 de acordo com as duas últimas definições.

Utilizando primeiramente a definição de Riemann-Liouville, realiza-se a integração de ordem $\frac{1}{2}$ e em seguida a derivação de ordem 1 da função:

$$D^{\frac{1}{2}} x^2 = D[J^{\frac{1}{2}} x^2]. \quad (38)$$

Fazendo o uso da equação (29), calcula-se a operação dentro dos colchetes:

$$J^{\frac{1}{2}} x^2 = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{x-t}} dt. \quad (39)$$

Fazendo a substituição de $x-t$ por u e sabendo que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$:

$$J^{\frac{1}{2}} x^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{(x-u)^2}{u^{\frac{1}{2}}} du. \quad (40)$$

Este cálculo pode ser realizado através de uma associação com a Função Beta, utilizando a equação (15):

$$J^{\frac{1}{2}}x^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{(x-u)^2}{u^{\frac{1}{2}}} du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} x^{\frac{5}{2}} \beta\left(\frac{1}{2}, 3\right). \quad (41)$$

Aplicando a relação entre a função beta e a função gama, dada pela equação (16), encontra-se que:

$$J^{\frac{1}{2}}x^2 = \frac{x^{\frac{5}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(3)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{7}{2}\right)} = \frac{16}{15\sqrt{\pi}} x^{\frac{5}{2}}. \quad (42)$$

Derivando uma vez o resultado obtido, tem-se a resposta pela formulação de Riemann-Liouville:

$$D^{\frac{1}{2}}x^2 = D[J^{\frac{1}{2}}x^2] = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} x^{\frac{3}{2}}. \quad (43)$$

Utilizando agora a formulação de Caputo, que é dada por:

$$D_*^{\frac{1}{2}}x^2 = J^{\frac{1}{2}}[Dx^2]. \quad (44)$$

Sabendo que:

$$Dx^2 = 2x. \quad (45)$$

Tem-se que:

$$D_*^{\frac{1}{2}}x^2 = 2J^{\frac{1}{2}}x. \quad (46)$$

Utilizando a equação (29):

$$D_*^{\frac{1}{2}}x^2 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{t}{\sqrt{x-t}} dt. \quad (47)$$

Substituindo $x - t$ por u :

$$D_*^{\frac{1}{2}}x^2 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{x-u}{u^{\frac{1}{2}}} du. \quad (48)$$

Realizando novamente as associações com a função beta, equação (15), além de utilizar a propriedade dada pela equação (16), tem-se que:

$$\begin{aligned} D_*^{\frac{1}{2}}x^2 &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{x-u}{u^{\frac{1}{2}}} du = \frac{2}{\sqrt{\pi}} x^{\frac{3}{2}} \beta\left(\frac{1}{2}, 2\right) \\ &= \frac{2x^{\frac{3}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(2)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} x^{\frac{3}{2}}. \end{aligned} \quad (49)$$

Esse resultado mostra que as formulações de Caputo e Riemann-Liouville são equivalentes para este exemplo.

4 Aplicações do CF

4.1 O Oscilador Harmônico

O Oscilador Harmônico Fracionário se trata de uma formulação mais geral do problema clássico do sistema massa-mola, com auxílio das poderosas ferramentas desenvolvidas no CF. Este é modelado por uma equação diferencial que envolve a massa da mola (m), o fator de atrito (b) e a constante de elasticidade da mola (k), onde a solução deste sistema é a equação que representa a posição da massa, aqui representada por $x(t)$, com o passar do tempo. Para este sistema é importante que seja mencionada a posição inicial da massa ($x(0)$) e a velocidade inicial ($x'(0)$), assim se obtém uma solução única.

A equação geral pode ser escrita da seguinte forma:

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + b \frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = 0. \quad (50)$$

Em um caso simplificado, considera-se que a resistência do meio é nula ($b = 0$). Assim a equação (50) se torna:

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + kx(t) = 0. \quad (51)$$

A versão fracionária desse sistema é:

$$m \frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} + kx(t) = 0, \quad 1 < \alpha \leq 2, \quad (52)$$

recuperando a equação (51) quando $\alpha = 2$. O símbolo $\frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha}$ representa a alfa-ésima derivada em uma formulação qualquer. Conforme já adiantado, aqui os cálculos serão efetuados com a definição de Caputo.

Dividindo os dois membros da equação (52) por m , tem-se:

$$\frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} + \frac{k}{m} x(t) = 0, \quad (53)$$

Se define agora a grandeza ω , que representa a frequência da mola, definindo-se $\omega^\alpha = \frac{k}{m}$. Um cuidado especial deve ser tomado em relação a dimensão da frequência, onde esta possui dimensão dependente de α da seguinte forma:

$$[\omega^\alpha] = \frac{kg}{s^\alpha}. \quad (54)$$

Logo:

$$\frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} + \omega^\alpha x(t) = 0. \quad (55)$$

Para resolução da equação (55) se utiliza a transformada de Laplace. Aplicando a transfor-

mada nos dois membros (vide apêndice):

$$s^\alpha X(s) - s^{\alpha-1}x(0) - s^{\alpha-2}x'(0) + w^\alpha X(s) = 0. \quad (56)$$

$X(s)$ nessa equação representa a transformada de Laplace da função $x(t)$. Isolando $X(s)$:

$$X(s) = \frac{x(0)s^{\alpha-1}}{s^\alpha + w^\alpha} + \frac{x'(0)s^{\alpha-2}}{s^\alpha + w^\alpha}, \quad (57)$$

