ESTABILIDADE DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS COM ARGUMENTO CONSTANTE VIA EQUAÇÕES DISCRETAS

Antônio Marcos da Silva[1], Érica Resende Malaspina[1]

Resumo: *O presente trabalho visa estudar a estabilidade no sentido de Liapunov para a classe de equações diferenciais com argumento constante em intervalos da forma $h(t) = [t]$, onde $[t]$ representa a parte inteira de t. O problema é colocado no contexto das equações diferenciais com retardamento contínuo em intervalos. A idéia é explorar a estabilidade de uma equação discreta associada usando as chamadas funções de Liapunov. Sob condições apropriadas essas propriedades de estabilidade implicam nas propriedades da estabilidade das soluções da equação principal.*

Palavras-chave:

Introdução

As equações diferenciais correspondem a um tema matemático bastante estudado por pesquisadores. É muito difícil e, às vezes, até impossível, encontrar uma solução de uma dada equação diferencial numa forma explícita. Isso acontece muito com as equações diferenciais não lineares. Dessa maneira, é importante considerar informações sobre as soluções de equações diferenciais sem realmente resolvê-las. Um ponto importante que se deve ressaltar é se pequenas alterações nas condições iniciais de um problema de valor inicial (também conhecido como Problema de Cauchy) levam a pequenas alterações e assim manteríamos estabilidade ou a grandes alterações o que nos levaria a uma instabilidade nas soluções. A teoria de Liapunov fornece-nos resultados nesse sentido.

Objetivos

O objetivo principal desta pesquisa é o estudo da estabilidade no sentido de Liapunov de equação do tipo

$$x'(t) = f(t, x(t), x([t])) \tag{1}$$

em que $[t]$ denota a parte inteira de t. A equação é um caso particular da equação com argumento contínuo em intervalos, que é do tipo

$$x'(t) = f(t, x(t), x(h(t)))$$

em que o argumento $h(t)$ tem intervalos de constância. No caso, $h(t) = [t]$ é descontínuo nos inteiros. Aplicações dessas equações aparecem na estabilização de sistemas de controle híbrido

[1]Departamento de Matemática - ICEB, UFOP,
antonio.mat@hotmail.com, malaspin@iceb.ufop.br

com reação retardada, na semi-discretização de uma equação diferencial ordinária e como caso especial de uma equação diferencial com retardamento em que $r(t) = [t]$ é descontínuo nos inteiros.

Como as soluções de são contínuas nos pontos $t = n$, para n um inteiro, o uso de relações recursivas nos intervalos entre inteiros nos levará à definição de uma equação discreta associada do tipo $c_{n+1} = h(n, c_n)$. Então, sob determinadas condições, mostraremos que a estabilidade do equilíbrio nulo da equação discreta associada implica na estabilidade da solução nula da equação
.

Como $[t]$ é sempre menor ou igual a t, a equação pode ser analisada no contexto das equações diferenciais funcionais com retardamento

$$x'(t) = g(t, x_t) \tag{2}$$

em que $g : \mathbb{R}\times D \longrightarrow \mathbb{R}^N$ é uma função contínua, $D \subset C = C([-1, 0], \mathbb{R}^N)$ é um aberto e C é o espaço de Banach das aplicações contínuas φ de $[-1, 0]$ no $\mathbb{R}^N$ com a norma $||\varphi|| = \sup\limits_{-1\leq\theta\leq 0} |\varphi(\theta)|$. Dado uma condição inicial para a equação , a existência e unicidade de solução para o problema de valor inicial sairá a partir do conceito das condições de Carathéodory. Exploraremos ainda os conceitos de estabilidade no sentido de Liapunov para obter resultados para as soluções da equação principal via equação discreta.

Justificativa

O estudo das equações diferenciais e dos métodos matemáticos a elas relacionados é uma grande fonte de pesquisas científica da Análise Matemática atual. Do ponto de vista das aplicações, o interesse nas equações diferenciais com retardamento está em modelos da economia e em muitos fenômenos naturais, notadamente os biológicos e de dinâmica de populações, a ação e a reação não são concomitantes; em muitas circunstâncias é necessário que se considerem períodos de latência ou de gestação. Assim, o princípio de causalidade envolve um lapso de tempo entre causa e efeito. São mais realistas, portanto, os modelos determinísticos descritos por equações com retardamentos. No caso da equação que se pretende estudar, sua maior aplicabilidade está na estabilização de sistemas de controle híbrido com reação retardada. Desta forma, os modelos determinísticos mais realistas são freqüentemente descritos por estas equações.

Metodologia

A metodologia utilizada consisti-se de pesquisas bibliográficas em obras indicadas no item 6 bem como de exposições (semanais) do aluno à orientadora de acordo com as teorias e técnicas utilizadas na abordagem dos problemas.

