ESTUDO SOBRE A INTEGRAL DE DARBOUX

Alana Cavalcante Felippe[1], Júlio César do Espírito Santo[1]

Resumo: *Este trabalho pretende fazer um breve estudo da teoria da integração de Darboux, culminando com o teorema que mostra a equivalência entre as integrais de Riemann e Darboux. Dessa forma, a integral de Darboux herda todos os resultados e propriedades conhecidas da integral de Riemann.*

Palavras-chave: Integral, Equivalência, Riemann-Darboux

Introdução

Este texto é parte de uma Monografia de conclusão de curso de Graduação em Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto. O que aqui apresentamos pretende analisar, de maneira clara e acessível a estudantes de graduação, a evolução das idéias do cálculo, em particular das teorias de integração destacando suas transformações. Pretendemos também fornecer ferramentas básicas que possibilitem ao estudante um primeiro contato com teorias modernas de integração e possibilidades de estudos futuros.

Para esse fim, apresentamos as construções da Integral de Darboux, da Integral de Riemann e alguns aspectos de suas teorias e propriedades. Posteriormente veremos que os conceitos de Integral de Riemann e de Darboux são equivalentes, isto é, que uma função é integrável por integral de Darboux se e somente se é integrável pela integral de Riemann, e os valores das duas integrais, se existem, são iguais.

Partição de um Intervalo

Definição 1. Uma partição P de um intervalo $[a,b]$ é um conjunto finito $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ tal que $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Uma partição P de $[a,b]$ divide $[a,b]$ em n intervalos $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, 3, ..., n$

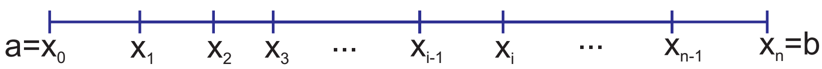

Figura 1: *Partição de um Intervalo*

O comprimento do intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ será indicado por $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Assim, $\Delta x_1 = x_1 - x_0$, $\Delta x_1 = x_1 - x_0$, $\Delta x_2 = x_2 - x_1$, etc. Os números $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$ não são necessariamente iguais, o maior deles denomina-se **amplitude** da partição P e indica-se por $\max \Delta x_i$. Ao considerarmos uma partição $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ de $[a,b]$, a denotaremos simplesmente por

$$P : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

[1]Departamento de Matemática, ICEB,UFOP
alanacavalcante02@yahoo.com.br, jcesares@iceb.ufop.br

A Integral de Darboux

Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada e considere $m = \inf\{f(x) : a \le x \le b\}$ e $M = \sup\{f(x) : a \le x \le b\}$ tais que $m \le f(x) \le M$ para todo $x \in [a,b]$.

Seja $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ uma partição de $[a,b]$, e para cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, definimos M_i e m_i por: $M_i = \sup\{f(x) : x_{i-1} \le x \le x_i\}$ e $m_i = \inf\{f(x) : x_{i-1} \le x \le x_i\}$.

Definimos as chamadas *Somas de Darboux*, a soma superior $S(f,P)$ e a soma inferior $s(f,P)$, dadas pelas expressões: $S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$ e $s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$. (Veja uma interpretação geométrica á seguir.)

