

COMPUTATIONAL METHODS FOR DETERMINING BALANCED GRAPHS

Jeferson R.P. Coelho¹, Catarina M. de Jesus¹, Pantaleon D. R. Sanchez²

Resumo: *Queremos mostrar um método computacional para verificar quando um grafo é balanceado, no sentido de ter um equilíbrio entre seus pesos nos vértices e a diferença entre as duas cores nos vértices. Este equilíbrio determina se o grafo dado pode ser um invariante para aplicações estáveis entre superfícies.*

Palavras-chave:

Introdução

Os estudos sobre contornos aparentes tem interessado vários autores. Quando esses contornos vem de aplicações estáveis entre superfícies, que são imagem do conjunto singular, um dos grandes interesse é a busca de invariantes para a classificação dessas aplicações.

No caso de uma aplicação $f : M \rightarrow N$, se M é uma superfície fechada, segundo Whitney [1] o conjunto singular está formado por um conjunto de curvas simples (sem auto intersecções), fechadas e disjuntas em M , separando a superfície em componentes conexas, enquanto que a imagem do conjunto singular é um conjunto de curvas sobre N com um número finito de intersecções transversas e pontos de cúspides isoladas.

Em busca de invariante para auxiliar na classificação destas aplicações estáveis, começando por aplicações no plano, Hacon-Mendes-Romero, associou grafo com peso nos vértices ao complemento do conjunto singular da aplicação estáveis entre superfícies e estudaram estes como um invariante topológico, [2].

A parte especial destas aplicações estáveis são as dobras (aplicações sem cúspides). Em [2], foi provado que todo grafo bipartido *balanceado* pode ser grafo de uma aplicação estável na 2-esfera, conseqüentemente no plano. A recíproca sai diretamente da fórmula de Quine, [?]. O balanceamento está diretamente relacionado com o grafo ser bipartido e esta não é uma condição necessária para aplicações entre superfícies não orientadas. Neste caso exigimos somente que o grafo possua pelos menos um subgrafo bipartido maximal *q-balanceado*.

A busca de um subgrafo *q-balanceado* pode não ser tão simples, para auxiliar este caso, recorreremos o uso de recursos computacionais, o software “SDGB” (Software for determine balanced graph), implementado especialmente para a busca destes subgrafos. Este software nos fornece os resultados em tempo aceitável para um grafo, onde a diferença entre o número de arestas e de vértices não é muito grande.

¹Universidade Federal de Viçosa,
jefersonromulo@gmail.com, cmendes@ufv.br

²Universidad CEU-Cardenal Herrera - València
pantaleon.romero@uch.ceu.es

Grafos e Aplicações Estáveis

Uma aplicação $f : M \rightarrow N$ é dita ser estável se existe alguma vizinhança V_f de f , na topologia C^∞ -Whitney, tal que toda aplicação g em V_f é \mathcal{A} -equivalente a f (no sentido de difeomorfismo). Neste caso o conjunto singular, Σf está formado por curvas fechadas, sem auto-intersecção que separa a M em um conjunto de regiões abertas e disjuntas. Vamos denotar por M_i as superfícies do complemento do conjunto singular em M cujo bordo são componentes de Σf e $M = \bigcup_i M_i$.

Em busca de invariantes, Hacon-Mendes-Romero, associaram grafo com peso nos vértices ao complemento do conjunto singular, $M \setminus \Sigma$, e estudaram estes grafos como invariante topológico para auxiliar na classificação de aplicações estáveis no plano e na 2-esfera, [2].

De uma forma geral, podemos associar um grafo com peso nos vértices ao par (M, \mathcal{C}) , onde \mathcal{C} é um conjunto finito de curvas fechadas, disjuntas e mergulhadas sobre a superfície orientada.