Sem perda de generalidades por questão de modelagem do sistema, será escolhido que a mola está na posição inicial x_0 e possui velocidade inicial nula ($x'(0) = 0$). Assim a equação (57) se torna:

$$X(s) = \frac{x_0 s^{\alpha-1}}{s^\alpha + w^\alpha}. \quad (58)$$

Para encontrar a transformada de Laplace inversa dessa função, utiliza-se da equação a seguir, que é demonstrada no apêndice 6.2:

$$\mathcal{L}\{t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(-bt^\alpha)\} = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha + b}. \quad (59)$$

Com o auxílio desta equação, se obtêm a solução para o problema do oscilador harmônico fracionário proposto:

$$x(t) = x(0)E_{\alpha,1}(-\omega^\alpha t^\alpha). \quad (60)$$

Gráficos com a variação da posição ao longo do tempo para diferentes valores de alpha podem ser visto na figura a seguir. Percebe-se que, para valores menores de alpha, o sistema tem um comportamento muito similar ao sistema amortecido, com a perda de energia mecânica devido ao amortecimento, embora a equação do Oscilador Fracionário **não contenha o termo de fricção** - o que sugere uma nova maneira de se modelar essas forças!

Para construção do plano de fase do oscilador harmônico (gráfico velocidade versus posição), se faz necessário desenvolver uma equação que represente a velocidade do sistema com o passar do tempo. Para isso será útil a equação da posição na sua forma de série de potências, que por sua vez é obtida a partir da equação anterior e aplicando a definição da função de Mittag-Leffler:

$$x(t) = x_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n w^{\alpha n} t^{n\alpha}}{\Gamma(\alpha n + 1)}. \quad (61)$$

Pela definição, velocidade é a derivada da posição em relação ao tempo, assim:

$$x'(t) = x_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n w^{\alpha n} t^{\alpha n - 1} n\alpha}{\Gamma(\alpha n + 1)}. \quad (62)$$

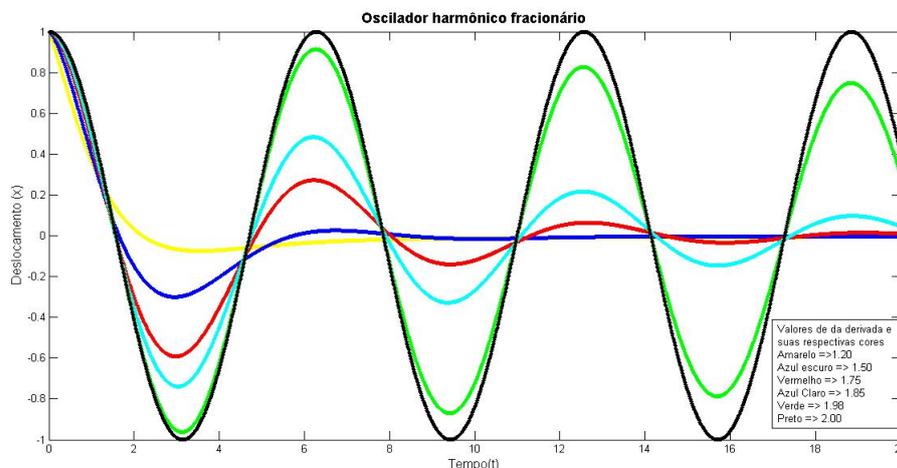


Figura 4: Variação da posição da mola para diversos valores de alpha.

Fazendo $n = n + 1$:

$$x'(t) = x_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \omega^{\alpha(n+1)} t^{\alpha(n+1)-1} (n+1)\alpha}{\Gamma(\alpha(n+1) + 1)}. \tag{63}$$

Pelas propriedades da função Gama, sabe-se que a seguinte igualdade é verdadeira:

$$\frac{(n+1)\alpha}{\Gamma((n+1)\alpha + 1)} = \frac{1}{\Gamma(n\alpha + \alpha)}. \tag{64}$$

Substituindo este resultado na equação (63):

$$x'(t) = -x_0 \omega^{\alpha} t^{\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \omega^{\alpha n} t^{\alpha n}}{\Gamma(n\alpha + \alpha)}. \tag{65}$$

Escrevendo em termos da função de Mittag-Leffler:

$$x'(t) = -x_0 \omega^{\alpha} t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\omega^{\alpha} t^{\alpha}). \tag{66}$$

A soma da energia potencial com a energia cinética, resulta na energia total do sistema massa-mola, que é conservada no oscilador simples, formando uma curva elíptica no plano de fase. No movimento amortecido não há conservação dessa energia total, esta vai sendo perdida pelo atrito, com o tempo (transformação em energia térmica), formando uma espiral no plano de fase.

