Revista de Matemática da UFOP
ISSN: 2237-8103

Construções Geométricas e Equivalência de Áreas

Fabian Kosme Castello Branco Santos fabiancastello@globo.com
Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil

Luiz Gustavo de Oliveira Carneiro carneiro.luizgustavo@gmail.com
Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil

Monique Rafaella Anunciação de Oliveira monique@ufop.edu.br
Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil

Resumo

Nossa maior ênfase neste trabalho dar-se-á no processo conhecido como equivalência de áreas e como ele era usado para o cálculo de áreas de figuras planas. Sendo assim, construiremos, com base em proposições encontradas no livro Elementos de Euclides, todo o processo para a quadratura de regiões poligonais. Apresentaremos uma série de exemplos a serem aplicados usando os recursos do GeoGebra que poderão contribuir para dinamizar o processo de aprendizagem do conteúdo envolvendo equivalência de áreas de figuras planas.

Palavras-chave

Geometria euclidiana plana, Construções geométricas, Equivalência de áreas, Quadratura.

1 Introdução

Esse trabalho é resultado da dissertação de mestrado [9]. Ele consiste em apresentar, através de um conjunto de procedimentos para a construção de formas geométricas, resolução de problemas e demonstrações de algumas das proposições de Euclides com a utilização de régua não-graduada e compasso. Inicialmente, vamos voltar na história e destacar alguns fatos importantes que contribuíram para o desenvolvimentos da geometria, extraídos de [1] e [6].

O Papiro de Rhind ou Ahmes (1650 a.C.), documento egípcio de papiro com cerca de 5 m de comprimento por 0,30 m de largura que continha a solução de problemas de diversas áreas da matemática, principal fonte do conhecimento matemático do Egito antigo, continha 85 problemas sobre questões variadas, nas quais apenas vinte e seis se referem a geometria, a maioria provindo de mensuração para cálculos de áreas de terras e volumes de celeiros. Nesse papiro, em alguns dos problemas, os Egípcios calcularam áreas de triângulos e retângulos.

Nesse momento da história, podemos fazer uma associação dos métodos de transformar triângulos e trapézios isósceles em retângulos para o cálculo de suas áreas, com o início da teoria de congruências e das ideias de demonstrações em geometria, mas não há evidências de os egípcios terem ido além. Ao invés disso, em sua geometria faltava uma distinção clara entre as relações que são exatas e as que são apenas aproximações [1].

Entre 330 a.C. e 275 a.C., viveu o geômetra grego Euclides, autor de "Os Elementos", [5], obra que contém as principais descobertas geométricas de seus precursores. Euclides atraiu um grande número de discípulos, o que possibilitou a propagação de suas ideias, entre elas, que a coincidência de duas figuras planas por superposição era um passo para concluir que elas apresentam a mesma área, ou seja, eram figuras equivalentes. Assim, quando Euclides enunciou em suas proposições que triângulos de mesmas bases situadas entre as mesmas paralelas são iguais (equivalentes) e que paralelogramos de mesmas bases situadas entre as mesmas paralelas também são iguais (equivalentes), ele estaria se referindo que essas figuras apresentam a mesma área.

Nessa fase da história, os gregos transformaram a geometria empírica dos egípcios, a que atendia a necessidade daquela época, em geometria sistemática e demonstrativa. No século XVII, o conceito de área reapareceu e com ele apareceram também os problemas de quadraturas, uma forma de comparar, segundo suas áreas, duas figuras planas sendo conhecida a área de uma delas.

Utilizaremos como recurso tecnológico nesse trabalho o software GeoGebra, que simulará os traçados executados por esses instrumentos.

Neste trabalho, um ponto será representado por uma letra maiúscula e uma reta por uma letra minúscula ou por dois pontos pertencentes a ela, por exemplo a reta que passa pelos pontos A e B será representada por $\overleftrightarrow{AB}$. Representaremos um segmento de reta pelos pontos de suas extremidades, sendo assim, um segmento com extremidades nos pontos A e B será denotado por AB e sua medida representada por $\overline{AB}$. Uma semirreta que tem origem no ponto A e que passa pelo ponto B será representada por esses pontos, cuja primeira referência será o ponto de extremidade seguida do outro ponto, ou seja, $\overrightarrow{AB}$. Para denotarmos que uma reta r é paralela a uma reta s escreveremos $r \parallel s$. Se duas retas r e s são perpendiculares, então escreveremos $r \perp s$.

2 Construções geométricas

O desenvolvimento acelerado da matemática do mundo antigo aconteceu devido aos grandes filósofos, pensadores, gregos extraordinários que colocaram a lógica, o raciocínio e a razão como ferramentas para descobrir coisas novas e tentar explicar o mundo em que viviam. As construções geométricas estavam no centro desse desenvolvimento e continuam até hoje com grande importância para a compreensão da matemática elementar. Estudar problemas que envolvem desenho geométrico desafiam o raciocínio e exigem um sólido conhecimento dos fundamentos teóricos da geometria.

Nesse capítulo, mostraremos algumas construções geométricas elementares que servirão de base para o desenvolvimento dos capítulos posteriores, que serão feitas com o uso do software GeoGebra, baseadas no uso de régua não-graduada e compasso, instrumentos utilizados desde a época dos pitagóricos na antiga Grécia, no século V a.C. As principais referências utilizadas nesse capítulo foram [4] e [8].

