A Equivalência entre o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer e o Teorema do Valor Intermediário

Renan de Oliveira Pereira renan.11.pereira@gmail.com
Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil

Wenderson Marques Ferreira wmf@iceb.ufop.br
Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil

Eder Marinho Martins eder@iceb.ufop.br
Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil

Resumo

Nosso principal objetivo é estudar os Teoremas do Ponto Fixo de Brouwer e do Valor Intermediário, estabelecendo sua equivalência.

Palavras-chave

Pontos fixos, Teorema do Ponto Fixo de Brower, Teorema do Valor Intermediário.

1 Introdução

Os Teoremas do Ponto Fixo de Brouwer e do Valor Intermediário são teoremas clássicos, estando na lista dos mais conhecidos resultados de existência em Matemática. Suas aplicação mais importantes são a garantia da existência de soluções, tanto para equações bastante simples quanto para problemas de Matemática avançada. Praticamente todos os livros de Análise Matemática apresentam os dois teoremas, mas nem sempre é abordada sua equivalência (como pretendemos estabelecer neste trabalho), apresentando-se apenas um deles como consequencia do outro.

Iniciaremos pela formalização do conceito de Ponto Fixo de uma aplicação e apresentaremos alguns exemplos de funções que possuem pontos fixos, explorando a geometria da obtenção de tais pontos através da interseção entre o gráfico das funções consideradas e o da aplicação identidade.

Em seguida, passaremos ao estudo da equivalência entre os teoremas, iniciando pela demonstração do Teorema do Valor Intermediário e sua utilização para a demonstração do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, sendo nossas referências principais os livros [1] e [3]. Para concluir, faremos a implicação contrária, demonstrando o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer e obtendo o

Teorema do Valor Intermediário como sua consequência, utilizando como principal referência o livro [5].

2 Pontos Fixos

Nesta Seção, apresentaremos a definição de Ponto Fixo de uma função f e abordaremos alguns exemplos que nos permitem identificar tais pontos, tanto de modo algébrico quanto a partir do gráfico de f.

Definição 1. *Dada uma função $f : X \to Y$, o gráfico de f é o subconjunto, G, do produto cartesiano $X \times Y$, definido por*

$$G = \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}.$$

Definição 2. *Um ponto $x \in X$ chama-se ponto fixo da função $f : X \to Y$ se $f(x) = x$.*

Podemos observar que todos os pontos da forma (x_0, x_0) que pertençam ao gráfico de uma função f são pontos fixos de tal função. Sendo assim, quando nos deparamos com o gráfico de f e queremos saber se a mesma possui ponto fixo, basta verificar se há intersecção entre tal gráfico e o da reta $y = x$. Além disso, mesmo sem esboçarmos o gráfico de f, é possível determinarmos seus pontos fixos resolvendo a equação $f(x) = x$.

Vejamos a seguir algumas funções reais e seus gráficos. Indicaremos os pontos fixos de tais funções e ilustraremos (caso existam) as interseções entre tais gráficos e o da função identidade.

Exemplo 1. $f(x) = x^2$

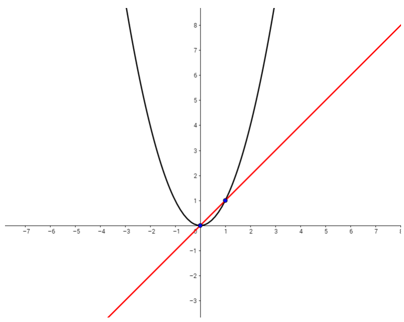

Figura 1: Gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ no qual são indicados dois pontos fixos, $x = 0$ e $x = 1$.

Exemplo 2. $g(x) = x^2 + 3$

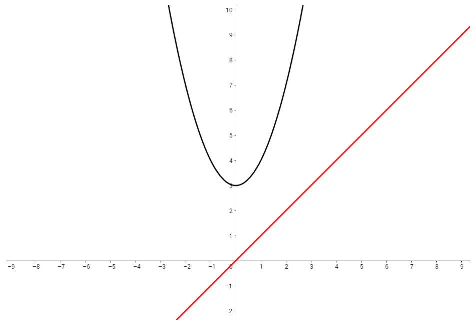

Figura 2: A função $f(x) = x^2 + 3$ não possui pontos fixos (graficamente, não há intersecção com o gráfico de $i(x) = x$).