O plano de fase do Oscilador Harmônico Fracionário pode ser representado pelo seguinte par ordenado:

$$(x, x') = (x_0 E_{\alpha}(-\omega^{\alpha} t^{\alpha}), -x_0 \omega^{\alpha} t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\omega^{\alpha} t^{\alpha})). \tag{67}$$

Se $\alpha = 2$:

$$(x, x') = (x_0 \cos(\omega t), -x_0 \sin(\omega t)). \tag{68}$$

O plano de fase do Oscilador Harmônico Fracionário está representado na figura a seguir. Nota-se também as curvas espirais:

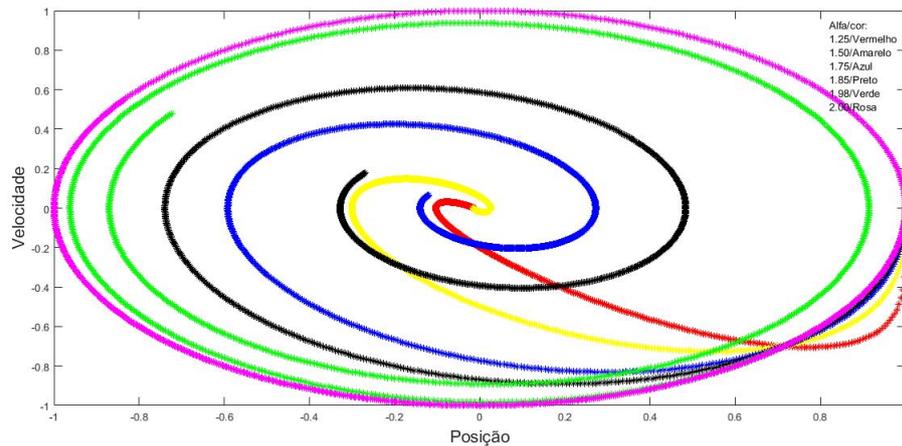


Figura 5: Plano de fase para alpha variando de 1 a 2.

4.2 A Equação de Difusão

A equação diferencial do processo de difusão implica que as partículas obedecem à derivada de ordem um em relação ao tempo. Os processos que fogem dessa relação serão aqui denominados como anômalos, esse conjunto de processos difusivos anômalos será dividido em dois: processos subdifusivos e superdifusivos [1]. Quando o expoente da derivada em relação ao tempo é menor do que 1, se tem um processo subdifusivo, para expoentes maiores do que 1, se tem um processo superdifusivo.

Adolph Fick foi um dos pioneiros no estudo da difusão, sendo este processo muito importante na sua área de atuação, que era o transporte em membranas plasmáticas. Ele propôs que quando se tem uma diferença de concentração de certo soluto entre dois lados de uma membrana, existe uma tendência natural (como o calor) de ocorrer a transferência de soluto do lado mais concentrado para o menos concentrado. Sendo que o fluxo é proporcional ao gradiente de concentração, como pode-se ver na equação a seguir, na qual J_S representa o fluxo, "D" se trata do coeficiente de difusão e $\frac{\partial C}{\partial x}$ representa o gradiente de concentração em relação a posição.

$$J_S(x, t) = -D \frac{\partial C}{\partial x}. \tag{69}$$

O coeficiente de difusão "D" varia com as condições do meio e de uma substância para outra. O sinal negativo da lei de Fick mostra que o fluxo se dá da região mais concentrada para a menos concentrada.

A partir da primeira lei de Fick, nota-se que esta é linear, assim o fluxo permanece proporcional ao gradiente, independente de quão grande seja a diferença (não há saturação). A lei também considera que em uma mistura de solutos, o fluxo de um não afeta o outro.

Utilizando o princípio de conservação da matéria, se chega a uma outra equação que relaciona fluxo e a concentração, que é a equação da continuidade.

$$\frac{\partial J_S(x, t)}{\partial x} = - \frac{\partial C(x, t)}{\partial t}. \quad (70)$$

Agora que se tem duas equações diferenciais parciais relacionando fluxo e concentração, pode-se simplificar o estudo unindo as duas e obtendo a equação de difusão. A equação de difusão se trata de uma equação diferencial parcial da concentração e que possui o coeficiente de difusão implícito nesta relação.

$$\frac{\partial C(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C(x, t)}{\partial x^2}. \quad (71)$$

Agora sim pode-se resolver a equação de difusão para se obter uma solução que mostre como a concentração varia com o tempo durante o processo.

4.2.1 Difusão unidimensional em um meio finito

A difusão convencional é representada pela equação (71), no caso da difusão fracionária:

$$\frac{\partial^\alpha C(x, t)}{\partial t^\alpha} = D \frac{\partial^2 C(x, t)}{\partial x^2}, \quad (72)$$

onde $C(x, t)$ representa a concentração de soluto no ponto x e no tempo t .

Pelos estudos das equações diferenciais parciais unidimensionais, se sabe que, em geral, para a resolução destas são necessárias duas condições de contorno e uma inicial. O problema tratado aqui será referente a difusão em um meio unidimensional, assim a função desejada irá variar apenas com relação ao eixo x e com o tempo. O objeto de estudo terá comprimento total igual a L , onde sua matéria está totalmente distribuída de acordo com uma função genérica $c(x)$ no instante inicial.

Como condições de contorno tem-se:

$$\left. \frac{\partial(C(x, t))}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial(C(x, t))}{\partial x} \right|_{x=L} = 0. \quad (73)$$

Essas condições de contorno mostram que o meio é fechado, portanto não há fluxo nas extremidades.