Cada componente de \mathcal{C} está associada a uma aresta a e a cada componente U de $M \setminus \mathcal{C}$ corresponde a um vértice v no grafo, de tal forma que um vértice v e uma aresta a são incidentes se, e somente se, a curva representada por a encontra-se no bordo da região representada por v . O peso de v correspondente, ao gênero de superfície U , será denotado por T se U for orientado e por P se U for não orientado. Se uma aresta laço no grafo (aresta conectando único vértice) corresponde a uma curva que tenha como vizinhança sobre M uma faixa de Mobius, colocaremos nesta aresta um \star , para distinguir esta do caso em que uma vizinhança da curva seja um cilindro. Um resultado natural entre grafos e superfícies com curvas é:

1. *Existe uma correspondência entre os pares (M, \mathcal{C}) e os grafos com pesos, inteiros positivos, nos vértices. O gênero de M é dado por $1 - V + E + T$, se M é orientada, ou $2(1 - V + E + T) + P - S$, se M é não orientada, onde V , E , T , P e S correspondem, respectivamente, o total de vértices, o total de aresta, o total de peso dos vértices associados às componentes orientadas, o total de peso dos vértices associados as componentes não orientada.*

Com a associação de grafos a superfícies com curvas, surge naturalmente as seguintes perguntas:

a) Quais grafos com pesos que podem ser associados às aplicações estáveis entre duas superfícies?

b) Quais são os grafos com pesos que podem ser associados às aplicações dobradas, que são as aplicações estáveis sem cúspides, entre duas superfícies?

Estas questões foram tratadas em [2] para aplicações estáveis na 2-esfera e no plano.

No caso geral, qualquer grafo \mathcal{G} dado, existe alguma aplicação estável entre duas superfícies $f : M \rightarrow N$, com cúspides ou não, que realiza \mathcal{G} , onde $g(M) = 2(1 - V + E + T) + P - S$. Esta aplicação pode ser obtida a partir de outra aplicação mais simples, por transições que alteram o número de componte do conjunto singular e por cirurgia de aplicações, que pode alterar o grafo, definida em [2], que pode ser de dois tipos: *i*) horizontal, onde no grafo são identificados duas arestas a com b e os dois pares de vértices consecutivos, u, v e w, z incidentes, respectivamente, as arestas a e b , como segue: $(u, a, v) \leftrightarrow (w, b, z) = (uw, ab, vz)$. *ii*) vertical, onde os vértices u e w são conectados por uma nova aresta a , resultando na sequência (u, a, w) no novo grafo.

A técnica de associar grafo a aplicações estáveis, além do grafo ser um invariante destas aplicações, é uma grande ferramenta na construção de novas aplicações estáveis, principalmente quando se usa cirurgia de aplicações, pois se dois grafos disjuntos \mathcal{G}_1 e \mathcal{G}_2 são realizáveis por $f_1 : M \rightarrow N$ e $f_2 : M \rightarrow N$, respectivamente, o grafo resultante da cirurgia-soma $\mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{G}_2$, também realiza por uma aplicação $f_1 \oplus f_2 : M_1 \# M_2 \rightarrow N$, onde $g(M) = g(M_1) + g(M_2)$.

É claro que se M é orientada, então qualquer curva de Σf separam duas componentes disjuntas e orientadas em $M \setminus \Sigma f$, que são levadas sobre N com orientações opostas. Consequentemente, o grafo associado a uma aplicação de uma superfície orientada é necessariamente bipartido, onde vértices extremos a uma mesma aresta tem sinais opostos, $+$ ou $-$, em outras palavras, todos os ciclos do grafo tem um número par de aresta e de vértices. Um grafo \mathcal{G} será dito *realizável* se pode ser associado a alguma aplicação estável $f : M \rightarrow N$. O resultado geral

para realização de grafos é:

2. *Qualquer grafo finito \mathcal{G} , com pesos inteiros positivos nos vértices, pode ser realizado por alguma aplicação estável entre superfícies, $f : M \rightarrow N$. Se N é orientada, M é orientada se, e somente se, \mathcal{G} é bipartido. Em qualquer caso, se M é orientada então \mathcal{G} é bipartido.*

Grafos q -balanceados

Aqui trataremos dos grafos com $S = 0$. Em [?] Quine mostrou que para uma aplicação estável entre superfícies orientadas $f : M \rightarrow N$, $\chi(M) - 2\chi(M^-) + \sum s(c_i) = \chi(N)\deg f$, onde χ é a característica de Euler e $s(c_i)$ é ± 1 , de acordo com o sinal da região em que aponta a cúspide c_i .