Exemplo 3. $h(x) = x^3$

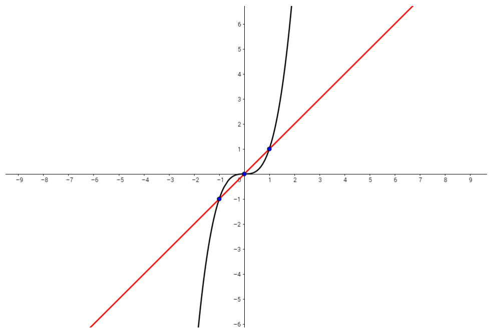

Figura 3: A função $f(x) = x^3$ possui três pontos fixos, a saber $x = -1$, $x = 0$ e $x = 1$. Tais pontos são notados no gráfico acima.

Exemplo 4. $l(x) = \log x$

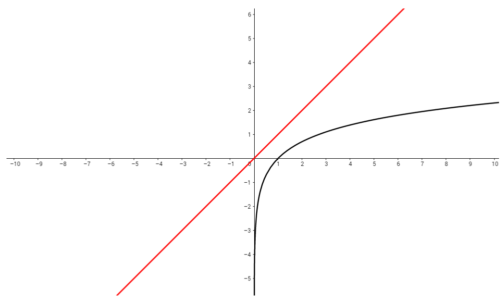

Figura 4: A função logaritmo possui gráfico contínuo, porém não possui ponto fixo.

Exemplo 5. $k(x) = \cos(x)$

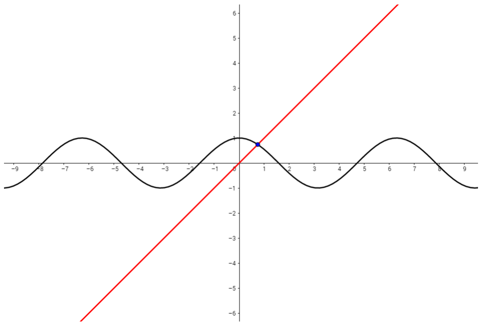

Figura 5: A função $k(x) = \cos(x)$ possui um único ponto fixo, indicado graficamente na intersecção entre o gráfico da curva $y = x$.

3 O Teorema do Valor Intermediário

Nesta seção, apresentamos o Teorema do Valor Intermediário e estabeleceremos sua demonstração.

Teorema 1. *(Teorema do Valor Intermediário.) Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f(a) < d < f(b)$, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.*

Demonstração: Consideremos os conjuntos $R = \{x \in [a, b]; f(x) \leq d\}$ e $I = \{x \in [a, b]; f(x) \geq d\}$. Como R e I são fechados, temos $\overline{R} \cap I = R \cap I = R \cap \overline{I}$, em que $\overline{R}$ e $\overline{I}$ são fechos de R e I (ver Corolário 2 do Teorema 1, Capítulo 7, de [1]).

Temos que $[a, b] = R \cup I$. Sendo assim, vamos analisar $R \cap I$. Se $R \cap I \neq \emptyset$, o Teorema é válido, pois teremos $f(p) = d$, para todo $p \in R \cap I$. Por outro lado, se $R \cap I = \emptyset$, concluiríamos que $R \cup I$ seria uma cisão não trivial de $[a, b]$, pois tanto $R \neq \emptyset$ (já que $a \in R$) quanto $I \neq \emptyset$ (já que $b \in I$). No entanto sabemos, pelo Teorema 5 do Capítulo 5 de [1], que um intervalo da reta só admite a cisão trivial. Logo, o único caso possível é $R \cap I \neq \emptyset$ e assim o Teorema está provado. □

Muitos exemplos de aplicações do Teorema do Valor Intermediário, podem ser vistos dentro da Matemática e também no cotidiano. Vejamos dois deles.