Se faz a hipótese típica do método de separação de variáveis, na qual a função desejada pode ser representada como um produto de duas funções, na qual uma depende apenas de x e a outra depende apenas de t :

$$C(x, t) = X(x)T(t). \quad (74)$$

Substituindo a hipótese na equação diferencial de difusão fracionária, tem-se:

$$X(x)T^{(\alpha)}(t) = DX''(x)T(t). \quad (75)$$

Pelo resultado acima, pode-se perceber que o método de separação de variáveis funcionou, onde se consegue isolar o que depende da variável x de um lado e o que depende de t do outro, assim tudo isso se torna igual a uma constante, pois é a única solução possível para uma igualdade entre dois membros com variáveis independentes de modo que possa ser verdade para qualquer alteração entre estas, como se pode ver abaixo:

$$\frac{T^{(\alpha)}(t)}{DT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \text{ (constante)}. \quad (76)$$

Agora sim, o problema que era a resolução de uma EDP se torna a resolução de duas EDO's. Nesse momento tem-se três hipóteses para a constante $-\lambda$, esta pode ser negativa, positiva ou nula. Estudando o caso em que λ é igual a zero, tem-se:

$$X''(x) = 0. \quad (77)$$

A solução mais geral para a $X(x)$ nesse caso será:

$$X(x) = Bx + C, \text{ sendo } B \text{ e } C \text{ constantes quaisquer}. \quad (78)$$

Utilizando a primeira condição de contorno, equação (73):

$$X'(0)T(t) = 0. \quad (79)$$

Para isso ser verdade e ser considerado solução, $X'(0)$ tem que ser igual a 0, pois, caso $T(t)$ seja 0, a equação da concentração será sempre nula, como pode ser facilmente verificado substituindo essa condição na equação (74), o que só seria solução do problema para o caso particular e trivial onde $c(x) = 0$, o que não interessa, pois, se procura uma solução geral. Aplicando $X'(0)=0$ em $X(x)$, tem-se que:

$$X'(0) = B = 0, \quad (80)$$

logo:

$$X(x) = C. \quad (81)$$

Utilizando a segunda condição de contorno:

$$X'(L)T(t) = 0. \quad (82)$$

Como explicado anteriormente só seria solução se $X'(L)$ for 0, o que leva a:

$$X(L) = C. \quad (83)$$

Assim se chega ao resultado de que a concentração não varia com a posição, o que não é interessante.

Estudando os outros casos, $-\lambda > 0$ e $-\lambda < 0$, tem-se as seguintes EDO's:

$$T^{(\alpha)}(t) = -\lambda DT(t), \quad (84)$$

$$X''(x) = -\lambda X(x). \quad (85)$$

Para os dois casos tem-se que a equação relacionada a x pode ser resolvido a partir de um palpite inicial (ansatz), este palpite será uma exponencial em razão do aparecimento constante desta função na resolução de equações diferenciais ordinárias, assim supõe-se que $X(x)$ será do tipo de^{rx} , sendo d e r constantes. Para encontrar os valores de r , substitui-se o palpite na equação (85), obtendo:

$$r^2 de^{rx} = -\lambda de^{rx}, \text{ com } d \in \mathfrak{R} - (0). \quad (86)$$

Dividindo toda equação por de^{rx} , que pode-se ter certeza que não será um termo nulo, tem-se:

$$r^2 = -\lambda, \quad (87)$$

logo:

$$r = \pm\sqrt{-\lambda}. \quad (88)$$

Considerando que $-\lambda > 0$, tem-se que:

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}. \quad (89)$$

Substituindo a primeira condição de contorno, $X'(0) = 0$ utilizada anteriormente, percebe-se que só é verdade caso $d_1 = d_2$. Assim:

$$X(x) = d_1 [e^{\sqrt{-\lambda}x} + e^{-\sqrt{-\lambda}x}]. \quad (90)$$

Com a segunda condição de contorno, $X'(L) = 0$, obtêm-se que há solução apenas se d_1 for 0, que não interessa, pois leva novamente ao caso trivial.

Agora resta o último caso, no qual $-\lambda < 0$. Para este pode-se partir da equação (94), na qual, fazendo o uso de números complexos:

$$X(x) = d_1 e^{i\sqrt{\lambda}x} + d_2 e^{-i\sqrt{\lambda}x}. \quad (91)$$

Assim, como se pode perceber, essa equação é uma soma de um seno e um cosseno.

$$X(x) = d_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + d_2 \sin(\sqrt{\lambda}x). \quad (92)$$

Utilizando a primeira condição de contorno $X'(0) = 0$, encontra-se que d_2 é igual a zero. Logo:

$$X(x) = d_1 \cos(\sqrt{\lambda}x). \quad (93)$$

Utilizando a segunda condição de contorno $X'(L) = 0$, encontra-se que $\sqrt{\lambda}L$ deve ser múltiplo inteiro de π :

$$\lambda = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, \quad \text{com } n \in \mathbb{N}. \quad (94)$$

Como n pode ser qualquer inteiro, esse problema possui infinitas soluções, sendo que a cada uma delas se associa uma nova constante. Substituindo o λ da equação (94) e considerando que n pode ser um número natural qualquer, tem-se que a função $X(x)$ é igual a um somatório de cossenos na sua forma mais geral, pois, uma combinação linear de soluções também é solução.

$$X(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (95)$$

Agora que foi encontrada a função relacionada a x , serão feitos os cálculos para t a partir da equação (84). Para a resolução da EDO relacionada ao tempo, aplica-se a transformada de Laplace nos dois membros, em razão de λ e D serem constantes, estes não sofrem transformação.

$$\mathcal{L}\{T^\alpha(t)\} = -\lambda D \mathcal{L}\{T(t)\}. \quad (96)$$

Para um estudo bem genérico, será necessário neste momento a distinção entre dois processos anômalos, os subdifusivos e os superdifusivos. Os processos subdifusivos são aqueles em que a ordem da derivada varia de 0 até 1, já os superdifusivos são aqueles em que a ordem da derivada varia de 1 até 2, essa diferença promove mudanças no momento da resolução.

