Sobre um Sistema Termoviscoelástico com Memória

Alves, M.[a], **Rivera, J.**[b], **Sepúlveda, M.**[c] e **Villagrán, B.**[d]

[a] Depto. de Matemática, Universidade Federal de Viçosa, CEP 36570-000 - Viçosa - MG. malves@ufv.br

[b] Laboratório Nacional de Computacão Científica, Rua Getúlio Vagas, 333- Quintandinha, CEP 25651-070 - Petrópolis -RJ. rivera@lncc.br

[c] Depto. de Ingeniería Matemática, Universidad de Concepción, Chile. mauricio@ing-mat.udec.cl

[d] Depto. de Matemática, Universidad del Bío-Bío, Callao 1202, Casilla 5-C - Concepción, Chile. overa@ubiobio.cl

Considere o sistema termoviscoelástico unidimensional com memória

$$
\begin{aligned}
& u_{tt} - g(0)u_{xx} + \beta\theta_x - \mu\, u_{xxt} - \int_0^{+\infty} g'(s)u_{xx}(t-s)ds = 0, \qquad (0,L)\times(0,+\infty)\\
& \theta_t + \gamma q_x + \beta u_{xt} = 0, \qquad (0,L)\times(0,+\infty)\\
& \tau q_t + q + \kappa\theta_x = 0, \qquad (0,L)\times(0,+\infty)
\end{aligned}
$$

em que $u = u(x,t)$, $\theta = \theta(x,t)$ e $q = q(x,t)$ denotam deslocamento, temperatura e fluxo de calor, respectivamente; β, γ, κ, μ e τ são constantes positivas, com as condições iniciais

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad \theta(x,0) = \theta_0(x), \quad q(x,0) = q_0(x),$$

e as condições de fronteira

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \qquad \theta_x(0,t) = \theta_x(L,t) = 0, \quad t > 0.$$

Suponha que a função $g : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ satisfaça às condições

H.1 $g \in C^2(0,+\infty) \cap C[0,+\infty)$, $g' \in L^1(0,+\infty)$;

H.2 $g(s) > 0$, $g'(s) < 0$ e $g''(s) > 0$ para todo $s > 0$;

H.3 $g(+\infty) > 0$

H.4 $g''(s) + \delta g'(s) \geq 0$ para todo $s > 0$, para alguma constante $\delta > 0$, e existem uma constantes positivas s_1 e C tais que se $s \geq s_1$, $g''(s) \leq C|g'(s)|$.

O sistema acima com a lei de Fourier ($\tau = 0$) foi estudado por vários autores. Por exemplo, para $g \equiv 0$, Dafermos [4] considerou o modelo não linear e provou a existência global de uma solução fraca; em Racke & Zheng [2] os autores investigaram a existência global, unicidade e comportamento assintótico de soluções fracas.

Existem vários estudos sobre sistemas viscoelástico ou termoviscoelástico com memória ($g \neq 0$) sob diferentes pontos de vista. Por exemplo, em K. Liu & Z. Liu[3] os autores provam que o semigrupo associado com o sistema viscoelástico estudado não é exponencialmente estável.

O objetivo deste trabalho é mostrar que o semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ associado ao sistema acima é exponencialmente estável, ou seja, existem constantes positivas M e C tais que

$$\|S(t)\| \leq \; M\, e^{-\alpha t}, \; t \geq 0,$$

e que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ não é analítico.

Referências

[1] Z. Liu & S. Zheng, *Semigroups associated with dissipative systems.* Chapman & Hall/CRC, 1999. (Research Notes in Mathematics Series)

[2] R. Racke & S. Zheng , *Global existence and asymptotic behavior in nonlinear thermoviscoelasticity*, Journal of Differential Equations **134** (1987), 46-67.

[3] K. Liu & Z. Liu, *On the type of C_0-semigroups associated with the abstract linear viscoelastic system*, ZAMP **47** (1996), 1-15.

[4] C. M. Dafermos, *Global smooth solutions to the initial boundary value problem for the equations of one-dimensional nonlinear thermoviscoelasticity*, SIAM J. Math. Anal. **13** (1982), 397-408.