

# UM ESTUDO DAS SINGULARIDADES DA APLICAÇÃO DE GAUSS

Isaque Viza de Souza<sup>1</sup>, Catarina Mendes de Jesus<sup>1</sup>

**Resumo:** Neste trabalho procuramos compreender a aplicação de Gauss para superfícies e fazer um estudo sobre suas singularidades nos concentrando no conjunto parabólico e em sua imagem pela Aplicação de Gauss. Apresentamos um resultado de [2] para caracterização das cúspides de Gauss, assim como exemplos de aplicações de Gauss estáveis que possuem singularidades do tipo dobra e cúspide. A caracterização das cúspides é feita tomando como base em propriedades locais das superfícies no ponto em questão.

**Palavras-chave:** Aplicação de Gauss, Curva Parabólica, Superfície

## Introdução

Um subconjunto  $S \subset \mathbb{R}^3$  é uma *superfície regular* se, para cada  $p \in S$ , existe uma vizinhança  $V$  de  $p$  em  $\mathbb{R}^3$  e uma aplicação  $X : U \rightarrow V \cap S$  de um aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  sobre  $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$  tal que

1.  $X$  é diferenciável;
2.  $X$  é um homeomorfismo;
3. (condição de regularidade) Para todo  $q \in U$ , a diferencial  $DX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é injetiva.

Para uma parametrização regular  $X(u, v)$ , dizemos que um vetor  $w$  de  $\mathbb{R}^3$  é um *vetor tangente* a  $X$  em  $q = (u_0, v_0)$  se  $w = \alpha'(t)$  e  $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$  é uma curva da superfície, tal que  $(u(t_0), v(t_0)) = (u_0, v_0)$ . Definimos assim o *plano tangente* a  $X$  em  $q = (u_0, v_0)$  como o conjunto de todos os vetores tangentes a  $X$  em  $q$ , que denotamos por  $T_qX$ , além disso,  $T_qX$  é o conjunto de vetores obtidos como combinação linear de  $X_u(u_0, v_0)$  e  $X_v(u_0, v_0)$ .

Sabemos que a cada ponto de uma superfície existe, em cada direção uma curvatura  $k$  associada a superfície, os valores máximo e mínimo dessa curvatura são chamados de curvaturas principais e serão denotados por  $k_1$  e  $k_2$ . Definimos a curvatura de Gauss  $K$  como sendo o produto das curvaturas principais e a curvatura Média  $H$  como a média aritmética das curvaturas principais.

Os pontos da superfície  $X$  podem ser classificados de acordo com os valores das curvaturas gaussianas e média, diremos que  $X(x, y)$  é **Planar** se  $K(x, y) = 0$  e  $H(x, y) = 0$ , **Elíptico** se  $K(x, y) > 0$ , **Hiperbólico** se  $K(x, y) < 0$  e **Parabólico** se  $K(x, y) = 0$  e  $H(x, y) \neq 0$ .

Para uma imersão  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  onde  $U \subset \mathbb{R}^2$  (superfície parametrizada regular), a aplicação de Gauss  $N : U \rightarrow S^2$  leva cada ponto  $(x, y)$  de  $U$  no vetor unitário normal  $N = (X_x \times X_y) / |X_x \times X_y|$ , e temos que a aplicação de Gauss é singular quando  $0 = N_x \times N_y = K(x, y)(X_x \times X_y)$ , isto é, no conjunto parabólico que é onde a *curvatura Gaussiana*  $K(x, y) = 0$ .

---

<sup>1</sup>Universidade Federal de Viçosa,  
isaque.souza@ufv.br, cmendes@ufv.br

# Cúspides de Gauss e Caracterizações

Baseados no trabalho apresentado em [2], estudamos formas de caracterizar cúspides da aplicação de Gauss, contudo aqui vamos nos limitar a apresentar e discutir quatro dessas caracterizações.

Utilizando a mesma terminologia que Whitney dizemos que a aplicação de Gauss é *boa* se o gradiente de  $K$  nunca se anula no conjunto parabólico. Se  $N$  é boa, então o conjunto parabólico é formado por uma curva ‘suave’  $(x(t), y(t))$ , essa curva é composta pelos pontos onde a aplicação de Gauss possui uma singularidade do tipo *dobra*. A imagem dessa curva pela aplicação de Gauss é singular precisamente quando  $N'(t) = 0$ , que são exatamente os pontos de *cúspide* que desejamos abordar.