Quando se aplica a transformada de Laplace na parte esquerda da equação (84) de um processo subdifusivo, faz-se necessário o uso de um resultado que está demonstrado no apêndice 6.1 do presente texto, que seria uma forma genérica da regra da transformada de Laplace da

derivada pela formulação de Caputo. Para o caso particular, tem-se que:

$$\mathcal{L}\{T^\alpha(t)\} = s^\alpha \mathcal{L}\{T(t)\} - s^{\alpha-1}T(0). \quad (97)$$

Substituindo na equação (96) e isolando a transformada de Laplace de T(t), obtêm-se:

$$\mathcal{L}\{T(t)\} = \frac{s^{\alpha-1}T(0)}{s^\alpha + D\lambda}. \quad (98)$$

Agora aplica-se a transformada de Laplace inversa na equação anterior, mas para encontrar um resultado que pode passar por uma melhor análise será utilizado um segundo resultado expresso no apêndice deste trabalho, referente a transformada de Laplace de um caso geral da função de Mittag-Leffler. Fazendo uso deste, obtêm-se que:

$$T(t) = T(0)E_{\alpha,1}(-D\lambda t^\alpha). \quad (99)$$

Substituindo o valor de λ e considerando n qualquer número natural, pode-se escrever a solução anterior como uma combinação linear de soluções:

$$T(t) = f_n E_{\alpha,1} \left(\frac{-Dn^2 \pi^2 t^\alpha}{L^2} \right). \quad (100)$$

Assim se obtêm a solução geral do problema fazendo a união da solução X(x) e T(t):

$$C(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) E_{\alpha,1} \left(\frac{-Dn^2 \pi^2 t^\alpha}{L^2} \right). \quad (101)$$

Quando se aplica a transformada de Laplace na parte esquerda da equação (96) de um processo superdifusivo, o resultado será o seguinte:

$$\mathcal{L}\{T^\alpha(t)\} = s^\alpha \mathcal{L}\{T(t)\} - s^{\alpha-1}T(0) - s^{\alpha-2}T'(0). \quad (102)$$

Substituindo na equação (96) e isolando a transformada de Laplace de T(t), obtêm-se:

$$\mathcal{L}\{T^\alpha(t)\} = \frac{s^{\alpha-2}T'(0)}{s^\alpha + D\lambda} + \frac{T(0)s^{\alpha-1}}{s^\alpha + D\lambda}. \quad (103)$$

Com o auxílio da transformada inversa e dos resultados do apêndice, se consegue a seguinte solução:

$$T(t) = f_n T(0) E_{\alpha,1} \left(\frac{-Dn^2 \pi^2 t^\alpha}{L^2} \right) + f_n T'(0) t E_{\alpha,2} \left(\frac{-Dn^2 \pi^2 t^\alpha}{L^2} \right) \quad (104)$$

Agora que já se tem os resultados desejados, se consegue a solução geral para a concentração:

$$C(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) E_{\alpha,1}\left(\frac{-Dn^2\pi^2 t^\alpha}{L^2}\right) + \sum_{n=0}^{\infty} g_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) t E_{\alpha,2}\left(\frac{-Dn^2\pi^2 t^\alpha}{L^2}\right) \quad (105)$$

Utilizando agora a condição inicial, $C(x,0) = c(x)$, pode-se encontrar os g_n 's a partir dos conhecimentos das séries de Fourier².

$$c(x) = C(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (106)$$

Desse modo:

$$g_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L c(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{2}{L} \int_0^L c(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n = 0, 1, 2, 3... \quad (107)$$

Essa sim é uma resposta bem geral para este problema, sendo que a função da condição inicial irá sofrer uma extensão par em razão de ser composta apenas por cossenos.

Para uma melhor análise do processo de difusão anômala, foi realizada a implementação de diferentes gráficos variando os valores da ordem da derivada (valores de alfa), sendo estes aqui considerados apenas no intervalo (0,2]. Para isso precisa-se de duas equações para descrever o problema, uma delas com alfa variando de (0,1] e a outra variando de (1,2]. A constante K que é aqui empregada é uma constante real igual a $\frac{D\pi^2}{L^2}$, a variável t inicia-se em 0, a constante C se refere a concentração inicial ($T(0)$) e a constante D se refere a variação da concentração inicialmente ($T'(0)$). Para a subdifusão, nossa concentração será analisada em $x=0$, aqui representada por y:

$$y(t) = C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n\alpha} (-1)^n K^{2n}}{\Gamma(n\alpha + 1)}, \quad 0 < \alpha \leq 1. \quad (108)$$

Para a superdifusão:

$$y(t) = C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n\alpha} (-1)^n K^{2n}}{\Gamma(n\alpha + 1)} + D \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n\alpha+1} (-1)^n K^{2n}}{\Gamma(n\alpha + 2)}, \quad (1 < \alpha \leq 2) \quad (109)$$

O gráfico a seguir representa o comportamento das funções concentração ao longo do tempo, para diferentes valores de alfa no processo, onde K é fixado em 1.

