 ISSN 2237-8103

CONSTRUÇÃO DO ESPAÇO TANGENTE A VARIEDADES

Ceili M. Moreira[1], **Eder M. Martins**[1], **Wenderson M. Ferreira**[1]

Resumo: *O objetivo deste trabalho é apresentar a construção do espaço vetorial tangente a uma variedade diferenciável m-dimensional (que denotaremos por M^m) em um dado ponto $p \in M^m$. Assumiremos conhecidos os conceitos de variedades diferenciáveis e de aplicações diferenciáveis entre estes objetos.*

Palavras-chave: Variedades Diferenciáveis, Espaço Tangente

Introdução

Quando estudamos superfícies diferenciáveis fica evidenciada sua dependência intrínseca em relação a um espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. Desse modo, surge a questão de estabelecer uma "idéia mais abstrata", que desvincule tal conceito dos espaços euclidianos. Esta questão se apresentou desde a formalização do conceito de superfícies e foi salientada por grandes matemáticos como Gauss. Desde os tempos deste grande matemático, quase um século se passou até que o conceito de variedades fosse formulado de maneira bem definida - a demora deveu-se principalmente para que se tivesse compreensão clara do papel a ser desempenhado pela mudança de parâmetros em um conceito totalmente abstrato (veja [1], pp. 2).

Uma vez formalizada a teoria relativa às variedades diferenciáveis, torna-se natural a extensão de conceitos de Cálculo a estes novos elementos e a espaços mais gerais que o $\mathbb{R}^n$. Especial atenção é dada ao estudo de conceitos relacionados à diferenciabilidade.

Para definirmos a noção de derivada de uma aplicação $f : M \to N$ entre variedades, associaremos a cada $p \in M$ um espaço vetorial, chamado espaço tangente a M no ponto p e denotado por T_pM. Sendo assim, a derivada $f'(p)$ será uma transformação linear de T_pM para $T_{f(p)}N$.

Nesse trabalho, assumiremos a noção de diferenciabilidade de uma aplicação diferenciável entre variedades e apresentaremos formalmente o conceito de espaço vetorial tangente a uma variedade diferenciável.

O Espaço Tangente

O espaço tangente T_pM a uma superfície $M^m \subset \mathbb{R}^n$, num ponto $p \in M$, é o conjunto de todos os vetores $v \in \mathbb{R}^n$ que são vetores velocidade, em p, de caminhos diferenciáveis contidos em M.

No entanto, sendo M uma variedade diferenciável, os "vetores tangentes $v \in T_pM$" deverão ser obtidos de forma abstrata, pois M não está, em geral, contida em um espaço euclidiano.

[1]Departamento de Matemática - ICEB, UFOP,
ceilimm@yahoo.com.br, eder@iceb.ufop.br, wmf@iceb.ufop.br

Sejam M uma variedade de classe C^k e p um ponto de M. Definimos C_p como o conjunto de todos os caminhos $\lambda : J \to M$, em que J é um intervalo aberto, contendo 0, tais que $\lambda(0) = p$ e λ é diferenciável em 0. Se $\lambda \in C_p$ e $x : U \to \mathbb{R}^m$ uma carta local em M, com $p \in U$, pode acontecer que a imagem $\lambda(J)$ não esteja inteiramente contida em U. Dessa forma, toda vez que considerarmos $x \circ \lambda$, estamos admitindo J suficientemente pequeno, contendo 0, tal que $\lambda(J) \subset U$.

Diremos que dois caminhos $\lambda, \mu \in C_p$ são equivalentes, e escreveremos $\lambda \sim \mu$, quando existir uma carta local $x : U \to \mathbb{R}^m$, com $p \in U$, tal que $x \circ \lambda : J \to \mathbb{R}^m$ e $x \circ \mu : I \to \mathbb{R}^m$ têm o mesmo vetor velocidade em $t = 0$, isto é, $(x \circ \lambda)'(0) = (x \circ \mu)'(0)$.

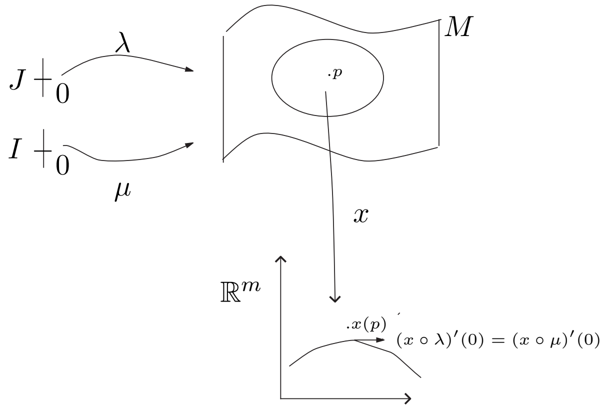

Figura 1: λ, $\mu \in C_p$ são caminhos equivalentes.

Observe que a igualdade $(x\circ\lambda)'(0) = (x\circ\mu)'(0)$ é verdadeira para toda carta local $x : U \to \mathbb{R}^m$ em M, $p \in U$. Resulta deste fato que a relação $\lambda \sim \mu$ é de fato uma relação de equivalência.

O vetor velocidade λ' do caminho $\lambda \in C_p$ é, por definição a classe de equivalência de λ. Ou seja, $[\lambda] = \{\mu \in C_p; \mu \sim \lambda\}$. Portanto, dados $\lambda, \mu \in C_p$ tem-se $[\lambda] = [\mu]$ se, e somente se, $(x \circ \lambda)'(0) = (x \circ \mu)'(0)$ para alguma (logo para toda) carta local $x : U \to \mathbb{R}^m$ em M, com $p \in U$.