Se  $N$  é boa, então  $N$  é *excelente* se  $N'(t) = 0$  implicar  $N''(t) \neq 0$ . Essa definição nos garante que as singularidades de uma aplicação de Gauss excelente são apenas *cúspides*.

Além disso, se  $N$  é excelente, então  $N$  está em *posição geral* se a imagem de  $N(t)$  não possui pontos triplos ou auto-tangências, e além disso nenhum ponto de cúspide de  $N(t)$  coincide com outro ponto da imagem de  $N(t)$ .

Whitney provou que uma aplicação entre superfícies é *excelente* se, e somente se, suas singularidades são todas equivalentes (por mudanças de coordenadas suaves) à *dobras* e *cúspides*. Além disso, uma aplicação entre superfícies é *estável* se, e somente se é *excelente* e está em *posição geral*. Uma discussão mais precisa sobre estabilidade e o teorema de Whitney pode ser encontrada em [1] e [6].

Apresentamos agora quatro caracterizações para Cúspides de Gauss, que fazem parte do principal resultado obtido em [2] para caracterização de Cúspides de Gauss.

**Teorema:** Sejam  $U$  um conjunto aberto no plano e  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma imersão diferenciável. Se  $P \in U$  é uma Cúspide de Gauss da aplicação  $X$ , então as declarações seguintes são verdadeiras. Reciprocamente, se a aplicação de Gauss de  $X$  é estável, e alguma das condições seguintes é válida, então  $P$  é uma Cúspide da aplicação de Gauss.

- a) Uma direção de uma curvatura principal nula de  $X$  é tangente à curva parabólica de  $X$  em  $P$ .
- b) Para cada  $\epsilon > 0$  existe dois pontos distintos  $Q_1, Q_2 \in U$  tais que  $|P - Q_i| < \epsilon$  para  $i = 1, 2$  e o planos tangentes a  $X$  em  $Q_1$  e  $Q_2$  são iguais.
- c)  $P$  é um ponto extremo de  $X$ , assim como um ponto parabólico de  $X$ , e a curvatura principal associada com este extremo é zero.
- d)  $P$  é um ponto parabólico de  $X$ , e uma curva em  $\mathbb{R}^3$  tem ordem de contato maior que dois com  $X$  em  $P$ .

## Exemplos de Aplicações de Gauss

Para os primeiros três exemplos vamos utilizar superfícies dadas por gráficos de funções, ou seja,  $X(x, y) = (x, y, f(x, y))$ , assim a aplicação de Gauss é dada por

$$N(x, y) = (-f_x, -f_y, 1) / \sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2}.$$

Podemos estudar as singularidades de uma aplicação de Gauss com maior facilidade nesse caso pela projeção central da origem para o plano  $z = 1$  para obter  $(-f_x, -f_y, 1)$ . Aí então projetamos no plano  $(x, y)$  para obter a aplicação composta  $\tilde{N}(x, y) = (-f_x, -f_y)$ .

Desde que a imagem de  $N$  esteja contida no hemisfério superior, e a projeção central seja um difeomorfismo do hemisfério superior no plano  $z = 1$ , a *aplicação de Gauss modificada*  $\tilde{N}$  terá as mesmas singularidades de  $N$ . Em particular,  $\tilde{N}$  é singular precisamente quando a matriz Jacobiana

$$\begin{pmatrix} -f_{xx} & -f_{xy} \\ -f_{yx} & -f_{yy} \end{pmatrix}$$

tem posto menor que dois, ou seja, quando o discriminante  $\Delta = (f_{xy})^2 - f_{xx}f_{yy}$  é zero.

**Exemplo 1:** *A Superfície do Sapato*

$$X(x, y) = (x, y, \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}y^2)$$

A aplicação de Gauss modificada é  $\tilde{N}(x, y) = (-x^2, y)$ , e a curva parabólica é dada por  $(0, t)$ . A aplicação de Gauss é boa, e além disso é excelente e está em posição geral. Portanto a aplicação de Gauss é estável, com uma simples dobra ao longa da curva parabólica.

