Soluções Positivas para uma Classe de Sistemas Elípticos com Potenciais Singulares

Carrião P. C.[a], **Lisboa N. H.**[b] e **Miyagaki O. H.**[c]

[a] Departamento de Matemática, Universidade Federal de Federal de Minas Gerais, Av. Antônio Carlos, 6627 - Bairro Pampulha, CEP 31270-010 - Belo Horizonte - MG. carrion@mat.ufmg.br

[b] Departamento de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Montes Claros, Av. Dr. Ruy Braga, s/n - Vila Mauricéia, CEP 39401-089 - Montes Claros - MG. narciso.lisboa@unimontes.br

[c] Departamento de Matemática, Universidade Federal de Juiz de Fora, Cidade Universitária - Bairro Martelos, CEP 36036-330 - Juiz de Fora - MG. ohmiyagaki@gmail.com

Neste trabalho estudamos a existência de soluções positivas para o sistema elíptico

$$\begin{cases} -\varepsilon^2\Delta u + V_1(x)u = K(x)Q_u(u,v) & \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ -\varepsilon^2\Delta v + V_2(x)v = K(x)Q_v(u,v) & \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ u,v \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N), \qquad u,v>0 & \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ \lim\limits_{|x|\to\infty} u(x) = \lim\limits_{|x|\to\infty} v(x) = 0, \end{cases}$$

em que $\varepsilon > 0$ é um parâmetro pequeno; V_1, V_2 e K satisfazem as condições:
(V) $V_1, V_2 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ são não negativos e contínuos em $\mathbb{R}^N \setminus S_0^1$ e $\mathbb{R}^N \setminus S_0^2$, respectivamente, onde S_0^1 e S_0^2 são conjuntos limitados de medida de Lebesgue zero. Além disso, $Z \cap \overline{S_0^1} = Z \cap \overline{S_0^2} = \emptyset$, $Z = \{x \in \mathbb{R}^N \setminus S_0 \;\; ; \;\; V(x) = 0\}$, $S_0 = S_0^1 \cup S_0^2$ e $V(x) = \min\{V_1(x), V_2(x)\}$. Suponha ainda que
(V_a) $\liminf_{d(x,S_0)\to 0} V(x) \in (0,\infty]$ e (V_b) $\liminf_{|x|\to\infty} |x|^2 V(x) \geq 4\lambda$, para algum $\lambda > 0$.
(K) $K \in L^{q_0}_{loc}(\mathbb{R}^N)$, para algum $q_0 \geq \frac{2^*}{2^*-(p+1)} \max\{\frac{p+1}{p-1}, \frac{2^*}{2^*-(p+1)}\}$, é não negativo e contínuo em $\mathbb{R}^N \setminus S$, onde S é um conjunto limitado de medida de Lebesgue zero. Além disso, suponhamos que $\limsup_{|x|\to\infty} K(x)\,|x|^{-\gamma_\infty} < \infty$, para algum $\gamma_\infty > 0$.
A função $Q \in C^{1,\nu}([0,+\infty) \times [0,+\infty), \mathbb{R})$, $\nu \in (0,1)$, é homogênea de grau $p+1$, com $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$, para $N \geq 3$ e satisfaz:
(Q_1) Existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\begin{cases} |Q_u(u,v)| \leq C(|u|^p + |v|^p), \forall u,v \geq 0, \\ |Q_v(u,v)| \leq C(|u|^p + |v|^p), \forall u,v \geq 0; \end{cases}$$

(Q_2) Existem constantes η_1, $\eta_2 > 0$ tais que

$$\eta_1(|u|^{p+1} + |v|^{p+1}) \leq Q(u,v) \leq \eta_2(|u|^{p+1} + |v|^{p+1}) \; \forall u,v > 0;$$

(Q_3) $Q_u(0,1)$, $Q_v(1,0) > 0$;
(Q_4) $Q_u(u,v), Q_v(u,v) \geq 0 \; \forall u,v \geq 0$.

Referências

[1] C. O. Alves, *Local mountain pass for a class of elliptic System,* J. Math. Anal. Appl. 335 (2007), 135-150.

[2] J. Byeon e Z.-Q. Wang, *Standing waves with a critical frequency for nonlinear Schrödinger equations,* Arch. Ration. Mech. Anal. 165 (2002), 295-316.

[3] J. Byeon e Z.-Q. Wang, *Standing waves for nonlinear Schrödinger equations with singular potentials,* Ann. I. H. Poincaré - AN 26 (2009), 943-958.

[4] D. C. de Morais Filho e M. A. S. Souto, *Systems of p-laplacean equations involving homogeneous nonlinearities with critical Sobolev exponent degrees,* Comm. Partial Differential Equations 24 (1999), 1537-1553.