Indicaremos o conjunto quociente $C_p/\sim$ por T_pM e o chamaremos de **espaço tangente** à variedade M no ponto p.

Existe uma bijeção natural entre T_pM e $\mathbb{R}^m$ de forma que podemos atribuir-lhe uma estrutura de espaço vetorial (isomorfo a $\mathbb{R}^m$).

Cada carta local $x : U \to \mathbb{R}^m$ em M, com $p \in U$, dá origem a uma aplicação, definida por:

$$\begin{aligned} \overline{x} = \overline{x}(p) : T_pM &\mapsto \mathbb{R}^m \\ [\lambda] &\mapsto \overline{x}([\lambda]) = (x \circ \lambda)'(0). \end{aligned}$$

Tal aplicação é bijetiva. De fato:

(i) Se $(x \circ \lambda)'(0) = (x \circ \mu)'(0)$ então $\lambda \sim \mu$ e consequentemente $[\lambda] = [\mu]$. Logo $\overline{x}$ é injetiva.

(ii) Dado $v \in \mathbb{R}^m$ seja $\lambda \in C_p$ dada por $\lambda(t) = x^{-1}(x(p) + tv)$. Então $\overline{x}(\lambda) = (x \circ \lambda)'(0) = v$, logo $\overline{x}$ é sobrejetiva.

A estrutura de espaço vetorial dada ao T_pM, exige que a bijeção $\overline{x} : T_pM \to \mathbb{R}^m$ seja um isomorfismo. Em outras palavras as operações de soma de vetores e produto de um vetor por um escalar são definidas pelas equações:

(i) $[\lambda] + [\mu] = (\overline{x})^{-1}(\overline{x}(\lambda') + \overline{x}(\mu')) = ((x \circ \lambda)'(0) + (x \circ \mu)'(0)$;

(ii) $c.[\lambda] = (\overline{x})^{-1}(c.\overline{x}(\lambda')) = (\overline{x})^{-1}(c(x \circ \lambda)'(0))$.

Estas operações independem da escolha da carta local x. De fato, dada a carta local $y : V \to \mathbb{R}^m$, com $p \in V$, então $\overline{y} = (y \circ x^{-1})' \circ x : T_pM \to \mathbb{R}^m$. Como $(y \circ x^{-1})'(x(p))$ é um isomorfismo, as cartas locais x e y originam a mesma estrutura de espaço vetorial em T_pM.

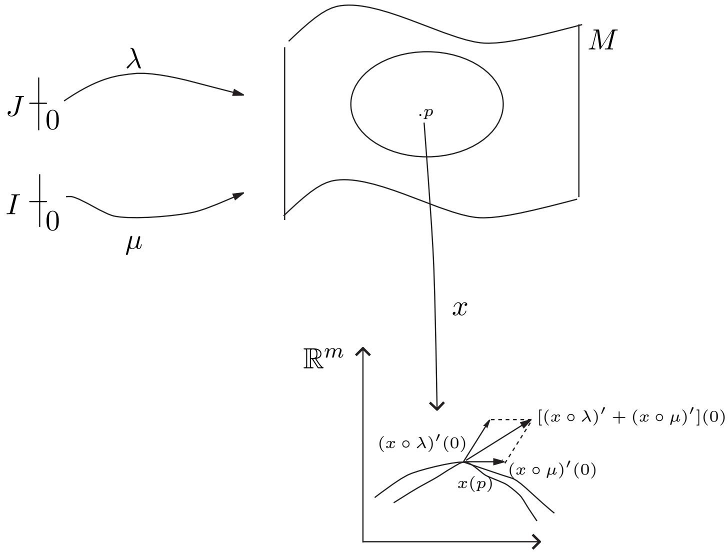

Figura 2: A estrutura de espaço vetorial em T_pM.

Conclusões

Com a noção de variedades diferenciáveis, torna-se possível estendermos conceitos do cálculo diferencial a espaços mais gerais que o $\mathbb{R}^n$. Esta extensão permite avanços significativos na ciência, uma vez que amplia significativamente a quantidade de elementos com os quais se pode "trabalhar" do ponto de vista matemático. Ao mesmo tempo em que esta ampliação ocorre, a passagem a elementos não necessariamente contidos em espaços euclidianos faz com que seja necessária a redefinição de diversos conceitos (muitos conhecidos do cálculo em $\mathbb{R}^n$), de maneira abstrata.

Referências

[1] Carmo, M. P., "Geometria Riemanniana.", Projeto Euclides, IMPA, 1998.

[2] Lima, E. L., "Análise Real.", vol.1 (6ªedição). Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2002.

[3] Lima, E. L., "Análise Real.", vol.2. Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2004.

[4] Lima, E. L., "Análise no Espaço $\mathbb{R}^n$.", Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2002.

[5] LIMA, Elon Lages. *Espaços Métricos.* (3ªedição). Projeto Euclides, IMPA, 2003.

[6] Lima, E. L., "Curso de Análise.", vol.1 (10ªedição). Projeto Euclides, IMPA, 2002.

[7] Lima, E. L., "Curso de Análise.", vol.2 (6ªedição). Projeto Euclides, IMPA, 2000.

[8] LIMA, Elon Lages. *Curso de Análise*, vol. 2. (6ª edição). Projeto Euclides, IMPA, 2000.

[9] LIMA, Elon Lages. *Variedades Diferenciáveis*, Monografias de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 1973.