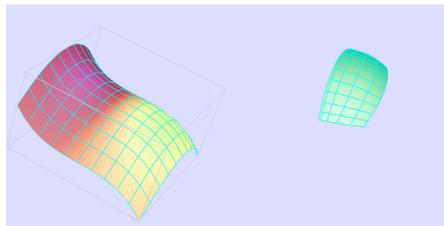


Figura 1: Superfície do Sapato e sua imagem pela aplicação de Gauss.

**Exemplo 2:** *A Superfície de Menn*

$$X(x, y) = (x, y, \epsilon x^4 + x^2y - y^2)$$

A aplicação de Gauss modificada é  $\tilde{N}(x, y) = (-4\epsilon x^3 - 2xy, -x^2 + 2y)$  e a curva parabólica é dada por  $(t, -(6\epsilon + 1)t^2)$ . A aplicação  $\tilde{N}$  é boa para todo  $\epsilon$ , mas a aplicação de Gauss é estável(excelente e em posição geral) se  $\epsilon \neq -\frac{1}{4}$ , com uma cúspide na origem ( $t = 0$ ). Para  $\epsilon = -\frac{1}{4}$ , toda a curva parabólica é levada em um único ponto pela aplicação de Gauss (situação similar à que ocorre com os pontos no topo de um toro de revolução).

Um exemplo relacionado de superfície com aplicação de Gauss não estável é  $X(x, y) = (x, y, \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}y^2)$ . A aplicação de Gauss modificada é  $\tilde{N}(x, y) = (-x^3, y)$  e a curva parabólica é a linha  $x = 0$ , além disso a aplicação de Gauss não é boa.

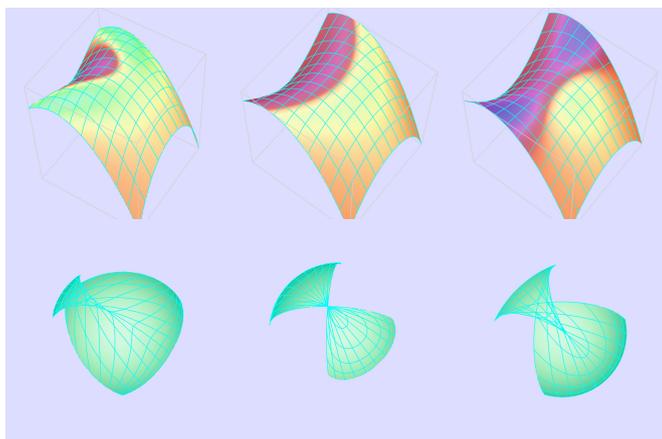


Figura 2: Superfície de Menn e sua imagem pela aplicação de Gauss, obtida utilizando  $\epsilon = -0,5, -0,25$ (caso não estável) e 0 respectivamente.

**Exemplo 3:** *A sela do Macaco ‘Perturbada’*

$$X(x, y) = (x, y, \frac{1}{3}x^3 - xy^2 + \epsilon(x^2 + y^2))$$

A aplicação de Gauss modificada é então  $\tilde{N}(x, y) = (-x^2 + y^2 - 2\epsilon x, 2xy - 2\epsilon y)$ , e a aplicação  $\tilde{N}$  é boa se, e somente se,  $\epsilon \neq 0$ . Se  $\epsilon = 0$ , então o conjunto parabólico é apenas a origem. Expressando a aplicação de Gauss em coordenadas polares vemos que existe um ponto de ramificação de duas dobras na origem. Se  $\epsilon \neq 0$ , o conjunto parabólico é o círculo  $x^2 + y^2 = \epsilon^2$  e fazendo as contas vemos que a aplicação de Gauss é estável para todo  $\epsilon \neq 0$ .

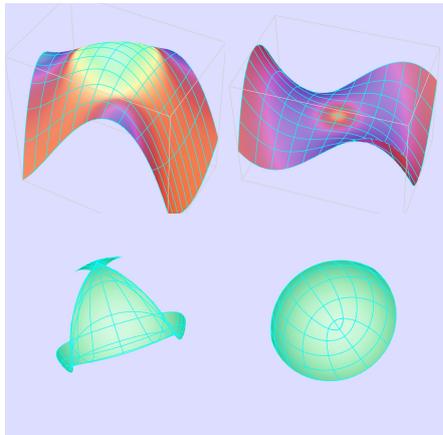


Figura 3: Cela do macaco e sua imagem pela aplicação de Gauss, obtida utilizando  $\epsilon = -0,7$  e  $0$ (caso não estável), respectivamente.