2.1 Construções elementares

Há 2000 anos, a palavra "número" significava número natural. Não existiam números negativos nem racionais, as frações eram interpretadas apenas como razões entre números ou entre grandezas. Os gregos representavam uma grandeza através de segmentos de reta e foi com essa ideia que hoje nos deparamos com a relação de associar um número com um lugar em uma reta graduada.

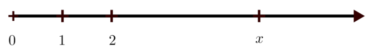

Figura 1: Reta graduada

Antigamente, a ideia tida como unidade de medida era a de um comprimento qualquer para situações diversas.

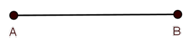

Figura 2: Unidade de medida

Iniciaremos aqui algumas construções geométricas elementares que podem ser realizadas apenas com o uso de régua não-graduada e compasso.

2.1.1 Adição de dois segmentos

Sejam os segmentos AB e CD como ilustrado na figura a seguir.

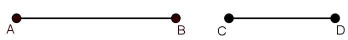

Figura 3: Segmentos AB e CD

Para determinar a representação geométrica do segmento cujo comprimento é igual a $\overline{AB} + \overline{CD}$, trace uma reta $r = \overleftrightarrow{EF}$ e transporte o segmento

AB para r da seguinte maneira: coloque a ponta seca do compasso em A e a outra extremidade em B. Com essa mesma abertura, centre o compasso em E e determine o ponto G através da interseção da semirreta $\overrightarrow{EF}$ com a circunferência de centro em E e raio $\overline{AB}$. Transporte o segmento CD para reta r, a partir do ponto G, obtendo o ponto H, tal que $\overline{GH} = \overline{CD}$ e $G \in EH$. O segmento EH é tal que $\overline{EH} = \overline{AB} + \overline{CD}$.

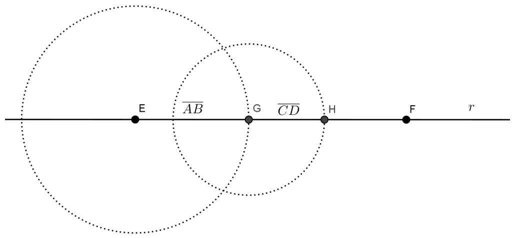

Figura 4: Segmento de medida $\overline{AB} + \overline{CD}$

2.1.2 Ponto médio de um segmento

Para determinarmos o ponto médio de um segmento AB dado, fixe uma abertura $r > \overline{AB}/2$ e trace duas circunferências de raio r com centros em A e B; marque os pontos P e Q de interseção das circunferências. Trace a reta que passa por P e Q e marque o ponto M de interseção com o segmento AB. O ponto M é o ponto médio de tal segmento.

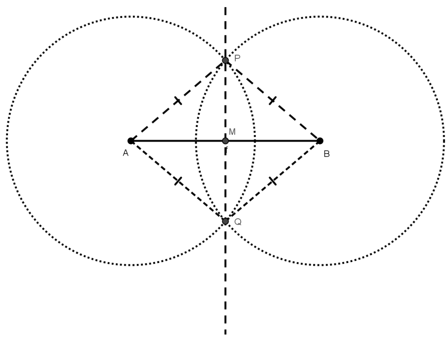

Figura 5: Ponto médio de um segmento

Justificativa: em relação aos triângulos ΔAPQ e ΔBPQ, temos as igualdades das medidas dos lados $\overline{AP} = \overline{BP}$, $\overline{AQ} = \overline{BQ}$ e PQ é lado comum aos triângulos, logo pelo caso de congruência de triângulos lado, lado, lado ($L.L.L.$), conclui-se que $\Delta APQ \equiv \Delta BPQ$, com isso vale a igualdade dos ângulos $A\hat{P}Q = B\hat{P}Q$. Em relação aos ΔAPM e ΔBPM, temos que $\overline{AP} = \overline{BP}$, $A\hat{P}M = B\hat{P}M$ e o lado PM é comum aos mesmos, então pelo caso de congruência lado, ângulo, lado ($L.A.L.$), $\Delta APM \equiv \Delta BPM$, daí, $\overline{AM} = \overline{BM}$.

2.1.3 Reta perpendicular

Dados uma reta r e um ponto P, para construir uma reta perpendicular a r e passando por P, precisamos considerar os casos em que P pertence a r e que P não pertence a r.

a) Se $P \notin r$, com o compasso centrado em P, trace uma circunferência de raio maior que a distância do ponto P à reta r, que intersecte a reta r em dois pontos distintos A e B. Construa o ponto médio M do segmento AB, seguindo os passos da seção 2.1.2, e trace a reta $s = \overleftrightarrow{PM}$.

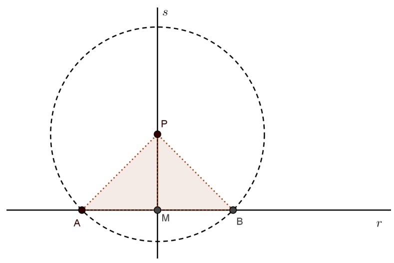

Figura 6: Reta perpendicular com $P \notin r$

Justificativa: Em relação aos ΔPAM e ΔPBM, temos que $\overline{PA} = \overline{PB}$ e $\overline{AM} = \overline{BM}$; como PM é um lado comum dos triângulos, segue do caso de congruência $L.L.L.$ que $\Delta PAM \equiv \Delta PBM$. Temos então que $P\hat{M}A + P\hat{M}B = 180°$, mas $P\hat{M}A = P\hat{M}B$, logo, $\overleftrightarrow{PM} \perp r$.

b) Se $P \in r$, com o compasso centrado em P e abertura qualquer, trace uma circunferência e marque os pontos A e B de interseção com a reta r. Com centro em A e B e $r > \overline{AB}/2$, trace duas circunferências, sendo o ponto C um dos pontos de interseção das circunferências. Temos que $\overleftrightarrow{CP} \perp r$.