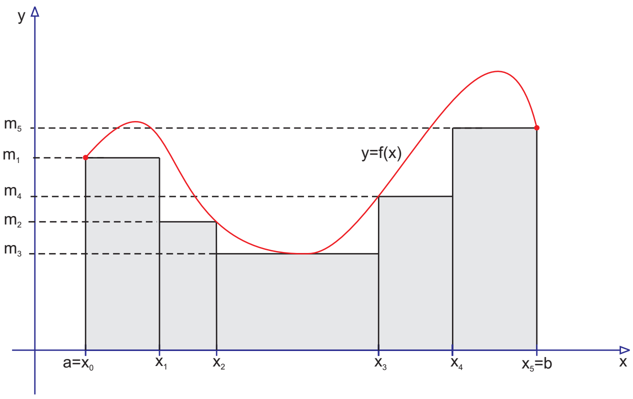

Figura 2: *Soma Inferior.*

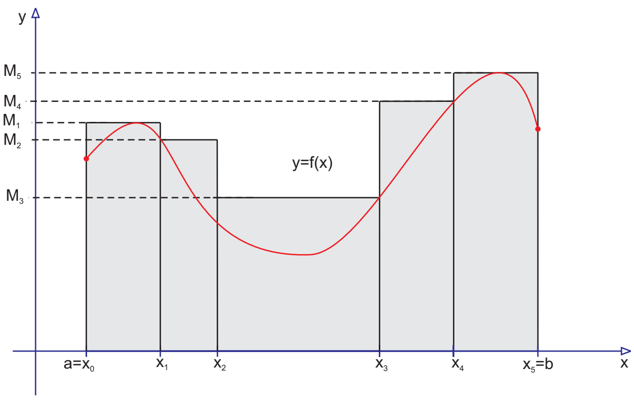

Figura 3: *Soma Superior*

Observe a figura (3) onde a área hachurada representa a soma superior e a figura (2), onde a área indicada representa a soma inferior. Note que as definições de soma superior e inferior valem para qualquer função limitada, apesar de essas ilustrações serem feitas para o caso de uma função contínua. Observe, que f não é necessariamente positiva para todo x em seu domínio. Uma observação interessante é que $m(b-a) \le s(f,P) \le S(f,P) \le M(b-a)$.

Definição 2. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função real limitada em $[a,b]$.

A integral superior, que se designa por $\overline{\int_a^b} f(x)dx$, é o ínfimo das somas superiores. Assim,

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf\{S(f,P) : \text{P é uma partição de [a,b]}\}.$$

A integral inferior, que se designa por $\underline{\int_a^b} f(x)dx$ é o supremo das somas inferiores. Assim,

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup\{s(f,P) : \text{P é uma partição de [a,b]}\}.$$

Definição 3 (Função Darboux-Integrável)**.** Uma função limitada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é integrável, segundo Darboux se

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

O valor comum das integrais superior e inferior é chamado a integral de Darboux de f em $[a,b]$ e se designa por $\int_a^b f(x)dx$. Portanto, se f é integrável, temos

$$\int_a^b f = \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

Exemplo:

A função de Dirichlet, $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$d(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

não é integrável à Darboux.

Como o conjunto dos racionais e dos irracionais é denso em $[0,1]$, temos que para qualquer partição P, os supremos são todos iguais a 1 e os ínfimos são todos iguais a 0. Logo, a soma superior é igual a 1 e a soma inferior é igual a 0. Portanto, a integral superior é 1, enquanto a integral inferior é 0. Assim, f não é Darboux-integrável.

Definição 4. Sejam P e P' partições de $[a,b]$. Dizemos que a partição P' é um refinamento de P se $x \in P$ implica em $x \in P'$, isto é todo ponto da partição P é também um ponto da partição P'.

O próximo resultado mostra que a passagem para um refinamento diminui a soma superior e aumenta a soma inferior.

Proposição 1. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada e sejam P e P' duas partições do intervalo $[a,b]$. Se P' é um refinamento de P, então $s(f,P') \geq s(f,P) \quad \text{e} \quad S(f,P') \leq s(f,P)$.

Uma simples consequência deste resultado é que cada soma inferior é menor ou igual a cada soma superior.

Corolário 1. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada e sejam P_1 e P_2 partições do intervalo $[a,b]$. Então, $s(f,P_1) \leq S(f,P_2)$.

Prova.

Sejam P_1 e P_2 duas partições do intervalo $[a,b]$. Então, $P = P_1 \cup P_2$ é uma partição de $[a,b]$ que é um refinamento de P_1 e P_2. Pela proposição anterior, $s(f,P_1) \leq s(f,P) \leq S(f,P) \leq S(f,P_2)$. Logo, $s(f,P_1) \leq S(f,P_2)$. □

Agora, podemos provar que a integral inferior é menor ou igual a integral superior.

Proposição 2. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Então, $\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$.

Prova.

Sejam P e P' duas partições de $[a,b]$. Pelo corolário anterior, $s(f,P) \leq S(f,P')$, de modo que $S(f,P')$ é um limite superior para o conjunto $\{s(f,P) : \text{P é uma partição de [a,b]}\}$, o que implica que $\underline{\int_a^b} f \leq S(f,P')$. Uma vez que esta desigualdade vale para todas as partições P', vemos que $\underline{\int_a^b} f$ é um limite inferior para o conjunto $\{S(f,P) : \text{P é uma partição de [a,b]}\}$, e conseqüentemente, $\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$ como queríamos demonstrar.

Condições para a Integrabilidade à Darboux

No próximo resultado iremos dar uma condição necessária e suficiente para a integrabilidade à Darboux.

Teorema 1 (Critério de Integrabilidade)**.** Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada em $[a,b]$. Então f é integrável à Darboux se, e somente se, para qualquer $\varepsilon > 0$ dado, existir uma partição P do intervalo $[a,b]$ tal que $S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$.