**Exemplo 4:** *A Superfície Lenço*

$$X(x, y) = (x, y, \frac{1}{3}x^3 + xy^2 + \epsilon(x^2 - y^2)).$$

A aplicação de Gauss modificada é  $\tilde{N}(x, y) = (-x^2 - y^2 - 2\epsilon x, -2xy + 2\epsilon y)$  e a aplicação  $N$  é boa se, e somente se,  $\epsilon \neq 0$ . Se  $\epsilon = 0$ , o conjunto parabólico é a união de duas linhas  $y = x$  e  $y = -x$ , e a aplicação de Gauss modificada é como um lenço dobrado quatro vezes. Além disso a aplicação de Gauss da Superfície Lenço é estável para todo  $\epsilon \neq 0$ .

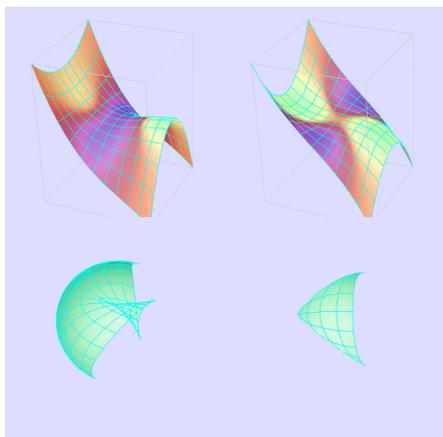


Figura 4: Superfície lenço e sua imagem pela aplicação de Gauss obtida utilizando  $\epsilon = 0,5$  e  $0$ (caso não estável), respectivamente.

**Superfícies de Revolução**

$$X(x, y) = (x \cos y, x \sin y, f(x))$$

Obtemos então  $X_x \times X_y = (-xf'(x) \cos y, -xf'(x) \sin y, x)$ . Se  $x \neq 0$  então  $X$  é regular, e para  $x > 0$  o normal unitário é  $N(x, y) = (-f'(x) \cos y, -f'(x) \sin y, 1)/\sqrt{1 + (f'(x))^2}$ , e novamente a aplicação de Gauss modificada, equivalente a  $N$ , é dada por

$$\tilde{N}(x, y) = (-f'(x) \cos y, -f'(x) \sin y),$$

e o conjunto parabólico ocorre quando  $0 = \tilde{\Delta} = -f'(x)f''(x)$ , isto é, nos extremos ou pontos de inflexão da curva modelo. Além disso,  $\text{grad } \tilde{\Delta} = (-(f''(x))^2 - f'(x)f'''(x), 0)$ , então  $\tilde{N}$  é boa se  $f''(x) = 0$  implica  $f'(x) \neq 0$  e  $f'''(x) \neq 0$ .

Se  $x_0$  é um valor para o qual  $f''(x_0) = 0$ , então a curva parabólica pode ser parametrizada por  $x(t) = x_0$ ,  $y(t) = t$ , e então obtemos

$$\tilde{N}(t) = (-f'(x_0) \cos t, -f'(x_0) \sin t).$$

Se  $f'(x_0) \neq 0$  e  $f'''(x_0) \neq 0$ , então a aplicação de Gauss possui uma única dobra ao longo da curva parabólica. Por exemplo, estas condições são satisfeitas pela *Superfície do Sino*, obtida tomando  $f(x) = \cos x$ ,  $0 < x < \pi$  com  $x_0 = \frac{\pi}{2}$ .

Por outro lado, se  $x_0$  é um valor para o qual  $f'(x_0) = 0$  e  $f''(x_0) \neq 0$ , então a aplicação de Gauss é boa, mas *não* é excelente, porque a curva parabólica é parametrizada por  $x(t) = x_0$ ,  $y(t) = t$ , e  $N(t) = (0, 0)$  para todo  $t$ . Um exemplo é a parte superior do *Toro de Revolução*.