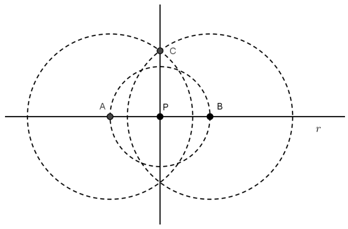

Figura 7: Reta perpendicular com $P \in r$

Justificativa: pelo caso de congruência $L.L.L.$, temos que $\Delta CAP \equiv \Delta CBP$, logo $C\hat{P}A + C\hat{P}B = 180°$, mas $C\hat{P}A = C\hat{P}B$, logo, $\overleftrightarrow{CP} \perp r$.

2.1.4 Retas paralelas

Para construção de retas paralelas vamos considerar dois casos.

a) É dada a distância d entre as duas retas paralelas. Por dois pontos distintos A e B de uma reta r dada, traçamos as semirretas $\overrightarrow{AX}$ e $\overrightarrow{BY}$, ambas perpendiculares a reta r, sendo X e Y pertencentes ao mesmo semiplano determinado pela reta r. Transporte a medida d para as semirretas $\overrightarrow{AX}$ e $\overrightarrow{BY}$ com extremidades em A e B e marque as interseções C e D respectivamente. Trace a reta s que passa por C e D de acordo com a figura 8. A reta s é paralela a reta r.

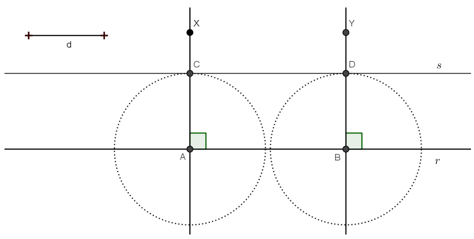

Figura 8: Retas paralelas dada a distância

Justificativa: considere os ΔABC e ΔABD na figura 9 a seguir, temos que $\overline{AC} = \overline{BD}$, $B\hat{A}C = A\hat{B}D$ e AB é um lado comum, então pelo caso $L.A.L.$, os triângulos em questão são congruentes, logo $\overline{BC} = \overline{AD}$. Como BC e AD representam as diagonais de um quadrilátero, podemos concluir que $ABCD$ é um paralelogramo, logo, a reta s que passa por C e D é paralela a reta r que passa pelos pontos A e B.

De modo análogo, construímos a reta t, pertencente ao outro semi-plano determinado pela reta r onde t é a paralela a r e está a uma distância d de r.

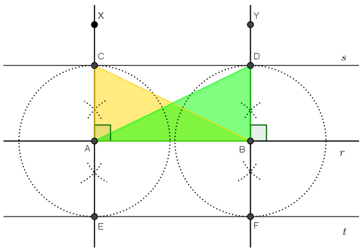

Figura 9: Retas paralelas dada a distância

b) É dado um ponto P pertencente à reta s procurada. Com centro em P e abertura suficiente para interceptar r no ponto A, traçamos a circunferência θ na figura 10. Com centro em A e mesmo raio que a circunferência θ, traçamos a circunferência Γ que encontrará r no ponto B. Com abertura igual a $\overline{BP}$, traçamos a circunferência Σ de centro em A e marcamos o ponto C de interseção com a circunferência Γ. A reta $\overleftrightarrow{CP}$ é a reta procurada.

Justificativa: o quadrilátero $ABPC$ tem lados opostos de mesmas medidas, portanto representa um paralelogramo, logo $CP//AB$ o que nos faz concluir que $\overleftrightarrow{CP}$ é paralela a reta r que passa por A e B.

2.2 Média geométrica

Definimos a *média geométrica* ou *média proporcional* de dois segmentos de medidas a e b como o segmento de medida x tal que $x = \sqrt{ab}$. Apresentaremos, a seguir, um procedimento para a construção de um

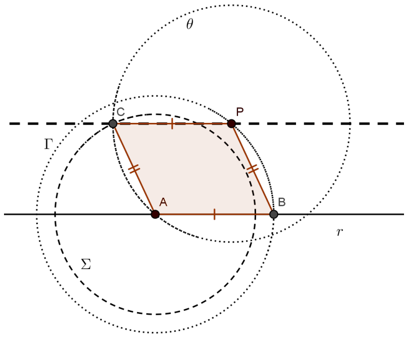

Figura 10: Retas paralelas dado um ponto

segmento cuja medida representa a média geométrica entre os segmentos FG e HI dados, onde $\overline{FG} = a$ e $\overline{HI} = b$.

Trace uma semirreta $\overrightarrow{AY}$. Transporte o segmento FG na semirreta $\overrightarrow{AY}$ com extremidade em A marcando o ponto de interseção B. Transporte o segmento HI na semirreta $\overrightarrow{AY}$ com extremidade B marcando o ponto de interseção C de forma que B fique entre A e C. Determine o ponto médio M de AC e construa a circunferência Γ de centro M e diâmetro $\overline{AC}$. Trace por B a perpendicular a semirreta $\overrightarrow{AY}$ marcando os pontos D e E de interseção com a circunferência Γ e construa os ΔADC e ΔAEC retângulos em D e E, respectivamente, e hipotenusa AC. Os segmentos BD e BE representam a média geométrica entre FG e HI.