Por outro lado, se U tem k componentes de bordo, então $\chi(U) = 2 - 2g(U) - k$. Então $\chi(M^\pm) = 2V^\pm - 2T^\pm - E$, onde V^\pm , T^\pm e E são respectivamente o total de vértices, de pesos e de arestas do grafo bipartido \mathcal{G} associada a f . Da última igualdade e da fórmula de Quine acima, resulta em $2[(V^+ - V^-) - (T^+ - T^-)] + \sum s(c_i) = \chi(N)\deg f$.

Um grafo bipartido \mathcal{G} será dito *balanceado com desvio d* se satisfaz $(V^+ - V^-) - (T^+ - T^-) = d$ e se $d = 0$, diremos simplesmente que \mathcal{G} é balanceado. Em [2], foi mostrado os seguintes resultados:

3. *Seja \mathcal{G} um grafo bipartido com pesos nos vértices. \mathcal{G} é realizável por uma aplicação dobra na 2-esfera, com grau d se, e somente se, \mathcal{G} é balanceado com desvio d . \mathcal{G} é realizável por uma aplicação dobra no plano se, e somente se, \mathcal{G} é balanceado.*

Realizar um grafo é bipartido sobre uma superfície orientada N é necessário que M seja orientada. Estender este resultado para aplicações dobra de qualquer superfície no plano projetivo fica um pouco mais difícil. Para facilitar, vamos decompor os pesos nos vértices em um par de pesos (inteiros positivos) da seguinte forma: Se U é a região de M correspondente ao vértice v , então v receberá um par de peso (t, p) , onde t quer dizer número de toros e p o número de planos projetivos em U , onde o gênero $g(U) = 2t + p$, se $p > 0$ e neste caso U é não orientada. p corresponde o número de faixa de Mobius em $f(U)$ com o grupo fundamental não trivial, parte da região $f(U)$ que não pode ser arrastada sobre um disco imerso no projetivo. Se $p = 0$, U é orientada, com $g(U) = t$. Neste caso, podemos dizer que a imagem $f(U)$ está sobre um disco imerso no plano projetivo. Com notação, \mathcal{G} está associada a uma aplicação de uma superfície orientada no plano projetivo \mathcal{G} é bipartido e $p = 0$ em todos os seus vértices.

Um grafo será dito l -bipartido, se é um grafo bipartido a menos de laços (ciclo com única aresta). Denotaremos por condição de balanceamento por CB que corresponde a diferença entre as somas dos pesos e vértices com sinais opostos, isto é, $CB = (V^+ - V^-) - (T^+ - T^-) - (P^+ - P^-)$. Um grafo será dito q -balanceado se contem um subgrafo l -bipartido maximal e existem k inteiros pares, com $0 \leq k \leq t$, para alguns vértices v , conectados por pelo menos um laço, que satisfaz $CB = \sum_j k = 2q$. Para aplicações no plano projetivo ten-se, [3]:

4. *Um grafo \mathcal{G} é realizável por uma aplicação dobra no plano projetivo se, e somente se, \mathcal{G} é q -balanceado.*

Surge aqui uma dificuldade, como verificar se um grafo dado é q -balanceado, isto pode exigir muito trabalho manual. Por isto recorreremos aqui o auxilio coputacional.

Software “SDGB”

O software “SDGB”, foi implementado, por J. R. P Coelho, com o objetivo de auxiliar na busca de um subgrafo q -balanceado de um dado grafo com pesos nos vértices. Uma vez que o número de subgrafos cresce exponencialmente com o número de arestas, isto torna muito difícil e impreciso a determinação de subgrafos q -balanceados manualmente.

Saída do “SDGB”

A forma como o “SDGB” se comporta depende apenas se o grafo de entrada é bipartido ou não. É claro que se \mathcal{G} é bipartido, todos os seus grafos são bipartidos, com as cores fixos nos vértices (+ ou -). Para determinar se o grafo é bipartido pode tentar colorir o grafo com duas cores. Um vez verificado a condição de balanceamento ou q -balanceamento, um relatório é emitido para o usuário, sobre a análise entre aplicações no plano, na 2-esfera ou plano projetivo. Para representar as duas cores serão os sinais + ou -. Para o “SDGB” analisar e emitir resultados com mais clareza, separamos em três casos distintos que veremos a seguir:

1. \mathcal{G} é um grafo bipartido.