### Exemplo 5: A Superfície Canal de uma Curva Espacial

Seja  $\alpha$  uma curva espacial regular com curvatura não nula. Definimos a *Superfície Canal* sobre  $\alpha$  de raio  $r$  como

$$X(x, y) = \alpha(x) + r(\cos yP(x) + \sin yB(x))$$

onde  $P$  e  $B$  são o normal principal e o binormal à curva  $\alpha$ . Fazendo os cálculos vemos que  $X$  será regular se  $r$  for um número suficientemente pequeno ( $|r| < \frac{1}{\min|\kappa|}$ ). Mais ainda,

$$N(x, y) = -\cos yP(x) - \sin yB(x),$$

então o conjunto parabólico ocorre quando os dois vetores  $N_x$  e  $N_y$  são linearmente dependentes, ou seja, quando  $\kappa \cos y = 0$ . Isto ocorre nas curvas  $x(t) = t$ ,  $y(t) = \pm \frac{\pi}{2}$ , para as quais nós temos

$$N(t) = \pm B(t).$$

Um cálculo direto nos dá a curvatura Gaussiana  $K = \kappa \cos y / (r\kappa \cos y - 1)$  e  $\partial K / \partial y \neq 0$ . Portanto a aplicação de Gauss é boa. Agora tomando as derivadas com relação a  $t$ , nós obtemos  $N' = 0$  se, e somente se  $\tau = 0$ , e então  $N'' = \tau' s' P$ . Assim, a aplicação de Gauss  $N$  é excelente se  $\tau' \neq 0$  sempre que  $\tau = 0$ , e então  $N(x, y)$  tem uma cúspide em  $(t, \pm \frac{\pi}{2})$  se, e somente se,  $\tau(t) = 0$ .

Como exemplo consideremos o *toro empenado*, uma superfície canal da curva espacial  $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, \epsilon \sin(nt))$ , onde  $n$  é um inteiro,  $n \geq 2$ . A curvatura de  $\alpha$  é sempre diferente de zero. Além disso  $\tau = 0$  se, e somente se  $t = \frac{\pi}{2n}, \frac{3\pi}{2n}, \dots, \frac{(4n-1)\pi}{2n}$ , supondo que  $\epsilon \neq 0$ . Tomando derivadas de  $\kappa^2 \tau (s')^6$  e  $\epsilon n(1 - n^2) \cos nt$  mostramos que  $\tau = 0$  implica  $\tau' \neq 0$ , desde que  $\epsilon \neq 0$ . Portanto, a superfície canal de  $\alpha$  possui uma aplicação de Gauss excelente, com  $4n$  cúspides. Para  $\epsilon = 0$  a superfície canal de  $\alpha$  é um toro de revolução, e cada componente da curva parabólica é colapsada em apenas um ponto pela aplicação de Gauss.

## Relacionando Exemplos e Caracterizações das Cúspides de Gauss

Agora, faremos uma abordagem das propriedades enunciadas no teorema de caracterização das Cúspides de Gauss através dos exemplos estudados anteriormente.

*Propriedade (a)*

Se a aplicação de Gauss é boa então sua Jacobiana tem posto um em cada ponto parabólico  $P$ . O núcleo da aplicação Jacobiana é a direção da curvatura principal nula em  $P$ . Considere uma curva  $(x(t), y(t))$  no domínio de parâmetros  $U$  com imagem Gaussiana  $N(t)$ . Seja  $P = (x(0), y(0))$  e  $V = (x'(0), y'(0))$ . A curvatura de  $X$  na direção  $V$  em  $P$  é nula se, e somente se  $N'(0) = 0$ . Se  $(x(t), y(t))$  é a curva parabólica de  $X$ , e  $N$  é excelente, então  $N'(0) = 0$  se, e somente se  $P$  é uma cúspide de  $N$ . Isso implica o teorema (a).

A aplicação de Gauss modificada da Superfície do Sapato (exemplo da Superfície do Sapato) possui matriz Jacobiana

$$\begin{pmatrix} -2x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

então a direção com curvatura principal nula ao longo da curva parabólica  $(0, t)$  é gerada pelo vetor constante  $(1, 0)$ , e (a) é verificada por nenhum ponto parabólico.