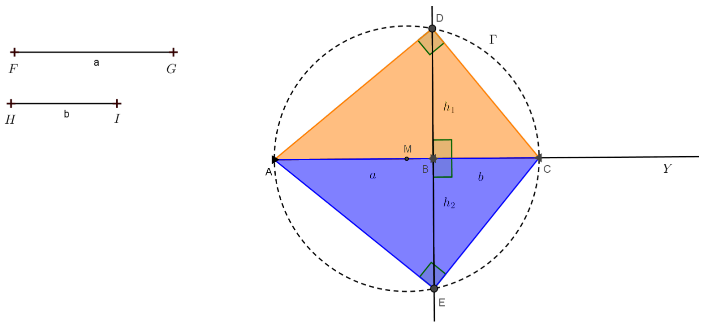

Figura 11: Média geométrica

Justificativa: em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida da altura relativa a hipotenusa é igual ao produto das projeções das medidas de seus catetos, ou seja, pelas relações métricas no ΔACD retângulo em D, temos que $\overline{BD}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{BC} = a \cdot b$. De fato, analisando os ΔABD e ΔDBC, ambos retângulos no vértice B, aplicando o teorema de Pitágoras teremos que $\overline{AD}^2 = h_1^2 + a^2$ e $\overline{CD}^2 = h_1^2 + b^2$.

Somando as equações acima, teremos:

$$\overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 = a^2 + b^2 + 2h_1^2. \tag{1}$$

Mas o ΔACD é retângulo no vértice D, logo pelo teorema de Pitágoras:

$$\overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 = (a + b)^2. \tag{2}$$

Fazendo a substituição de (2) em (1), segue-se: $(a+b)^2 = a^2+b^2+2h_1^2 \Leftrightarrow a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = a^2 + b^2 + 2h_1^2$.

Logo: $2ab = 2h_1^2 \Leftrightarrow h_1^2 = a \cdot b$. Nessa última igualdade temos a demonstração da relação dada acima. Analogamente, $\overline{BE}^2 = a \cdot b$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

3 Equivalência de áreas

Neste capítulo, estudaremos as várias formas de representar uma região poligonal de modo que sua área seja mantida constante. Mostraremos, através de propriedades geométricas e com o uso exclusivo de régua não-graduada e compasso, a construção passo-a-passo de outra região poligonal, podendo esta ser com o mesmo número de lados ou não, com área equivalente à área poligonal inicial. E por fim, faremos a quadratura de regiões poligonais, que consiste em determinar um quadrado de área equivalente a área da região poligonal inicial dada. As principais referências utilizadas neste capítulo foram [2], [3] e [5].

3.1 Proposições de Euclides

Nesta seção, serão expostas algumas das proposições de Euclides baseadas em seu livro Os Elementos [5], que tratam sobre equivalência de áreas, problema principal que abordaremos nesse trabalho. Em seu livro, Euclides falava de polígonos (ou regiões poligonais) iguais entre si, neste trabalho, falaremos de polígonos equivalentes, ou seja, polígonos que possuem a mesma área. A palavra equivalência deriva de: equi = igual + valência = valor.

Proposição 1. *Os paralelogramos que estão sobre a mesma base e nas mesmas paralelas são equivalentes entre si.*

Demonstração. Considerando que as retas $\overleftrightarrow{AF} // \overleftrightarrow{BC}$ na figura 12, vamos mostrar que os paralelogramos $ABCD$ e $EBCF$, ambos sobre a mesma base BC, são equivalentes. Como $ABCD$ é um paralelogramo, $\overline{AD} = \overline{BC}$, e pela mesma situação, $\overline{EF} = \overline{BC}$, logo, $\overline{AD} = \overline{EF}$. Como DE é comum, então $\overline{AE} = \overline{DF}$. Analisando os ΔEAB e ΔFDC, temos que: $\overline{AE} = \overline{DF}$, $E\hat{A}B = F\hat{D}C$ e $\overline{AB} = \overline{CD}$, logo, pelo caso de congruência de triângulos $L.A.L.$, os ΔEAB e ΔFDC são equivalentes. Como o ΔDEG é comum, podemos afirmar que os trapézios $ADGB$ e $EFCG$ são equivalentes. Portanto, os paralelogramos $ABCD$ e $EBCF$ são equivalentes, pois o ΔBCG é comum aos dois paralelogramos. □

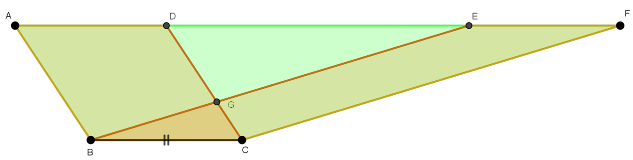

Figura 12: Exemplo de paralelogramos com a mesma base

As duas proposições a seguir se referem a equivalência de triângulos.