Prova.

($\Rightarrow$) Suponha que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é limitada e integrável à Darboux. Fixe $\varepsilon > 0$. Por definição da integral inferior como um ínfimo, existe uma partição P_s tal que $\underline{\int_a^b} f - s(f,P_s) < \frac{\varepsilon}{2}$ e uma partição P_S tal que $S(f,P_S) - \overline{\int_a^b} f < \frac{\varepsilon}{2}$, pela definição da integral superior como supremo. Seja $P = P_s \cup P_S$.

Então,

$$\underline{\int_a^b} f - \frac{\varepsilon}{2} < s(f,P_s) \leq s(f,P) \leq S(f,P) \leq S(f,P_S) \leq \overline{\int_a^b} f + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Desde que $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$, vemos que $S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$.

De fato,

$$\int_a^b f - \frac{\varepsilon}{2} < s(f,P) \leq S(f,P) < \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{0.1}$$

Subtraindo $s(f,P)$ de (0.1) temos:

$$\int_a^b f - \frac{\varepsilon}{2} - s(f,P) < 0 \leq S(f,P) - s(f,P) < \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2} - s(f,P)$$

Então,

$$S(f,P) - s(f,P) < \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2} - s(f,P). \tag{0.2}$$

Subtraindo $S(f,P)$ de (0.1), temos:

$$\int_a^b f - \frac{\varepsilon}{2} - S(f,P) < s(f,P) - S(f,P) \leq 0 < \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2} - S(f,P)$$

Então,

$$S(f,P) - s(f,P) < s(f,P) + \frac{\varepsilon}{2} - \int_a^b f \tag{0.3}$$

Somando (0.2) e (0.3) obtemos:

$$2[S(f,P) - s(f,P)] < S(f,P) - s(f,P) + \varepsilon$$

Isto é equivalente a

$$S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon.$$

($\Leftarrow$) Suponha que para todo $\varepsilon > 0$, existe uma partição P de $[a,b]$ tal que $S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$. Então:

$$s(f,P) \leq \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f \leq S(f,P) < s(f,P) + \varepsilon.$$

Daí,

$$s(f,P) \leq \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f < s(f,P) + \varepsilon \tag{0.4}$$

Subtraindo $\overline{\int_a^b} f$ de (0.4) temos:

$$s(f,P) - \overline{\int_a^b} f \leq \underline{\int_a^b} f - \overline{\int_a^b} f \leq 0 < s(f,P) + \varepsilon - \overline{\int_a^b} f$$

Então,

$$\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \leq -s(f,P) + \overline{\int_a^b} f \tag{0.5}$$

Subtraindo $\underline{\int_a^b} f$ de (0.4) temos:

$$s(f,P) - \underline{\int_a^b} f \leq 0 \leq \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f < s(f,P) + \varepsilon - \underline{\int_a^b} f$$

Então,

$$\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f < s(f,P) + \varepsilon - \underline{\int_a^b} f \tag{0.6}$$

Somando (0.5) e (0.6) obtemos:

$$2\left[\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f\right] < \varepsilon + \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f$$

Isto é equivalente a

$$\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f < \varepsilon.$$

Por outro lado, $\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \geq 0$. Então $|\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f| < \varepsilon$. Daí temos que $|\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f| < \varepsilon$ e como ε é arbitrário, temos $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$. Portanto f é integrável.

Utilizando o teorema anterior, pode-se provar o seguinte resultado.

Teorema 2. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada em $[a,b]$. Então, f é integrável à Darboux se, e somente se, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$ para qualquer partição P com $\max \Delta x_i < \delta$.

A Equivalência Entre as Integrais de Riemann e Darboux

Nesta seção mostraremos que as definições de integral dada por G. Darboux e B.Riemann, tratam na realidade de uma mesma integral. Isto é que estas definições são equivalentes.

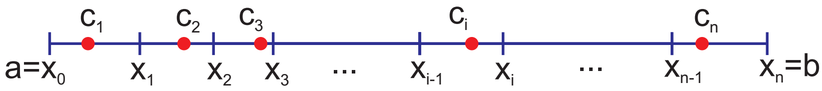

Figura 4: *"Sample Points" em cada subintervalo* $[x_{i-1}, x_i]$.

A Integral de Riemann

Definição 5. Sejam f uma função definida em $[a, b]$ e $P : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ uma partição de $[a, b]$. Para cada $i = 1, 2, \ldots, n$ seja c_i um número em $[x_{i-1}, x_i]$ escolhido arbitrariamente. Veja a figura abaixo.