Desses gráficos pode-se perceber que quando alfa se aproxima de 2, o gráfico se aproxima

²Uma função qualquer pode de ser escrita como uma série de Fourier, somatório de senos e cossenos e mais uma constante, desde que esta seja periódica, seccionalmente contínua e derivável exceto nos pontos de descontinuidade. Funções desse tipo podem ser utilizadas como condição inicial deste tipo de problema.

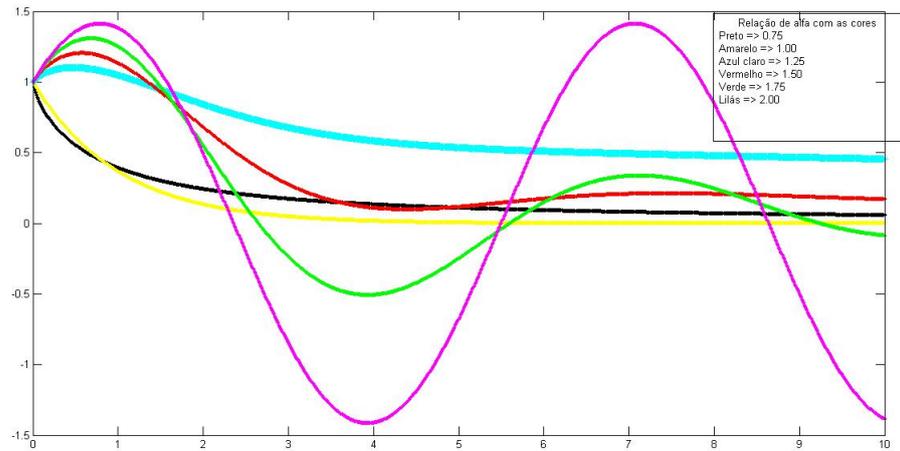


Figura 6: Plotagem para alpha variando de 0 a 2 e $K = 1$.

de um cosseno, isto é observado em razão da EDP se aproximar da equação da onda, que possui uma solução senoidal em um dado ponto.

Pela análise visual dos gráficos de alpha maior que 1 pode-se perceber que estes se parecem com o do superamortecimento de uma mola, como pode ser visto na figura 7.

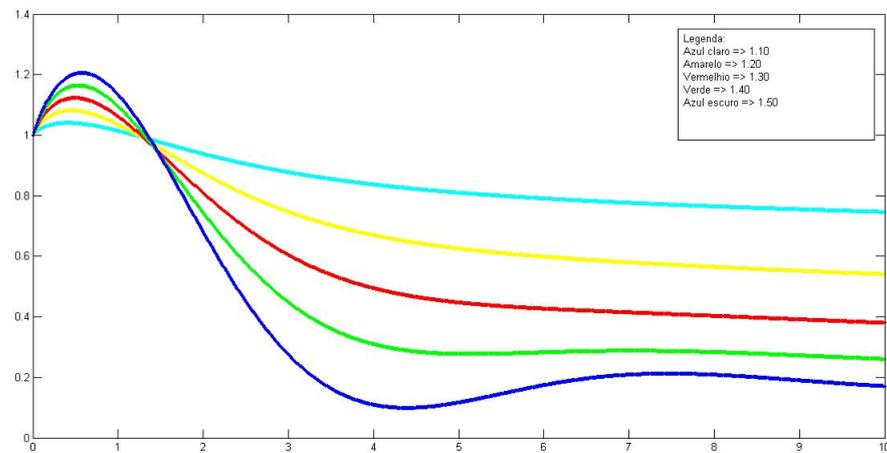


Figura 7: Plotagem para alpha variando de 1 a 1.5 e $K = 1$.

Na figura 8 pode-se ver como ocorre a variação da concentração em um cilindro de tamanho igual a 5 durante as primeiras 5 unidades de tempo. Sabendo que inicialmente o cilindro possui concentração igual a 1 na sua primeira metade e concentração nula na segunda parte. Nesse caso

a difusão é normal com $K=1$, porém nas figuras seguintes pode-se analisar o mesmo processo porém variando o valor de K , lembrando que quanto menor este, mais lento tende a ser o processo de difusão.

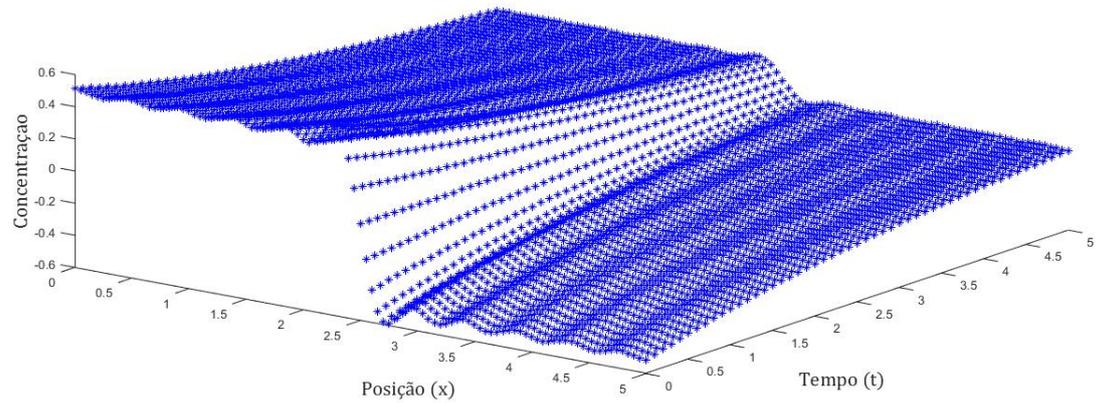


Figura 8: Gráfico tridimensional da difusão com $\alpha = 1$ e $K=0.8$.