Proposição 2. *Os triângulos que estão sobre bases iguais e nas mesmas paralelas são equivalentes entre si.*

Demonstração. Considerando as retas $\overleftrightarrow{AD}//\overleftrightarrow{BF}$ na figura 13, vamos mostrar que os ΔABC e ΔDEF são equivalentes, onde $C, E \in \overleftrightarrow{BF}$ e $\overline{BC} = \overline{EF}$. Trace a reta que contém AD e construa por B a reta s paralela a reta que contém AC. Seja $G = \overleftrightarrow{AD} \cap s$, construa por F a reta r paralela a reta que contém DE e seja $H = \overleftrightarrow{AD} \cap r$. Temos, portanto, dois paralelogramos, $ACBG$ e $DEFH$, equivalentes, pela Proposição 1, pois possuem as mesmas bases e estão sob as mesmas paralelas. Logo se verifica que os segmentos AB e DF são as diagonais dos paralelogramos, que ficam assim divididos em dois triângulos equivalentes, ou seja, a área do ΔABC é a metade da área do paralelogramo $ACBG$ e a área do ΔDEF é a metade da área do paralelogramos $DEFH$. Logo os ΔABC e ΔDEF são equivalentes. $\square$

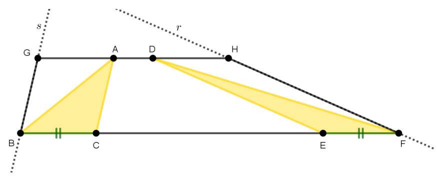

Figura 13: Exemplo de triângulos com a mesma base

Proposição 3. *Os triângulos que estão sobre a mesma base e nas mesmas paralelas são equivalentes entre si.*

Demonstração. Sejam os ΔABC e ΔBCD, ambos com a mesma base BC e sobre as paralelas $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{BC}$. Por B trace a reta r paralela a reta que contém AC; seja $E = \overleftrightarrow{AD} \cap r$, e por C trace a reta s paralela a reta que contém BD; seja $F = \overleftrightarrow{BD} \cap s$. Vamos mostrar que tais triângulos são equivalentes.

Temos que $AD \subset EF$, temos também os paralelogramos $AEBC$ e $DFCB$, que por sua vez, de acordo com a Proposição 1 são equivalentes. Mas, AB é uma diagonal do paralelogramo $AEBC$, logo ela o divide em dois triângulos congruentes pelo caso ângulo, lado, ângulo ($A.L.A.$), onde $A\hat{B}E = B\hat{A}C$, AB é um lado comum e $B\hat{A}E = A\hat{B}C$, sendo um deles o ΔABC. Temos também, que CD é uma diagonal do paralelogramo

$DFCB$, portanto, tal segmento o divide em dois triângulos congruentes pelo caso $A.L.A.$, onde $C\hat{D}F = B\hat{C}D$, CD é um lado comum e $D\hat{C}F = B\hat{D}C$, sendo um deles o ΔBDC. Como os paralelogramos $AEBC$ e $BCFD$ são equivalentes, significa que os triângulos determinados por suas diagonais também são equivalentes, logo conclui-se que ΔABC é equivalente ΔBCD. □

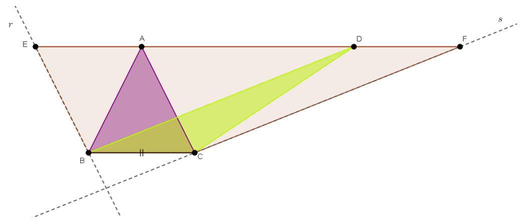

Figura 14: Exemplo de triângulos com bases congruentes

A próxima proposição relaciona um paralelogramo e um triângulo.

Proposição 4. *Caso um paralelogramo tenha tanto a mesma base que um triângulo quanto esteja nas mesmas paralelas, então a área do paralelogramo representa o dobro da área do triângulo.*

Demonstração. Seja $ABCD$ um paralelogramo, então temos que $AB//CD$ e $BC//AD$ conforme figura 15: considere também o ΔBCE com mesma base BC que o paralelogramo $ABCD$ e que está nas mesmas paralelas. Vamos mostrar que a área do paralelogramo é igual ao dobro da área do ΔBCE.

Ligando os vértices A e C, dividimos o paralelogramo $ABCD$ em dois triângulos equivalentes. Considerando o ΔABC, verifica-se que ele está sobre a mesma base BC e sob as mesmas paralelas que o ΔBCE, logo, pela Proposição 3 os triângulos são equivalentes. Portanto, a área do paralelogramo $ABCD$ é o dobro da área do ΔBCE. □

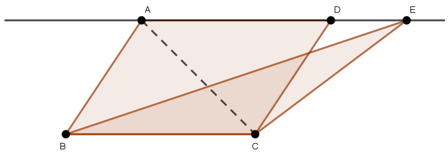

Figura 15: Paralelogramo com área sendo o dobro da área de um triângulo

3.2 Quadratura de um polígono

Os gregos antigos, desde a época de Arquimedes, calculavam áreas de regiões poligonais por meio de comparações com a área de um quadrado conhecido. Utilizando essa noção, o foco desta seção é mostrar, através de construções geométricas com o uso de régua não-graduada e compasso, a quadratura de polígonos.

3.2.1 Quadratura de um triângulo

Dado um triângulo de base b e altura h conforme figura 16, sua quadratura será dada pela relação entre a área do triângulo dada por $A = bh/2$ e a área do quadrado de lado l dada por $A = l^2$. O objetivo é encontrar a medida l tal que $l^2 = bh/2$, ou seja, $l = \sqrt{bh/2}$. Assim concluímos que a medida do lado l do quadrado representa a média geométrica entre as medidas $b/2$ e h. Para isso devemos seguir o procedimento apresentado a seguir.