Exemplo 6. *Mostrar que há uma raiz de $r(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 2$ no intervalo $(1, 2)$.*

Demonstração: Notemos que $r(x)$ é contínua e que $r(1) = -1 < 0 < 12 = r(2)$. Portanto, segue-se do Teorema do Valor Intermediário que existe $c \in (1, 2)$ tal que $r(c) = 0$. □

Exemplo 7. *Em algum ponto durante uma caminhada que termine no ponto de partida, você estará exatamente à mesma altura do ponto em que começou a caminhada. Se você começa no ponto mais alto ou mais baixo é imediato.*

Caso contrário, a ideia é a seguinte: em algum momento você estará em um ponto cuja altura é maior do que a altura do ponto onde começou e, em outro momento, você vai estar num

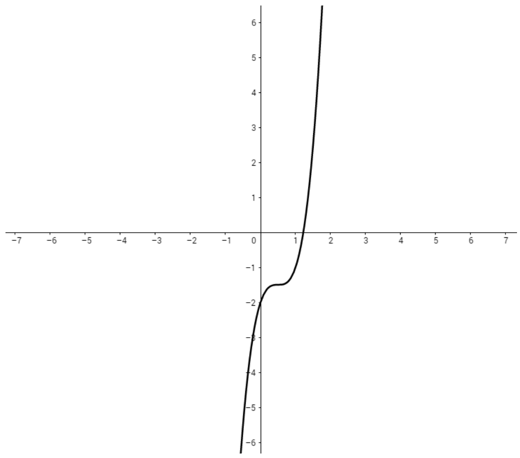

Figura 6: *Gráfico da função* $r(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 2$.

ponto de altura menor do que a altura de onde você começou.

Portanto, deve haver um ponto no meio do caminho no qual você estará em um lugar que terá altura igual à do ponto inicial.

Seu caminho deve ser contínuo, ou seja, você não pode desaparecer em um ponto e reaparecer em outro lugar. Situação semelhante pode ocorrer com a temperatura ou pressão em uma caminhada com as mesmas condições da que analisamos.

4 O Teorema do Ponto Fixo de Brouwer na reta

Demonstraremos, a seguir, uma das principais consequências do Teorema do Valor Intermediário: o Teorema do Ponto fixo de Brouwer. Na verdade, como já dissemos no próprio título deste trabalho, tais resultados são equivalentes. Tal equivalência será vista na próxima Seção.

Teorema 2. *(Teorema do Ponto Fixo de Brouwer) Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua tal que* $f(a) \leq a$ *e* $b \leq f(b)$*. Então, existe pelo menos um número* $c \in [a, b]$ *tal que f(c) = c.*

Demonstração: Como, por hipótese, f é contínua, temos que a função $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = x - f(x)$, é contínua no intervalo $[a, b]$. Além disso, $g(a) \geq 0$, pois $f(a) \leq a$ e $g(b) \leq 0$, pois $b \leq f(b)$. Pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $c \in [a, b]$ tal que $g(c) = 0$, ou seja, $f(c) = c$, e concluímos nossa demonstração. □

Veremos a seguir alguns exemplos que nos mostram a necessidade de cada uma das hipóteses do Teorema do ponto Fixo de Brouwer.

Exemplo 8. *Seja* $h(x) : [-1, 2] \to [-1, 2]$ *definida por*

$$h(x) = \begin{cases} -2x & , \textit{ se } \quad -1 \leq x < 0, \\ 2 & , \textit{ se } \quad x = 0, \\ x^2 & , \textit{ se } \quad 0 < x < 1, \\ -1 & , \textit{ se } \quad x = 1, \\ -2x+3 & , \textit{ se } \quad 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Tal função possui domínio fechado e limitado e satisfaz $h([-1,2]) \subset [-1,2]$. *No entanto, não possui ponto fixo. Note que isso não contradiz o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer uma vez que tal função não é contínua.*

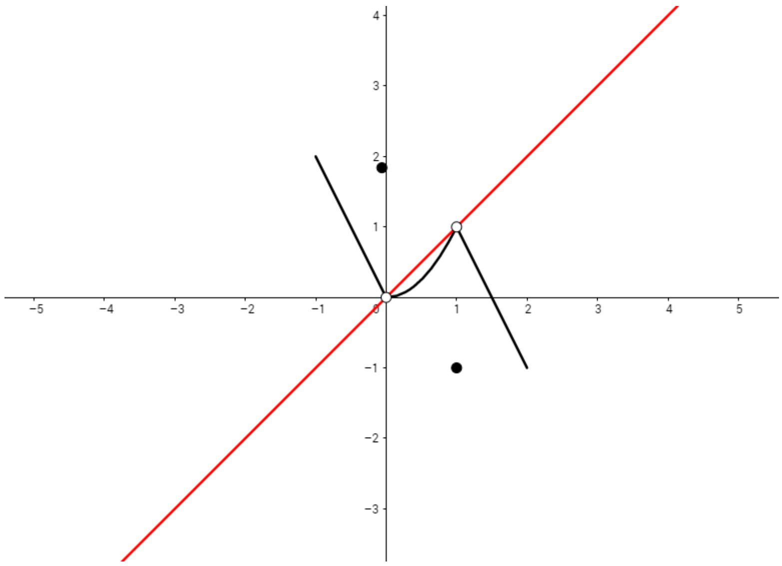

Figura 7: *Gráfico da função* $h(x)$ *sem pontos fixos, mesmo aplicando o intervalo [1,2] em si mesmo.*

