Continuidade Absoluta da Melhor Constante de Sobolev de um Domínio Limitado

Ercole, G.[a]

[a] Departamento de Matemática - ICEx, Universidade Federal de Minas Gerais, Av. Antônio Carlos, 6627, Pampulha, CEP 30.161-970 - Belo Horizonte - MG. grey@mat.ufmg.br

Seja

$$\lambda_q := \inf_{0 \not\equiv u \in W_0^{1,p}(\Omega)} \mathcal{R}_q(u),$$

em que: Ω é um domínio suave e limitado de $\mathbb{R}^N$, $1 < p < N$, $1 \le q \le p^\star := \frac{Np}{N-p}$ e

$$\mathcal{R}_q(u) := \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p \,/\, \|u\|_{L^q(\Omega)}^p$$

é o quociente de Rayleigh associado à imersão $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$.

Teorema. A função $q \in [1, p^\star] \mapsto \lambda_q$ é:

1. Lipschitz contínua em cada intervalo fechado contido em $[1, p^\star)$;
2. Contínua à esquerda em $p^\star$, isto é: $\lim_{q \to p^\star} \lambda_q = \lambda_{p^\star}$;
3. Absolutamente contínua em $[1, p^\star]$.

O último resultado segue dos dois primeiros e, para demonstrar estes:

- deduzimos a seguinte fórmula, válida para $1 \le s_1 < s_2 \le p^\star$:

$$|\Omega|^{\frac{p}{s_1}} \mathcal{R}_{s_1}(u) = |\Omega|^{\frac{p}{s_2}} \mathcal{R}_{s_2}(u) \exp\left(p \int_{s_1}^{s_2} \frac{K(t,u)}{t^2} dt \right) \qquad (1)$$

  em que $K(t,u) := \dfrac{\int_\Omega |u|^t \ln |u|^t \, dx}{\|u\|_{L^t(\Omega)}^t} + \ln\left(|\Omega| \, \|u\|_{L^t(\Omega)}^{-t} \right) \ge 0$, e

- utilizando técnicas de conjuntos de nível, provamos a seguinte estimativa válida para uma função extremal $\omega_q \in W_0^{1,p}(\Omega)$ positiva em Ω e L^q-normalizada:

$$2^{\frac{-N(p-1)+\sigma p}{p}} C_q \, \|\omega_q\|_{L^\infty(\Omega)}^{\frac{N(p-q)+\sigma p}{p}} \le \|\omega_q\|_{L^\sigma(\Omega)}^\sigma$$

  em que $1 \le q < p^\star$, $\sigma \ge 1$ e

$$C_q := \left(\frac{p}{p + N(p-1)} \right)^{N+1} \left(\frac{\lambda_{p^\star}}{\lambda_q} \right)^{\frac{N}{p}}.$$

Observações: Como consequência dos resultados acima a função $q \in [1, p^\star] \mapsto \lambda_q$ é diferenciável em quase todo ponto $q \in [1, p^\star]$. Além disso, fórmula (1) leva à seguinte desigualdade diferencial, válida para quase todo ponto $q \in [1, p^\star]$:

$$\frac{d\lambda_q}{dq} + \lambda_q \left(\frac{p}{q} \int_\Omega (\omega_q)^q \ln \omega_q dx \right) \ge 0.$$

Em $q = p$ (caso em que λ_p é o primeiro autovalor do p-Laplaciano) a função é diferenciável e vale a igualdade em lugar da desigualdade.