Temos que o número:$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \ldots + f(c_n)\Delta x_n$ denomina-se soma de Riemann de f, relativa à partição P e aos números c_i.

Definição 6 (Função Riemann-Integrável)**.** Sejam f uma função definida em $[a, b]$ e L um número real. Dizemos que $\sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ tende a L quando $\max \Delta x_i \to 0$, e escrevemos

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = L$$

se para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|\sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i - L| < \varepsilon$ para toda partição P de $[a, b]$, com $\max \Delta x_i < \delta$ e qualquer escolha de $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Tal número L, que quando existe é único, pela definição de limite, denomina-se integral de Riemann de f em $[a, b]$ e é denotada por

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i.$$

Se $\int\limits_a^b f(x)dx$ existe, diremos que f é integrável (segundo Riemann) em $[a, b]$. A variável x que aí aparece é a *variável de integração* e os números a e b são os *limites de integração, inferior e superior* respectivamente. Assim, definimos a integral como o limite das somas de Riemann. Usa-se também a notação $\int\limits_a^b f$.

Teorema 3. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Então, f é integrável à Riemann se, e somente se, f é limitada e integrável à Darboux.

Prova.

($\Rightarrow$) Suponha que f é integrável à Riemann. Sabemos pelo teorema 1 que f é limitada. Pelo teorema 2.19, para mostrar que f é integrável à Darboux é suficiente encontrar uma partição P tal que $S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$.

Como f é integrável à Riemann, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se P é uma partição com $\max \Delta x_i < \delta$, então

$$|\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i - \int_a^b f| < \frac{\varepsilon}{4}$$

para qualquer conjunto de pontos $\{c_i\}_{i=1}^{n}$. Seja a partição $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$.

Pela definição de M_i e m_i, existem pontos $\alpha_i, \beta_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tal que $M_i < f(\alpha_i) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$ e $f(\beta_i) - \frac{\varepsilon}{4(b-a)} < m_i$, para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
S(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \\
&< \sum_{i=1}^{n} \left[f(\alpha_i) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \right] (x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)(x_i - x_{i-1}) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \\
&< \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} \\
&= \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Analogamente, usando $\{c_i\}_{i=1}^n$, vemos que $s(f,P) > \int_a^b f - \frac{\varepsilon}{2}$. Portanto,$S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$ e f é Darboux integrável. Conseqüentemente vamos nos referir às funções integráveis à Darboux como sendo funções integráveis à Riemann.

($\Leftarrow$) Suponha que f é limitada e integrável à Darboux, isto é,

$$\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f = A.$$

Fixe $\varepsilon > 0$ e escolha $\delta > 0$ com $\max \Delta x_i < \delta$, pelo teorema 2.20. Seja P uma partição com norma menor que δ e seja $\{c_i\}_{i=1}^n$ um conjunto de pontos para P. Então, por definição, $s(f,P) \leq A \leq S(f,P)$ e $s(f,P) \leq \sum_{i=1}^n f(c_i)(x_i - x_{i-1}) \leq S(f,P)$ e pelo Teorema (2), $S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$.

Deste modo, multiplicando a primeira desigualdade por -1 e somando à segunda, $\max \Delta x_i < \delta$ implica $|\sum_{i=1}^n f(c_i)(x_i - x_{i-1}) - A| < \varepsilon$ para qualquer conjunto de pontos $\{c_i\}_{i=1}^n$. Portanto, f é integrável à Riemann com integral igual a A. □

Conclusão

Esperamos que esse trabalho possa despertar interesse e contribuir para facilitar a capacidade de compreensão dos conceitos de tais teorias por estudantes e que estes futuramente dêem continuidade a seus estudos.

Destacamos ainda que em nossa monografia, disponibilizaremos um material complementar a evolução das idéias da integração, culminando na apresentação e justificativa da teoria da Integração de Lebesgue.

Convidamos o leitor a conhecer o nosso trabalho na íntegra.

Referências

[1] Ávila,G., "Introdução à Análise Matemática - 2ª ed.",São Paulo, 1999.

[2] Kurtz,D.S.-Swartz,C.W, "Theories of integration - The integrals of Riemann, Lebesgue, Henstock-Kurzweil, and Mcshane" ,Danvers, 2004.

[3] Lima,E.L., "Curso de Análise - vol 2" ,Rio de Janeiro, 2010.

[4] Lima,E.L., "Curso de Análise - vol 1" ,Rio de Janeiro, 2006.

[5] Guidorizzi,H.L., "Cálculo - vol 1" ,Rio de Janeiro, 2007.