Exemplo 9. *Consideremos a função real* $j : [1,2] \to \mathbb{R}$ *dada por* $j(x) = x + 1$.

A imagem de [1,2] é o intervalo [2,3], isto é, a imagem de $j(x)$ *não está contida em [1,2]. Sendo assim, apesar de* j *ser contínua e de seu domínio ser um conjunto fechado e limitado da reta, tal função não possui ponto fixo.*

Exemplo 10. *Consideremos a função contínua* $h(x) = x/2$ *no intervalo* $(0,1]$.

A imagem de h *é* $\left(0, \dfrac{1}{2}\right]$ *e está contida no domínio de* h. *Observamos que o domínio de* f *é aberto em* $x = 0$ *e que não há ponto fixo para tal função.*

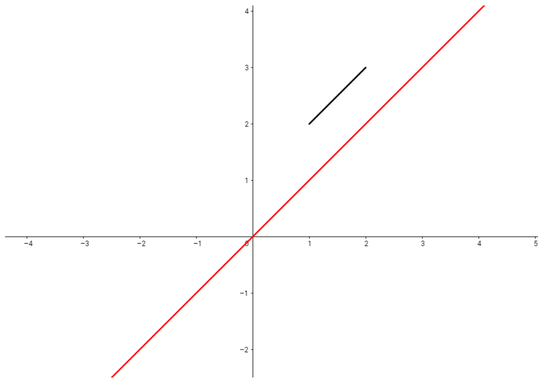

Figura 8: Função contínua que não possui pontos fixos, mesmo que seu domínio seja fechado e limitado da reta.

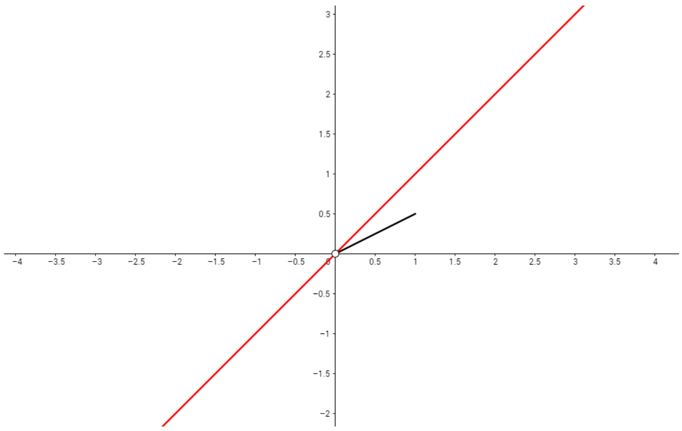

Figura 9: *Não existe ponto fixo de h, mesmo que tal função seja contínua e que seu domínio permaneça invariante. Notamos que isso não contradiz o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer pois o domínio de h não é fechado.*

5 Equivalência entre os Teoremas do Ponto Fixo de Brouwer e do Valor Intermediário em $\mathbb{R}$

Na Seção anterior, vimos que o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer pode ser obtido como consequência do Teorema do Valor Intermediário. Nosso objetivo agora é concluir que estes dois Teoremas são equivalentes. Para tal, mostraremos que o Teorema do Valor Intermediário pode ser obtido como consequência do Teorema do ponto Fixo de Brouwer.

Vamos iniciar apresentando um Lema que utilizaremos na sequência desta Seção e cuja demonstração pode ser vista em [1], página 18.

Lema 1. *Sejam dados os intervalos $I_n = [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$, tais que*

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots$$

Se $\lim\limits_{n\to+\infty} |I_n| = 0$*, então existe um único* $l \in \mathbb{R}$ *tal que* $\bigcap\limits_{n\geq 1} I_n = \{l\}$.

Devemos agora provar o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, independentemente do Teorema do Valor Intermediário.