A matriz Jacobiana modificada da superfície de Menn é

$$\begin{pmatrix} -12\epsilon x^2 - 2y & -2x \\ -2x & 2 \end{pmatrix}$$

então a direção com curvatura principal nula ao longo da curva parabólica  $(t, -(1+6\epsilon)t^2)$  é gerada pelo vetor  $(1, t)$ . Se  $\epsilon \neq -\frac{1}{4}$ , este vetor é tangente a curva parabólica se, e somente se  $t = 0$ , onde a aplicação de Gauss possui uma cúspide. Se  $\epsilon = -\frac{1}{4}$ , o vetor  $(1, t)$  é tangente ao longo de toda a curva parabólica, e a aplicação de Gauss não é excelente.

*Propriedade (b)*

Um plano  $\xi$  é tangente à superfície  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  em  $Q \in U$  se, e somente se  $Q$  é um ponto crítico da composição de  $X$  com a projeção ortogonal à linha  $\ell$  que passa pela origem e é normal a  $\xi$ . Então a linha  $\ell$  contém a imagem Gaussiana esférica  $N(Q)$ .

Para um vetor unitário  $V \in \mathbb{R}^3$ , seja  $\Pi_V : U \rightarrow \mathbb{R}$  a composição de  $X$  com a projeção ortogonal sobre a linha gerada por  $V$ :

$$\Pi_V(P) \cdot V$$

Uma reafirmação de (b) é que a função altura  $\Pi_{N(P)}$  possui um ponto crítico degenerado em  $P$ , que se divide em três pontos críticos distintos  $Q_1, Q_2, Q_3$  perto de  $P$  para certa função altura  $\Pi_V$  com  $V$  arbitrariamente próximo de  $N(P)$ . Os três pontos críticos acima são não degenerados se  $P$  é uma cúspide da aplicação de Gauss  $N$ . Então (b) é equivalente a afirmação de que o ponto crítico  $P$  da função altura  $\Pi_{N(P)}$  possui *número de Milnor* igual a três.

Considere o gráfico de uma função  $X(x, y) = (x, y, f(x, y))$ , com  $P = (0, 0)$  e  $N(P) = (0, 0, 1)$ . Então  $\Pi_{N(P)}(x, y) = f(x, y)$ . A família de funções altura  $\Pi_V : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Pi_V(x, y) = X(x, y) \cdot V$ , com  $V = (a, b, c)$ ,  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ ,  $c > 0$ , é equivalente à família  $\Pi_V$  com  $a$  e  $b$  arbitrários e  $c = 1$ . Seja  $\Pi_{(a,b)} = \Pi_{(a,b,1)}$ . Então

$$\Pi_{(a,b)}(x, y) = f(x, y) + ax + by,$$

uma perturbação linear de  $f(x, y)$ . E  $Q$  é um ponto crítico de  $\Pi_{(a,b)}$  se, e somente se,  $(a, b) = \tilde{N}(Q)$ , onde  $\tilde{N}$  é a aplicação de Gauss modificada que definimos anteriormente. A matriz Hessiana das segundas derivadas parciais de  $\Pi_{(a,b)}$  é igual a matriz Hessiana de  $f(x, y)$ , a qual é a negativa da matriz Jacobiana de  $\tilde{N}$ . Portanto  $Q$  é um ponto crítico degenerado de  $\Pi_{(a,b)}$  se, e somente se  $Q$  é um ponto parabólico de  $X$ .

Para a superfície do Sapato temos a perturbação

$$\Pi_{(a,b)}(x, y) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}y^2 + ax + by$$

com gradiente  $(x^2 + a, -y + b)$ . Se  $a > 0$ ,  $\Pi_{(a,b)}$  não possui pontos críticos. Se  $a < 0$ ,  $\Pi_{(a,b)}$  possui os pontos críticos  $(\sqrt{-a}, b)$  e  $(-\sqrt{-a}, b)$  com matrizes Hessianas

$$\begin{pmatrix} 2\sqrt{-a} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2\sqrt{-a} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

respectivamente, então  $(\sqrt{-a}, b)$  é uma sela e  $(-\sqrt{-a}, b)$  é um ponto de máximo. (Se  $a = 0$ ,  $\Pi_{(a,b)}$  possui um ponto crítico degenerado em  $(0, b)$ .) Portanto  $f(x, y)$  possui número de Milnor 2 em  $P = (0, 0)$ .