Neste caso o “SDGB” deve verificar apenas se o grafo \mathcal{G} é balanceado. Como todo subgrafo maximal \mathcal{G}_m de \mathcal{G} é bipartido, com os sinais fixos nos vértices, e a condição de balanceamento de \mathcal{G}_m depende apenas dos pesos, vértices com seus sinais, então \mathcal{G} é balanceado se, e somente se, todos os subgrafos maximais \mathcal{G}_m são balanceados.

Relatório contendo uma das seguintes informações:

i) $P = 0$ e $CB = 0$: o grafo \mathcal{G} é balanceado e pode ser realizado por uma aplicação dobra no plano (no projetivo ou 2-esfera), de uma superfície orientada M com gênero $g(M) = 1 - V + E$.

ii) $P = 0$ e $CB = d$: o grafo \mathcal{G} é balanceado com desvio d e só pode ser realizado por uma aplicação dobra na 2-esfera com grau d , de uma superfície orientada M , com gênero $g(M) = 1 - V + E$. Além disso, \mathcal{G} pode ser realizado por aplicações estáveis (com cúspides) no plano, no plano projetivo ou na 2-esfera.

iii) $P > 0$, e $CB = 0$: o grafo \mathcal{G} é balanceado e só pode ser realizado por uma aplicação dobra no plano projetivo, de uma superfície não orientada M , com gênero $g(M) = 2(1 - V + E) + P$.

iv) $P > 0$, e $CB = d$: o grafo \mathcal{G} é não balanceado e só pode ser realizado por uma aplicação estável no plano projetivo, de uma superfície não orientada M com gênero $g(M) = 2(1 - V + E) + P$.

2. \mathcal{G} é um grafo não bipartido e não contem laços.

Neste caso o “SDGB” deve verificar se o grafo \mathcal{G} possui um subgrafo bipartido maximal balanceado, uma vez que será impossível o q -balanceamento. Diferente do caso anterior, aqui deve ser gerado todos os subgrafos maximais bipartidos de \mathcal{G} e verificar a condição de balanceamento para estes e buscar se existe pelos menos um subgrafo bipartido balanceado.

Relatório contendo uma das seguintes informações:

i) $P = 0$ e $CB = 0$ para pelo menos um subgrafo bipartido maximal: o grafo \mathcal{G} é balanceado e pode ser realizado por uma aplicação dobra no plano (no projetivo ou 2-esfera), de uma superfície não orientada M com gênero $g(M) = 2(1 - V + E)$.

ii) $P = 0$ e $CB = d$ para pelo menos um subgrafo bipartido maximal: o grafo \mathcal{G} é balanceado com desvio d e pode ser realizado por uma aplicação dobra na 2-esfera com grau d , de uma superfície não orientada M , com gênero $g(M) = 2(1 - V + E)$. Além disso, \mathcal{G} pode ser realizado por aplicações estáveis (com cúspides) no plano ou no plano projetivo.

iii) $P > 0$, e $CB = 0$ para pelo menos um subgrafo bipartido maximal: o grafo \mathcal{G} é balanceado e pode ser realizado por uma aplicação dobra no plano projetivo, de uma superfície não orientada M , com gênero $g(M) = 2(1 - V + E) + P$.

iv) $P > 0$, e $CB = d$ para pelo menos um subgrafo bipartido maximal: o grafo \mathcal{G} é não balanceado e só pode ser realizado por aplicação estável (com cúspides) no plano projetivo, de uma superfície não orientada M com gênero $g(M) = 2(1 - V + E) + P$.

3. \mathcal{G} é um grafo não bipartido com laços.

Neste caso, o “SDGB” deve verificar se o grafo \mathcal{G} possui um subgrafo bipartido maximal q -balanceado. Aqui também devem ser gerados todos os subgrafos maximais bipartidos de \mathcal{G} e verificar a condição de q -balanceamento para estes e buscar se existe pelos menos um subgrafo bipartido q -balanceado.