Nas figuras 9 e 10 está representado um processo subdifusivo com alfa igual a 0.9 e um superdifusivo com alfa iguala 1.2, respectivamente, no último a distribuição inicial da substância é uma senóide.

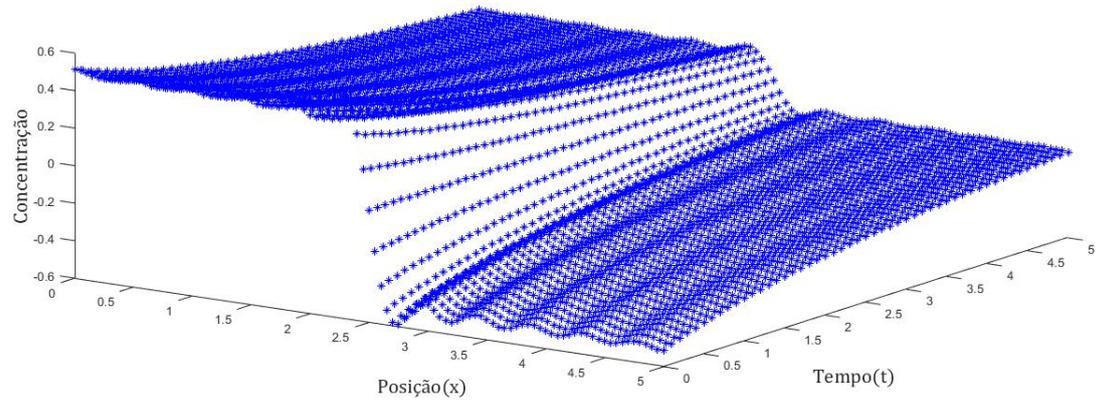


Figura 9: Gráfico tridimensional da difusão com $\alpha = 0.9$ e $D=0.8$.

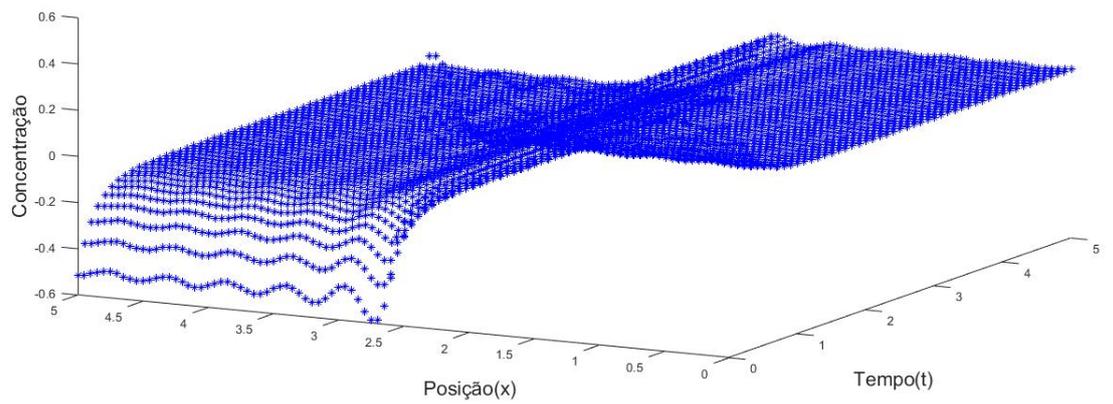


Figura 10: Gráfico tridimensional da difusão com $\alpha = 1.2$ e $K=0.8$.

5 Conclusão

O Cálculo Fracionário vem se mostrando uma ferramenta poderosíssima, principalmente para uma revisão, ou reformulação da descrição de fenômenos físicos que não ocorrem necessariamente da maneira prevista pelas equações diferenciais tradicionais. Para demonstrar isso, neste trabalho foi proposto o estudo de dois processos fundamentais com aplicação da derivada fracionária.

Primeiramente foi realizado um resumo sobre a história do CF, onde e como ocorreu, além de diversas curiosidades, incluindo a situação atual. Nada melhor do que um pouco de história para aumentar o desejo pelo estudo de determinado assunto. Logo em seguida, foram introduzidas as principais ferramentas para o estudo do Cálculo Fracionário, sem as quais não seria possível realizar o estudo de uma forma mais avançada. Não é por acaso que os estudos mais interessantes foram produzidos no século XX, após o desenvolvimento da função de Mittag-Leffler, essencial para resolução das equações diferenciais fracionárias.

Posteriormente foram estudadas as três principais definições do cálculo fracionário: Caputo, Riemann-Liouville e Grünwald-Letnikov, das quais foi utilizada preferencialmente a de Caputo, por resultar em condições iniciais fisicamente interpretáveis. Vale ressaltar mais uma vez que existem diversas outras definições como a de Weyl e Riesz, que podem ser encontradas em outras bibliografias ³.

Para o estudo do processo físico pretendido, se fez primeiramente uma breve introdução sobre a história do processo de difusão, como ele ocorre, definições, além das equações mais importantes, entre elas: a Primeira Lei de Fick e a EDP que seria analisada mais à frente. Posteriormente foram feitos cálculos para se solucionar a equação de difusão normal, além de cálculos relacionados à difusão anômala, onde realmente entram as ferramentas do Cálculo estudado anteriormente.