Alguns Resultados

Como modo de aplicar a teoria estudada para a estabilidade de equações consideremos a equação

$$y'(s) = ay(s) + a_0 y([s]_r),$$

onde $[s]_r = n, nr \leq s < (n + 1)r, n \in \mathbb{N}, a$ e a_0 são constantes reais, $a \neq 0$ e $r > 0$.

Uma região de estabilidade assintótica da solução nula desta equação foi primeiramente obtida por Sanderfur em [11] impondo que $a \leq -\delta < 0$ e $|a_0| < k\delta$, $\delta > 0$ e algum $k \in (0,1)$. Em seguida, Cooke e Wiener em [4], utilizando a expressão da solução, determinaram uma região mais ampla quando permitiram valores positivos para o parâmetro a. Nesta aplicação mostraremos a região encontrada por Cooke e Wiener, usando o método de Liapunov.

Inicialmente, escrevendo $s = tr$, e $y(s) = x(t)$, obtemos que $[s]_r = [tr]_r = [t]_1 = [t]$ e

$$x'(t) = rax(t) + ra_0x([t]) \tag{3}$$

Logo, temos que $f(x, y) = rax(t) + ra_0y$ é contínua e lipschitziana em relação a (x, y). Por outro lado, temos que a equação discreta associada à equação é dada por:

$$C_{n+1} = \left\lfloor \left(1 + a^{-1}a_0\right) e^{ra} - a^{-1}a_0 \right\rfloor c_n, n \in \mathbb{N} \tag{4}$$

Logo, verificamos que a região de estabilidade assintótica no plano (a, a_0) é dada pela desigualdade $-a - \dfrac{2a}{e^{ra} - 1} < a_0 < -a$. Tomando a função:

$$g(a) = -a - \frac{2a}{e^{ra} - 1}, \text{ se } a \neq 0 \text{ e } g(0) = -\frac{2}{r}$$

vemos que g é contínua em $\mathbb{R}$. Assim, é importante observar que os pontos que estão sobre a reta $a_0 = a$, para $a < 0$, são pontos de estabilidade da equação discreta, para qualquer r.

Além disso, quando $r \longrightarrow 0^+$ a região de estabilidade se expande cobrindo todo o semiplano $a_0 + a < 0$. Por outro lado, quando $r \longrightarrow +\infty$, a região de estabilidade diminui para $a \leq a_0 < -a$, para $a < 0$.

Portanto, para (a, a_0) na região $g(a) < a_0 < -a$, a solução nula da equação discreta é assintoticamente estável e como f é contínua e lipschitziana, a solução nula da equação é também assintoticamente estável.

Por fim, vemos que para $a_0 = 0$ e $a > 0$, a solução nula da equação $y'(s) = ay(s)$ é instável.

Referências

[1] Carvalho, L. A. V.; Cooke, K. L., "A Nonlinear Equation With Piecewise Continuous Argument. Differential and Integral Equations.", vol. 1, number 3, p.359-367, 1988.

[2] Carvalho, L. A. V., "On the Stability of Discrete Equations and Ordinary Differential Equations. Delay Differential Equations and Dynamical Sistems.", p.88-97, 1990.

[3] Cooke, K. L.; Wiener, J., Retarded Differential Equations With Piecewise Constant Delays, *Journal of Mathematical Analysis and Aplications*, **99** p.265-297, 1984.

[4] Cooke, K. L.; Wiener, J., Stability Regions for Linear Equations With Pecewise Continuous Delays, *Comp. & Math. With Aplis*, **12(6)** p.695-701, 1986.

[5] Cooke, K. L.; Wiener, J., "A Survey of Differential Equations With Piecewise Continuous Arguments. Delay Differential Equations and Dynamical Systems.", New York, Springer - Verlag, p.1-15, 1990.

[6] Hale, J. K., "Theory of functional Differential Equations.", New York, Springer - Verlag, 1977.

[7] Hale, J. K., "Ordinary Differential Equations.", New York, Robert E. Krieger Publis. Company, 1980.

[8] Malaspina, E. R., "Sobre a Estabilidade de Equações Diferenciais com Argumentos Seccionalmente Contínuo.", Dissertação de Mestrado, São José do Rio Preto/SP, 1997.

[9] Marconato, S. A. S.; Spezamiglio, A., Stability of Differential Equations With Piecewise constant Argument via Discrete Equations, *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive System - series A - Mathematatical*, (ISSN 1201 - 3390), Waterloo, Canada **7(3)** p.323-333, 2000.

[10] Onuchic, N., Equações Diferenciais com Retardamento, *8º Colóquio Brasileiro de Matemática*, IMPA, 1971.

[11] Sandefur, J. T., "Discrete Dynamical Systems - Theory and Aplications", New York, Springer - Verlag, 1977.