Para a superfície de Menn nós temos

$$\Pi_{(a,b)}(x, y) = \epsilon x^4 + x^2 y - y^2 + ax + by$$

com gradiente  $(4\epsilon x^3 + 2xy + a, x^2 - 2y + b)$ . Então  $(x, y)$  é um ponto crítico de  $\Pi_{(a,b)}$  se, e somente se ambos

$$(i) \ y = -(4\epsilon x^3 + a)/2x, \text{ e}$$

$$(ii) \ (4\epsilon + 1)x^3 + bx + a = 0,$$

desde que  $x \neq 0$ . (Se  $x = 0$  então  $a = 0$  e  $y = \frac{1}{2}b$ .) Agora se  $\epsilon \neq \frac{1}{4}$  então (ii) possui três raízes reais e distintas se, e somente se seu discriminante é negativo:

$$\left(\frac{b}{3(4\epsilon + 1)}\right)^3 + \left(\frac{a}{2(4\epsilon + 1)}\right)^2 < 0,$$

(Note que a localização dos zeros do discriminante é precisamente a imagem da curva parabólica de  $X$  pela aplicação de Gauss modificada  $\tilde{N}$ .)

*Propriedade (c)*

Em termos de funções alturas, esta condição nos diz que existe um vetor unitário  $V$  próximo a  $N(P)$  tal que  $\Pi_V$  possui dois pontos críticos distintos  $Q_1$  e  $Q_2$  próximos a  $P$  com  $\Pi_V(Q_1) = \Pi_V(Q_2)$ . Para o gráfico de uma função  $X(x, y) = (x, y, f(x, y))$ , esta condição traduz-se para  $N(Q_1) = (a, b) = N(Q_2)$  e  $\Pi_{(a,b)}(Q_1) = \Pi_{(a,b)}(Q_2)$ , ou seja

$$f_x(x_1, y_1) = a = f_x(x_2, y_2),$$

$$f_y(x_1, y_1) = b = f_y(x_2, y_2),$$

$$f(x_1, y_1) + ax_1 + by_1 = f(x_2, y_2) + ax_2 + by_2.$$

Para a superfície do sapato temos  $x_1^2 = x_2^2$ ,  $y_1 = y_2$ ,  $\frac{1}{3}x_1^3 - \frac{1}{2}y_1^2 + x_1^3 + y_1^2 = \frac{1}{3}x_2^3 - \frac{1}{2}y_2^2 + x_2^3 + y_2^2$ , então  $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ , e (b) não é válida.

Para a superfície de Menn, se  $x_1 = -x_2$  e  $y_1 = y_2$ , então  $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$ ,  $f_x(x_1, y_1) = -f_x(x_2, y_2)$ , e  $f_y(x_1, y_1) = f_y(x_2, y_2)$ . Assim se  $f_x(x, y) = 0$ ,  $x \neq 0$ , então  $Q_1 = (x, y)$  e  $Q_2 = (-x, y)$  serão um par de pontos distintos com o mesmo plano tangente. Agora  $0 = f_x(x, y) = 4\epsilon x^3 + 2xy = 2x(2\epsilon x^2 + y)$  se, e somente se  $x = 0$  ou  $y = -2\epsilon x^2$ . Visto que a última curva contém  $P = (0, 0)$ , então (b) é válido para a superfície de Menn. (Note que se  $\epsilon = \frac{1}{4}$ , esta curva coincide com a curva parabólica, uma vez que sua imagem pela aplicação de Gauss é um único ponto. O mesmo ocorre no topo do toro de revolução.)

*Propriedade (d)*

Dizemos que a curva espacial  $\alpha(t)$  possui ordem de contato  $N$  com a superfície  $G(x, y, z) = 0$  no ponto  $\alpha(t_0)$  se, e somente se, a função  $G(t) = G(\alpha(t))$  se anula até ordem  $n$  em  $t_0$ :

$$G(t_0) = G'(t_0) = \dots = G^{(n)}(t_0) = 0, \quad G^{(n+1)}(t_0) \neq 0.$$

Assim, uma curva é tangente a uma superfície se, e somente se, possui ordem de contato pelo menos um com a superfície.