Relatório contendo uma das seguintes informações:

i) $P = 0$ e $CB = 2q$ para pelo menos um subgrafo bipartido maximal: o grafo \mathcal{G} é q -balanceado e pode ser realizado por uma aplicação dobra no plano (no projetivo ou 2-esfera), de uma superfície não orientada M com gênero $g(M) = 2(1 - V + E)$.

ii) $P = 0$ e $CB = 2q$ para pelo menos um subgrafo bipartido maximal: o grafo \mathcal{G} é q -balanceado com desvio $2q$ e pode ser realizado por uma aplicação dobra na 2-esfera com grau $2q$, de uma superfície não orientada M com gênero $g(M) = 2(1 - V + E)$. Além disso, \mathcal{G} pode ser realizado por aplicações estáveis (com cúspides) no plano, na 2-esfera ou no plano projetivo.

iii) $P > 0$, e $CB = 2q$ para pelo menos um subgrafo bipartido maximal: o grafo \mathcal{G} é q -balanceado e pode ser realizado por uma aplicação dobra no plano projetivo, de uma superfície não orientada M com gênero $g(M) = 2(1 - V + E) + P$.

iv) $P > 0$, e $CB = 2q$ para pelo menos um subgrafo bipartido maximal: o grafo \mathcal{G} é q -balanceado com desvio $2q$ e pode ser realizado por uma aplicação estável (com cúspides) no plano projetivo.

Geração de subgrafos

Dado um grafo \mathcal{G} não bipartido, como nos casos 2 e 3 acima, devem ser gerados todos subgrafos bipartidos maximais de \mathcal{G} para verificar CB . Para isto, denotaremos por $\mathcal{G}_1(V_1, E_1)$ o subgrafo gerador de $\mathcal{G} = (V, A)$, onde $V_1 = V$ e $E_1 \subseteq E$. É claro que todos os subgrafos bipartidos maximais estão contidos dentro do conjunto dos geradores. Uma vez fixados os vértices de um grafo \mathcal{G} dado, com E arestas, podemos associar \mathcal{G} a um conjunto de inteiros $U = \{1, \dots, E\}$, onde cada inteiro corresponde a uma arestas de \mathcal{G} . Na figura 1 o grafo com 3 arestas foi associado ao conjunto $U = \{1, 2, 3\}$, onde cada número representa uma aresta como sinalizado no grafo.

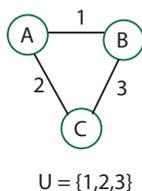


Figura 1: Associação de um grafo a um conjunto.

Se um número é retirado do conjunto, e a respectiva aresta retirada do grafo, se obtém um subgrafo associado a um subconjunto. Isso indica que um subgrafo pode ser associado a um subconjunto, pois da mesma forma que uma aresta pode está presente ou não em um subgrafo gerador, um elemento pode pertencer ou não a um subconjunto. O que o “SDGB” faz é reduzir o problema de gerar subgrafos geradores em gerar subconjuntos. Desta forma, um grafo é associado a um conjunto, e então todos os subconjuntos desse grafo são gerados, e cada subconjunto é associado a um subgrafo. O subgrafo é construído adicionando apenas as arestas correspondentes as números presentes no subconjunto. A figura 2 traz todos os subconjuntos de U e todos os seus respectivos subgrafos.

Como se sabe, um conjunto de n elementos possui 2^n subconjuntos distintos, se contado o vazio, logo em um grafo de E arestas, existem 2^E subgrafos distintos [6].

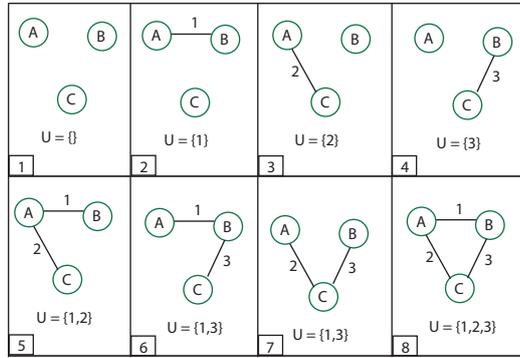


Figura 2: Sugrafos associados a subconjuntos.

Para gerar todos os subconjuntos de forma eficiente pode ser usada uma máscara de bits [6]. Esse método consiste em usar um número binário de n bits, onde n é o número de elementos do conjunto, pra gerar todas as combinações. O método começa com o número igual a zero e se soma 1 até que se chegue em um número de n bits com todos os bits iguais a 1. Cada coluna do número representa um elemento do conjunto, e se o bit desta coluna for não nulo idica que o elemento pertence ao subconjunto, como mostrado na tabela 1.