Teorema 3. *(Teorema do Ponto Fixo de Brouwer) Seja* $f : [a,b] \to [a,b]$ *uma função contínua tal que* $f(a) \geq a$ *e* $b \leq f(b)$*. Sendo assim, existe pelo menos um número* $c \in [a,b]$ *tal que f(c) = c.*

Demonstração: Temos que f é uma aplicação contínua do intervalo $[a,b]$ nele mesmo. Se $f(a) = a$ ou $f(b) = b$, o teorema estará provado. Caso nem a e nem b sejam pontos fixos de f, definimos $I_0 = [a,b]$ e determinamos o ponto médio $c_0 = \dfrac{a+b}{2}$ de I_0. Se c_0 for fixo, o teorema estará provado. Caso contrário, utilizaremos este ponto médio para obtermos um subintervalo I_1 contido em I_0 com a construção indicada a seguir. Por hipótese, ao aplicarmos f nos extremos de I_0, temos $f(a) \geq a$ e $f(b) \leq b$, o que, geometricamente, significa que, quando aplicamos f, o ponto extremo à esquerda de I_0 é aplicado em um ponto à sua direita e o ponto extremo à direita é aplicado em um ponto à sua esquerda. Em seguida, aplicamos f em c_0 e, caso $f(c_0)$ esteja à direta de c_0, tomamos o intervalo $I_1 = [c_0, b]$. Caso $f(c_0)$ esteja a esquerda de c_0, tomamos $I_1 = [a, c_0]$.

Repetindo o processo, determinamos o ponto médio de I_1, que denotaremos por c_1. Se c_1 for fixo, o teorema está provado. Caso contrário, repetimos o procedimento já descrito anteriormente e encontramos o intervalo I_2 que terá metade do comprimento de I_1. Observamos que ao continuar o processo sem obtermos ponto fixo nos pontos médios de algum dos intervalos, teremos um número infinito de subintervalos $\{I_1, I_2, I_3, ..., I_n, ...\}$ encaixados, fechados e com comprimento tendendo a zero.

Pelo Lema anterior, existe um único ponto x_0 que pertence a todos os intervalos. Seja $y_0 := f(x_0)$ e provemos que $y_0 = x_0$. Vamos supor que $x_0 \neq y_0$. Sem perda de generalidade, suponhamos $x_0 < y_0$. Como f é contínua em x_0, vamos considerar dois intervalos, um centrado em x_0 e outro em y_0, de modo que as imagens de todos os pontos do intervalo centrado em x_0 pertençam ao intervalo centrado em y_0. Temos que dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - y_0| < \epsilon$ para todo x tal que $|x - x_0| < \delta$. Consideremos ϵ de tal forma que a ϵ vizinhança de y_0 e a δ vizinhança de x_0 sejam disjuntas.

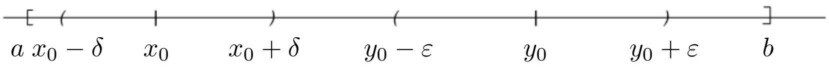

Figura 10: Representação esquemática do procedimento utilizado na demonstração do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer.

Como todos os pontos pertencentes ao intervalo $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ têm imagens no intervalo $[y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon]$, concluímos que a função f aplica cada ponto de $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ em um ponto localizados à sua direita. Por outro lado, $I_n \subset [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ se n suficientemente grande e x_0 pertence a todos os intervalos fechados I_n. Pela continuidade de f, cada extremo de um intervalo I_n será aplicado em um ponto à sua direita, contradizendo a construção feita que sempre aplica o ponto extremo à esquerda de I_n em um ponto à sua direita e o ponto extremo à direita desse intervalo em um ponto à sua esquerda. Logo obtemos uma contradição e somos levados a concluir que $y_0 = x_0$, ou seja, $f(x_0) = x_0$, como queríamos demonstrar. $\square$

Agora provaremos o Teorema do Valor Intermediário usando o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer.