Sobre uma semirreta $\overrightarrow{DX}$, transporte o segmento $\overline{DE} = b/2$. Sobre a semirreta $\overrightarrow{DX}$ transporte o segmento $\overline{EF} = h$ de tal forma que $EF \cap DE = \{E\}$. Determine a média geométrica $\overline{EI}$ de DE e EF como visto na seção 2.2. O quadrado $EGHI$ representa a quadratura do ΔABC.

3.2.2 Quadratura do retângulo

Dado um retângulo $ABCD$ de base $\overline{BC} = b$ e altura $\overline{CD} = h$, vamos fazer sua quadratura relacionando sua área $A = b \cdot h$ com a área $A = l^2$ do quadrado. O lado do quadrado procurado representa a média geométrica entre a base b e a altura h do retângulo dado. Para encontrarmos o seu

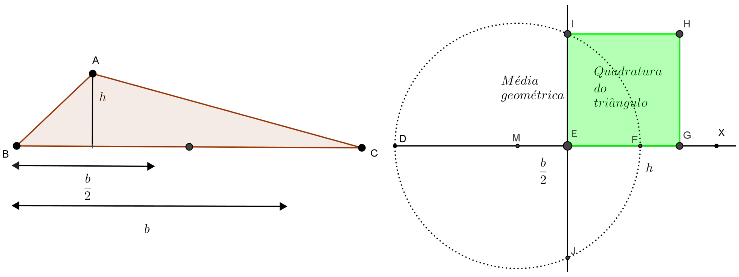

Figura 16: Quadratura de um triângulo

valor seguiremos o procedimento a seguir.

Prolongue um dos lados do retângulo $ABCD$, aqui vamos prolongar o lado BC. Trace a circunferência Θ de centro C e raio igual $\overline{CD}$ e marque o ponto de interseção F entre a circunferência Θ e o prolongamento do lado BC do retângulo, assim, $\overline{CD} = \overline{CF}$. Marque o ponto médio M do segmento BF como feito na seção 2.1.2. Trace a circunferência Γ de centro em M e raio $\overline{MF}$ e prolongue o lado CD do retângulo, marcando o ponto H de interseção com a circunferência Γ. A medida de $\overline{CH}$ representa a média geométrica entre as medidas $\overline{BC}$ e $\overline{CF}$, que correspondem a b e h, respectivamente, ou seja, representa a medida do lado do quadrado de área equivalente ao retângulo dado.

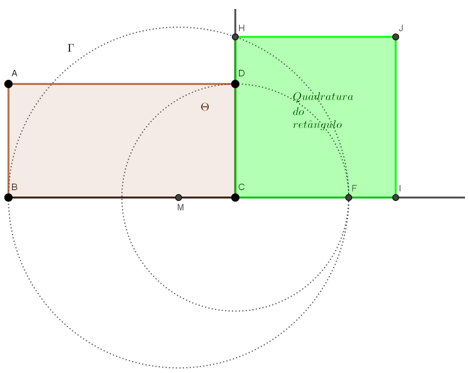

Figura 17: Quadratura do retângulo

3.2.3 Quadratura de um polígono de n lados

Considere o polígono $A_1A_2 \cdots A_n$ de n lados abaixo. Para fazer a quadratura desse polígono de n lados ($n \geq 4$), procedemos de maneira a encontrar um polígono de $n-1$ lados equivalente ao polígono de n lados dado seguindo os procedimentos abaixo.

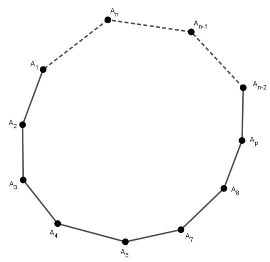

Figura 18: Polígono de n lados

Escolha um vértice qualquer, vamos considerar em nossa construção o vértice A_1. Trace por A_1 uma reta s paralela a reta r determinada pelos vértices A_2 e A_n e construa o $\Delta A_1A_2A_n$. Faça A_1 percorrer sobre a reta s até coincidir com o prolongamento do lado A_nA_{n-1}.

De acordo com a Proposição 3, o $\Delta A_1A_2A_n$ é equivalente ao $\Delta A_1'A_2A_n$. Logo, o polígono $A_1'A_2A_3 \cdots A_{n-1}$, com $n-1$ lados, é equivalente ao polígono de n lados, como visto na figura 19.

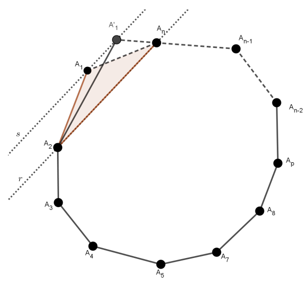

Figura 19: Polígono de $n-1$ lados $A_1'A_2 \cdots A_{n-1}$ equivalente ao polígono de n lados $A_1A_2 \ldots A_n$

Pelo princípio de indução finita, repetiremos esse procedimento de reduzir a quantidade de lados em 1 unidade sucessivamente, até obtermos um triângulo equivalente ao polígono de n lados dado. Assim, seguindo os passos descritos na seção 3.2.1, obteremos a quadratura do triângulo, que é equivalente a quadratura desejada.

4 Proposta de atividades

Nesse capítulo, vamos apresentar alguns problemas como sugestões para aplicações em uma sala de aula do ensino médio, extraídas de [7], cujo objetivo principal é expor aos alunos algumas maneiras de se aplicar as proposições explicitadas em nosso trabalho através de construções geométricas com o uso de régua não-graduada e compasso.