Número Binário	Subconjuntos de $\{1, 2, 3\}$
000	$\{\}$
001	$\{3\}$
010	$\{2\}$
011	$\{2,3\}$
100	$\{1\}$
101	$\{1,3\}$
110	$\{1,2\}$
111	$\{1,2,3\}$

Tabela 1: Usando máscara de bits para gerar subconjuntos.

Desta forma todos os subgrafos geradores são alcançados e cada um pode ser analisados separadamente. Para cada sequência de bits o “SDGB” monta o grafo correspondente, colore o verifica a condição de balanceamento. Se esta for satisfeita é salvo um relatório do balanceamento deste subgrafo para que ao final da análise se possa montar um relatório de todos os subgrafos balanceados encontrados. Esse método permite gerar todos os subgrafos de maneira eficiente, e ainda não gera grafos repetidos, o que poderia ocorrer em métodos recursivos, mas ainda é possível otimizar o método.

O subgrafos de interesse são apenas os bipartidos e conexos, e para um grafo de E arestas e V vértices ser conexos é necessário que o valor de E seja no mínimo $E = V - 1$, que é o caso de árvores. Para eliminar isso o “SDGB” monta e analisa apenas os subgrafos cuja a sequência de n bits possui um número de bits não nulos (K) tal que $K \geq V - 1$.

A complexidade do algoritmo pode ser dada em função do número de subgrafos analisados. O número de subgrafos com k arestas pode ser dado por $\binom{E}{K}$, e como o programa só analisa os subgrafos cujo o número de arestas $K \geq V - 1$, então para um grafo de V vértices e E arestas o programa analisa exatamente S subgrafos, onde S é dado por:

$$S = \sum_{K=V-1}^E \binom{E}{K}$$

De forma resumida o fluxo do “SDGB” é como mostrado na figura 3:

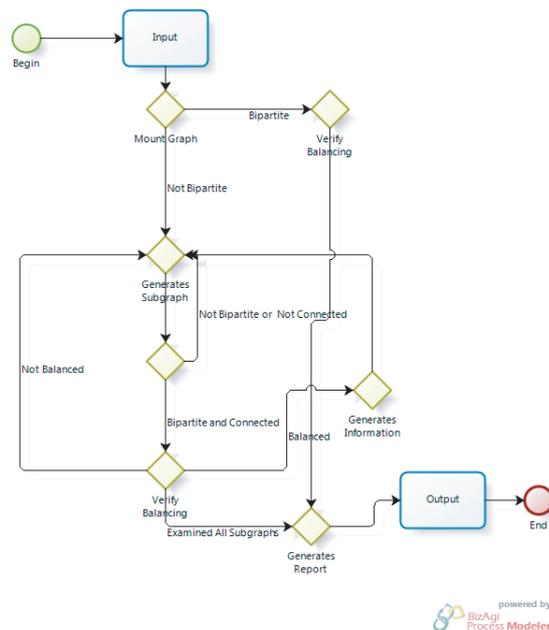


Figura 3: Fluxo de execução do “SDGB”.

Referências

- [1] GOLUBITSKY, M.; GUILLEMIN, V., “Stable Mappings and Their Singularities.”, Springer Verlag, Berlin, 1976.
- [2] HACON, D.; JESUS, C. M.; FUSTER, M.C.R., Graphs of stable maps from closed orientable surfaces to the 2-sphere. *Journal of Singularities*, 2010, (to appear).
- [3] HACON, D.; JESUS, C. M.; FUSTER, M.C.R., Stable maps the surfaces in to projective plane, em “11th International Workshop on Real and Complex Singularities”, Book of Abstracts, **pp. 7**, ICMC-USP São Carlos, 2010.
- [4] MARR, D.; HILDRETH, E., Theory of edge detection, *Proc. Royal Soc. London B*, **207**, 187-217, 1980.
- [5] QUINE, J.R., A global theorem for singularities of maps between oriented 2-manifolds, *Trans. AMS*, **236**, 307-314, 1978.
- [6] LOUGHRY, J.; VAN HERMERT, J.I.; SCHOofs, L., Efficiently Enumerating the Subsets of a Set, <http://applied-math.org/subset.pdf>.

Agradecimentos

¹ Work partially supported by FAPEMIG (CEX APQ-00261-09).

² Work partially supported by Generalitat Valenciana (GV/2010/066)