Para a superfície do sapato, temos

$$G(x, y, z) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}y^2 - z.$$

A origem  $(0, 0, 0)$  é um ponto parabólico, e o plano tangente à origem é horizontal. Para a curva tangente  $\alpha(t) = (t \cos \theta, t \sin \theta, 0)$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $G^{(2)}(0) = -\sin^2 \theta$ ,  $G^{(3)}(0) = 2 \cos^3 \theta$ ,  $G^{(4)}(0) = 0$ , então  $\alpha$  possui ordem de contato igual a um se  $\theta \neq 0$  e dois se  $\theta = 0$ .

Agora, considere a superfície de Menn

$$G(x, y, z) = \epsilon x^4 + x^2 y - y^2 - z.$$

Novamente,  $(0, 0, 0)$  é um ponto parabólico com plano tangente horizontal, e para a curva  $\alpha$  acima temos  $G^{(2)}(0) = -2 \sin^2 \theta$ ,  $G^{(3)}(0) = 6 \cos^2 \theta \sin \theta$ ,  $G^{(4)}(0) = 24 \epsilon \cos^4 \theta$ ,  $G^{(5)}(0) = 0$ . Portanto  $\alpha$  possui ordem de contato igual a 1 com a superfície de Menn se  $\theta \neq 0$ . Se  $\epsilon \neq 0$  e  $\theta = 0$  então  $\alpha$  possui ordem de contato igual a três com a superfície. Se  $\epsilon = 0$  e  $\theta = 0$  então  $\alpha$  possui ordem de contato infinita com a superfície - na verdade, a curva  $y = z = 0$  esta contida na superfície.

A sela de macaco perturbada contém três curvas  $(\epsilon, 0, \frac{4}{3}\epsilon^3)$ ,  $(-\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon\sqrt{3}}{2}, \frac{4}{3}\epsilon^3)$ ,  $(-\frac{\epsilon}{2}, -\frac{\epsilon\sqrt{3}}{2}, \frac{4}{3}\epsilon^3)$ , as quais são tangentes às curvas parabólicas em três pontos  $(\epsilon, 0, \frac{4}{3}\epsilon^3)$ ,  $(-\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon\sqrt{3}}{2}, \frac{4}{3}\epsilon^3)$ ,  $(-\frac{\epsilon}{2}, -\frac{\epsilon\sqrt{3}}{2}, \frac{4}{3}\epsilon^3)$ , respectivamente. Esses três pontos são cúspides da aplicação de Gauss.

## Conclusões

Este trabalho permitiu ao estudante uma compreensão das singularidades da aplicação de Gauss que é um tema de pesquisa atual, levando a ampliação de seu ‘vocabulário’ matemático e despertando seu interesse para pesquisa na área, pois posteriormente foi possível estudar questões sobre as transições do conjunto parabólico da aplicação de Gauss apresentadas em [3].

Além disso, como a questão: ‘É possível obter uma superfície com gênero positivo que possua curvatura sempre positiva retirando-se um disco?’, possui resposta positiva, obtivemos uma parametrização explícita para uma superfície que satisfaz esta condição com gênero igual a um.

## Referências

- [1] ARNOLD, V. I., Singularities of smooth mappings, *Uspekhi Mat. Nauk (Russian Math. surveys)* **23:1**, 1-43, 1968.
- [2] BANCHOFF, T.; GAFFNEY, T.; MCCROY, C., Cusps of Gauss Mapping, [//www.emis.de/monographs/CGM/index.html](http://www.emis.de/monographs/CGM/index.html).
- [3] BRUCE, J. W.; GIBLIN, P. J.; TARI, F., Parabolic Curves of Evolving Surfaces, *International Journal of Computer Vision* **17(3)**, 291-306, 1996.
- [4] CARMO, M. P., “Differential Geometry of Curves and Surfaces”, Prentice-Hall, N. Jersey, 1986.
- [5] GIBSON, C. G., “Singular Points of Smooth Mappings”, Research Notes in Maths; Pitman, London, 1979.
- [6] GOLUBITSKY, M.; GUILLEMIN, V., “Stable Mappings and their Singularities”, Graduate Texts in Mathematics 14, Springer, Berlin & New York, 1973.
- [7] JESUS, C. M.; MORAES, S. M., FUSTER, M.C.R., Stable Gauss maps from a global viewpoint. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society*, 2010, (to appear).

## Agradecimentos

<sup>1</sup> Trabalho realizado com apoio financeiro do CNPq.