Os gráficos de como varia a concentração com o tempo ficaram para o fim do texto, assim terminando o estudo que havia sido proposto.

O trabalho como um todo mostra como fica interessante o estudo de certos processos à luz do Cálculo Fracionário.

6 Agradecimentos

Ao meu orientador, José Eloy Ottoni, pela dedicação, aprendizado, paciência, referência profissional e amizade. À UFSJ pela contribuição na minha formação profissional, além de possibilitar o acesso a livros e estrutura de estudos. A FAPEMIG por incentivar financeiramente a pesquisa nas Universidades brasileiras, motivando os discentes e docentes a se dedicarem, e auxiliando na obtenção de materiais complementares à pesquisa.

³Ver referência [3].

7 Apêndices

7.1 Transformada de Laplace da derivada, formulação de Caputo

Para a transformada de Laplace da derivada de ordem α de uma função genérica $f(t)$ pela formulação de Caputo, obtêm-se a igualdade:

$$\mathcal{L}\{D_*^\alpha f(t)\} = \mathcal{L}\{J^{n-\alpha}[D^n f(t)]\}. \quad (110)$$

Aqui se faz necessário a introdução de uma função auxiliar, designada por $\Phi_\alpha(t)$, que terá as seguintes propriedades:

$$\Phi_\alpha(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \text{ se } t > 0, \quad (111)$$

$$\Phi_\alpha(t) = 0, \text{ se } t \leq 0. \quad (112)$$

Escrevendo o termo referente a integral no segundo membro da equação (98) de uma forma similar a equação (29), obtêm-se:

$$J^{n-\alpha}[D^n f(t)] = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau, \alpha > 0. \quad (113)$$

Nota-se que isso pode ser escrito como uma integral de convolução, portanto:

$$D_*^\alpha f(t) = J^{n-\alpha}[D^n f(t)] = \Phi_{n-\alpha}(t) * f^{(n)}(t). \quad (114)$$

Aplicando a transformada de Laplace nos dois membros:

$$\mathcal{L}\{D_*^\alpha f(t)\} = \mathcal{L}\{\Phi_{n-\alpha}(t) * f^{(n)}(t)\}. \quad (115)$$

Pela propriedade do produto de convolução, tem-se que:

$$\mathcal{L}\{\Phi_{n-\alpha}(t) * f^{(n)}(t)\} = \mathcal{L}\{\Phi_{n-\alpha}(t)\} \mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}. \quad (116)$$

E como $\mathcal{L}\{t^\nu\} = \frac{\Gamma(\nu+1)}{s^{\nu+1}}$ e pela regra da transformada de Laplace da derivada n-ésima de uma função:

$$\mathcal{L}\{D_*^\alpha f(t)\} = s^{\alpha-n} \left\{ s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0) s^{n-k-1} \right\}. \quad (117)$$

Simplificando:

$$\mathcal{L}\{D_*^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0) s^{\alpha-k-1}. \quad (118)$$

7.2 Transformada de Laplace da função de Mittag-Leffler

Considerando a função $t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(\pm bt^\alpha)$, será útil o conhecimento da transformada de Laplace desta para que se obtenha um caso geral aplicado na resolução das Equações Diferenciais Fracionárias. Utilizando a definição por séries da função de Mittag-Leffler:

$$\mathcal{L}\{t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(bt^\alpha)\} = \mathcal{L}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n t^{n\alpha+\beta-1}}{\Gamma(n\alpha + \beta)}\right\}. \quad (119)$$

Utilizando (de maneira não rigorosa) o resultado que a transformada da série é a série das transformadas, e uma vez mais lembrando que $\mathcal{L}\{t^\nu\} = \frac{\Gamma(\nu + 1)}{s^{\nu+1}}$:

$$\mathcal{L}\{t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(bt^\alpha)\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{\Gamma(n\alpha + \beta)} \mathcal{L}\{t^{n\alpha+\beta-1}\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{s^{n\alpha+\beta}}. \quad (120)$$

A série final obtida é geométrica, possuindo o intervalo de convergência $|\frac{1}{s^\alpha}| < 1$. Simbolizando por a_0 o primeiro termo e por r a razão da série, tem-se que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{s^{n\alpha+\beta}} = \frac{a_0}{1-r} = \frac{\frac{1}{s^\beta}}{1-\frac{b}{s^\alpha}} = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha - b}. \quad (121)$$

Logo:

$$\mathcal{L}\{t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(bt^\alpha)\} = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha - b}. \quad (122)$$

De maneira análoga:

$$\mathcal{L}\{t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(-bt^\alpha)\} = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha + b}. \quad (123)$$

Referências

- [1] Brenda Campos. Cálculo fracionário aplicado à engenharia química. Technical report, UFSJ, 2015.
- [2] Rubens de Figueiredo Camargo. *Cálculo Fracionário e Aplicações*. PhD thesis, Unicamp, 2009.
- [3] Rubens de Figueiredo Camargo e Edmundo Capelas de Oliveira. *Cálculo Fracionário*. Livraria da Física, 2015.
- [4] Rogério Santos Mol. *Introdução à História da Matemática*. CAED-UFGM, 2013.
- [5] Danilo Castro Rosendo. Sobre a função de mittag-leffler. Master's thesis, Unicamp, 2008.
- [6] Keith B. Oldham & Jerome Spanier. *The Fractional Calculus*. 2006.
- [7] Lucas Zanella. Função gama, 2014.