Problema 1. *Construa um pentágono $AB'C'D'E'$, semelhante ao pentágono $ABCDE$ dado, cuja área seja o quíntuplo da área deste, sendo que os vértices B' e E' devem estar nas semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AE}$, respectivamente.*

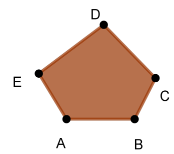

Figura 20: Pentágono dado

Solução: Pelas propriedades entre figuras semelhantes, sabemos que a razão entre os quadrados das medidas de dois lados correspondentes é igual a razão entre as medidas das áreas dessas figuras na mesma ordem. Então, considerando AB' o lado do pentágono $AB'C'D'E'$ correspondente ao lado AB do pentágono $ABCDE$, temos que:

$$\left(\frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}}\right)^2 = \frac{5}{1} \Leftrightarrow \overline{AB}' = \overline{AB} \cdot \sqrt{5}. \tag{3}$$

Inicialmente, vamos obter o segmento AB', que representa um dos lados do pentágono procurado. Considere $\overline{AB} = x$. Trace a semirreta $\overrightarrow{BA}$ e transporte AB com extremidade em A, obtendo o segmento de medida $2x = \overline{BF}$. Trace a reta r perpendicular a $\overrightarrow{BA}$ que passa por F e transporte AB com extremidade em F, obtendo o ponto G no semiplano determinado pela reta $\overleftrightarrow{AB}$ que não contém o pentágono $ABCDE$. Temos então o ΔBFG retângulo em F. Aplicando o Teorema de Pitágoras, obtemos $\overline{BG} = x \cdot \sqrt{5}$.

Mas $x = \overline{AB}$, então de acordo com a equação (3), $\overline{BG}$ é o lado do pentágono cujo vértice B' está sobre a $\overrightarrow{AB}$. Seguindo os passos a seguir, vamos obter o pentágono de área igual ao quíntuplo da área do pentágono $ABCDE$ dado.

Transporte BG em $\overrightarrow{AB}$ com extremidade em A marcando o ponto B' de interseção com essa semirreta, onde $B \in AB'$. Trace as semirretas $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{AE}$. Por B' trace a reta paralela ao lado BC e marque o ponto C' de interseção com a semirreta $\overrightarrow{AC}$. Por C' trace a reta paralela ao lado CD e marque o ponto D' de interseção com a semirreta $\overrightarrow{AD}$. E finalmente, por D' trace a reta paralela ao lado DE marcando o ponto E' de interseção com a semirreta $\overrightarrow{AE}$. O pentágono $AB'C'D'E'$ é o pentágono procurado.

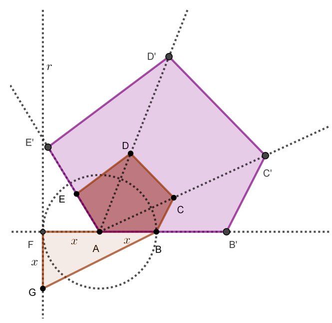

Figura 21: Pentágono com o quíntuplo da área

Problema 2. *Construa um retângulo $MNPQ$, de semiperímetro p, equivalente ao quadrado $ABCD$ dado de tal modo que os vértices Q e N sejam opostos.*

Solução: Considere l o lado do quadrado e a e b os lados do retângulo procurado. Temos que o semiperímetro p do retângulo é representado por $p = a + b$. Como os polígonos são equivalentes, temos que $l^2 = a \cdot b$, assim a medida l do lado do quadrado representa a média geométrica

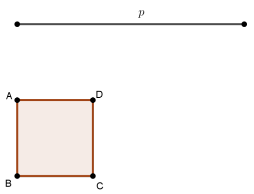

Figura 22: Dados do problema

entre as medidas a e b dos lados do retângulo.

Para fazer a construção, trace a semirreta $\overrightarrow{BC}$ e marque um ponto M qualquer, de modo que M seja externo ao quadrado $ABCD$. Transporte a medida p na semirreta $\overrightarrow{BC}$ com extremidade em M e marque o ponto F de interseção com a mesma, de modo $M \in CF$. Trace a circunferência de diâmetro $\overline{MF}$. Passe a reta t pelo ponto D paralela a $\overrightarrow{BC}$ e marque o ponto E (o ponto de interseção com a circunferência mais distante do ponto D).

Por E trace a reta u perpendicular a semirreta $\overrightarrow{BC}$ e marque o ponto Q de interseção com a mesma. Então temos que $\overline{EQ} = l$. Como dito anteriormente, l representa a média geométrica entre as medidas dos lados do retângulo, logo, MQ e QF representam os lados do retângulo procurado, assim temos $a = \overline{MQ}$ e $b = \overline{QF}$. Trace a circunferência de raio $R = b$ e centro Q, e marque um dos pontos de interseção com a reta u, em nossa construção marcamos o ponto P. Passe por P a reta s paralela a reta t e por M a reta r paralela a reta u e marque o ponto N de interseção entre elas. O retângulo $MNPQ$ representa a solução do nosso problema.