Teorema 4. *(Teorema do Valor Intermediário) Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua. Se $f(a) < d < f(b)$ então existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = d$.*

Demonstração: Primeiramente vamos demonstrar o caso em que $d = 0$. Nesta situação, temos $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Partindo da função $f(x)$ no intervalo $[a,b]$, construiremos a função auxiliar contínua

$$F(x) = \lambda f(x) + x$$

definida no mesmo intervalo $[a,b]$ e com o parâmetro $\lambda \neq 0$ a ser escolhido de forma que a função $F(x)$ aplique o intervalo $[a,b]$ em si mesmo. Isso nos assegurará, pelo Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, que $F(x)$ possui um ponto fixo $x_0 \in [a,b]$. Neste caso, $\lambda f(x_0) + x_0 = x_0$ e, portanto, $f(x_0) = 0$, provando o teorema neste caso particular.

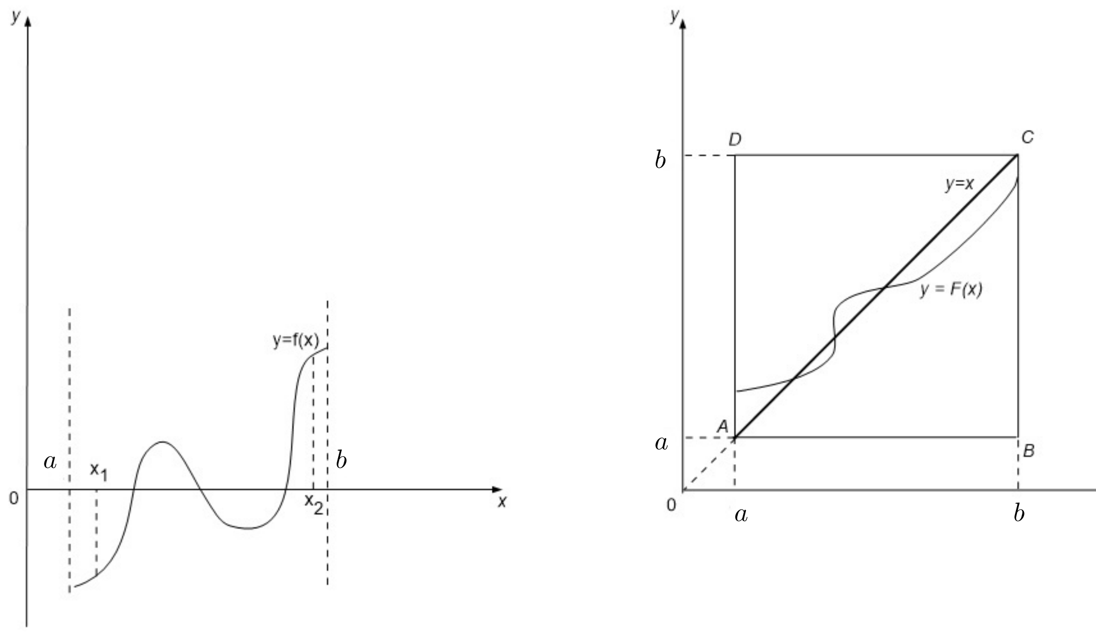

Figura 11: Representação esquemática da demonstração do Teorema do Valor Intermediário.

O gráfico da função $F(x)$ no intervalo $[a, b]$ deve estar localizado dentro do quadrado $ABCD$ da Figura 11. Para tal, devemos determinar λ adequado.

A função $f(x)$ é contínua no compacto $[a, b]$. Portanto, existem m e M tal que $m \leq f(x) \leq M$ para todo ponto x do intervalo (ver [1], página 78). No caso em que $d = 0$, temos $m < 0$ e $M > 0$. Como $f(a) < 0$, pela continuidade de $f(x)$, temos que $f(x) < 0$ para todo x suficientemente próximo de a,.

Pode-se escolher um ponto x_1 tal que $f(x) < 0$ para todo $x \in [a, x_1]$, que existe pois $f(a) < 0$ e pelo fato de f ser contínua. Analogamente, pode-se escolher um ponto x_2 tal que $f(x) > 0$ sempre que $x \in [x_2, b]$, que existe pois $f(b) > 0$ e pela continuidade de f. Seja

$$\lambda = \max\left\{\frac{a - x_1}{M}, \frac{b - x_2}{m}\right\}, \tag{1}$$

ou seja, tomamos λ igual ao maior entre os dois números negativos $\dfrac{a - x_1}{M}$ e $\dfrac{b - x_2}{m}$. Logo λ é negativo.