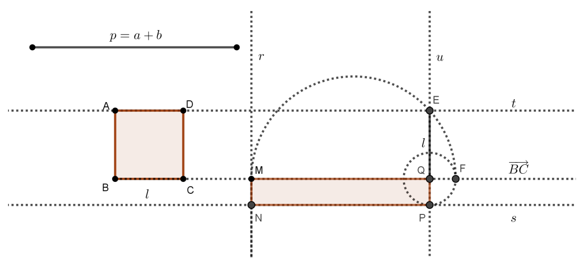

Figura 23: Retângulo $MNPQ$ procurado

Problema 3. *Construa um quadrado $ABCD$ equivalente à união de dois quadrados dados. (Observação: os vértices B e D deverão estar nas linhas tracejadas dadas, perpendiculares entre si.)*

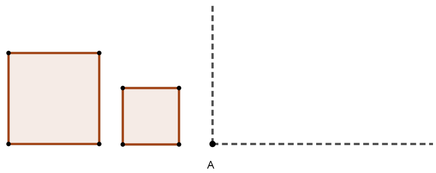

Figura 24: Dados do problema

Solução: Vamos considerar os dois quadrados dados como $MNOP$ e $RSTU$ de lados, respectivamente, iguais a a e b. Sendo l a medida do lado do quadrado procurado, temos então que $l^2 = a^2 + b^2$, pois a área do quadrado procurado é dada pela soma das áreas dos quadrados dados. Sendo assim, o lado do quadrado procurado representa a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos são iguais a a e b. Vamos seguir os procedimentos abaixo para a construção do quadrado procurado.

Trace uma circunferência de raio $r = b$ e centro em M e marque o ponto V de interseção com o lado MN do quadrado $MNOP$. Trace o segmento VP criando o triângulo retângulo PMV de catetos medindo a e b e hipotenusa medindo $l = \sqrt{a^2 + b^2}$, que representa a medida do lado do quadrado $ABCD$ procurado. Trace uma circunferência de raio igual a l e centro em A e marque os pontos B e D de interseção com as linhas tracejadas. Trace a reta r pelo ponto B paralela a $\overrightarrow{AD}$ e outra reta pelo ponto D paralela a $\overrightarrow{AB}$, e marque o ponto C de interseção dessas retas. Desse modo, $ABCD$ é o quadrado procurado.

5 Conclusão

Temas importantes ensinados nas escolas de ensino básico foram explicitados nesse trabalho, o que nos deu a oportunidade de entender a ideia primitiva de tais temas, como por exemplo "congruência", que

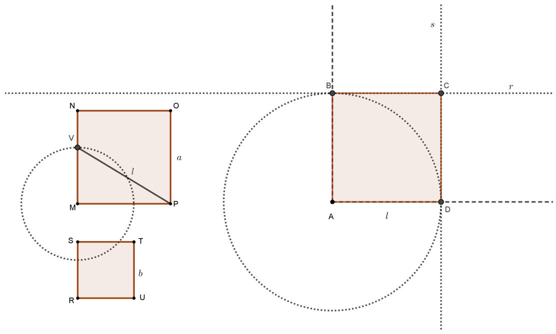

Figura 25: Quadrado procurado

fazendo sua expansão, nos possibilitou a chegar no tema principal, a equivalência de áreas.

Devemos entender que o trabalho do professor atualmente deve ser complementado com técnicas mais atrativas que as usadas na época de Euclides. Era uma prática em "Os Elementos", o uso de régua não-graduada e compasso nas demonstrações de suas proposições e construções geométricas. Nesse trabalho, como uma forma de facilitar o entendimento, foi usado o software GeoGebra como ferramenta tecnológica que substitui os instrumentos propriamente ditos, deixando as construções mais dinâmicas, visíveis e atrativas para que juntos com os nossos alunos possamos construir o conhecimento e difundir o grau de importância da Matemática na vida de cada um de nós.

Esperamos que esse trabalho seja útil, não somente para os professores mas também para os alunos, incentivando-os de alguma forma a perceber o quanto é importante resgatar um pouco da história da matemática para a introdução de novos temas e o quanto é útil a utilização de novas tecnologias.

Referências

[1] Carl B. Boyer. *História da matemática*. Blucher, São Paulo, 2012. Tradução de Helena Castro.

[2] João Pitombeira de Carvalho. Equivalência e aplicação de áreas na matemática grega. *3ª Bienal de Matemática*, 2006. UFG.

[3] Cláudia Helena Vieira Freitas e Dulce Mary de Almeida. Equivalência de áreas. *Revista eletrônica matemática e estatística em foco*, 4(2):1–54, December 2016. Acesso em: 13 jul. 2017.

[4] Eliane Quelho Frota Rezende e Maria Lúcia Bontorim Queiroz. *Geometria euclidiana plana e construções geométricas*. Editora da Unicamp; Imprensa Oficial, Campinas, SP; São Paulo, SP, 2000.

[5] Euclides. *Os elementos*. Editora UNESP, São Paulo, 2009. Tradução e introdução de Irineu Bicudo.

[6] Sonia Regina Facco. Conceito de área: Uma proposta de ensino-aprendizagem. Dissertação (mestrado em educação matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2003. 185 f.

[7] Marco Antônio Manetta. Régua e compasso - Exercícios interativos de desenho geométrico. Acesso em: 15 out. 2017.

[8] Antônio Caminha Muniz Neto. *Geometria*. SBM, Rio de Janeiro, 1 edition, 2013.

[9] Fabian Kosme Castello Branco Santos. Construções geométricas e equivalência de áreas. Dissertação (mestrado profissional em matemática em rede nacional), Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, December 2017.