Mostremos que para tal λ teremos $F(x) \geq a$ se $a \leq x \leq b$. Vamos considerar primeiramente pontos tais que $f(x) \geq 0$. Pela definição de λ, temos que $\lambda \geq \dfrac{a - x_1}{M}$. Multiplicando-se ambos os lados dessa desigualdade por $f(x)$ obtemos

$$\lambda f(x) \geq \frac{a - x_1}{M} f(x),$$

e usando a desigualdade $-f(x) \geq -M$, temos

$$\begin{aligned} F(x) &= \lambda f(x) + x \\ &\geq \frac{a - x_1}{M} f(x) + x \\ &= \frac{a - x_1}{-M}(-f(x)) + x \\ &\geq \frac{a - x_1}{-M}(-M) + x \\ &= a - x_1 + x. \end{aligned}$$

Desta forma, como sabemos que $f(x) \geq 0$ implica em $x > x_1$, segue-se que $F(x) \geq a - x_1 + x > a$.

Consideremos agora que o ponto x seja tal que $f(x) < 0$. Neste caso $\lambda f(x) > 0$ e, portanto,

$$F(x) = \lambda f(x) + x > x \geq a.$$

Portanto, concluímos que $F(x) \geq a$ para todo $x \in [a, b]$.

Vamos mostrar agora que, se $a \leq x \leq b$, então $F(x) \leq b$. Consideremos x um ponto tal que $f(x) \geq 0$. Neste caso $\lambda f(x) \leq 0$ e, consequentemente,

$$F(x) = \lambda f(x) + x \leq x \leq b.$$

Para pontos x tais que $f(x) < 0$, usamos a desigualdade $\lambda \geq \dfrac{b - x_2}{m}$. Multiplicando-se ambos os lados da última expressão por $f(x)$, obtemos

$$\lambda f(x) \leq \frac{b - x_2}{m} f(x).$$

Usando a desigualdade $-f(x) \leq -m$, obtemos

$$\begin{array}{rcl} F(x) & = & \lambda f(x) + x \\ & \leq & \dfrac{b - x_2}{m} f(x) + x \\ & = & \dfrac{b - x_2}{-m} (-f(x)) + x \\ & \leq & \dfrac{b - x_2}{-m} (-m) + x \\ & = & b - x_2 + x. \end{array}$$

Como temos que $f(x) < 0$, obrigatoriamente temos que $x < x_2$ e, consequentemente $F(x) \leq b - x_2 + x < b$. Portanto, $F(x) \leq b$ para todo $x \in [a, b]$.

Com λ definido em (1), temos que a aplicação F é contínua em $[a, b]$ e é tal que $F(a) \geq a$ e $F(b) \leq b$. Daí, pelo Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, existe $x_0 \in [a, b]$, tal que

$$F(x_0) = x_0,$$

isto é,

$$F(x_0) = \lambda f(x_0) + x_0 = x_0 \Leftrightarrow \lambda f(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = 0.$$

Assim, o Teorema está demonstrado para o caso $d = 0$. No caso $d \neq 0$, podemos utilizar o mesmo argumento, aplicando o raciocínio anterior à função $g(x) = f(x) - d$.

No caso em que $f(a) > f(b)$, a demonstração do Teorema do Valor Intermediário é análoga.
$\square$

Concluímos portanto que os teoremas do Valor Intermediário e o do Ponto Fixo de Brouwer são equivalentes.

Mais informações sobre o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer podem ser obtidas em [2, 4, 5]. Resultados gerais sobre outros Teoremas de Ponto Fixo podem ser obtidas em [2].

Referências

[1] LIMA, E. L., *Análise Real volume 1. Funções de uma Variável*, 12.ed., Rio de Janeiro, IMPA, (2016). 198 p. (Coleção Matemática Universitária)

[2] MARTINS, E. M., FERREIRA, W. M.; *Introdução à Teoria de Pontos Fixos*. Em preparação.

[3] MUNIZ NETO, A. C., *Fundamentos de Cálculo*, Rio de Janeiro, SBM, 2015. 577 p. (Coleção PROFMAT)

[4] PEREIRA, R. O. *O Teorema do Ponto Fixo de Brouwer via Lema da Retração*. 45 f. Monografia de Conclusão de Curso (Graduação em Licenciatura em Matemática)-Universidade Federal de Ouro Preto, 2017.

[5] SHASHKIN, Yu. A. *Fixed Points* , Volume 2, Traduzido do Russo por Viktor Minachin, AMS, 1991 (Mathematical World).