# ESTUDO DA EQUIVALÊNCIA ENTRE SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES

**Marcos Pavani de Carvalho**[1], **Liliane Martinez Antonow**[1]

**Resumo:** *Neste trabalho estudamos a equivalência entre sistemas de equações diferenciais lineares. O ponto de partida é a equivalência entre uma equação diferencial ordinária linear de ordem $n$ e um sistema de $n$ equações diferenciais de primeira ordem.*

**Palavras-chave:** sistema companheiro, equivalência, equação diferencial.

## Introdução

Uma equação diferencial ordinária linear não homogênea de ordem $n$

$$y^{(n)} + k_1 y^{(n-1)} + ... + k_n y = u(t), \tag{1}$$

com $k_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., n$, é equivalente, via definição padrão, ao sistema de $n$ equações diferenciais de primeira ordem

$$z' = Pz + qu(t) \tag{2}$$

onde $z = [y \;\; y' \;\; ... \;\; y^{(n-1)}]^T$,

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ . & . & . & \cdots & . \\ . & . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -k_n & -k_{n-1} & -k_{n-2} & \cdots & -k_1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

e

$$q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}^T. \tag{4}$$

De fato,

$z' = Pz + qu(t) \Leftrightarrow$

$$\begin{bmatrix} y' \\ y'' \\ . \\ . \\ . \\ y^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ . & . & . & \cdots & . \\ . & . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -k_n & -k_{n-1} & -k_{n-2} & \cdots & -k_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ y' \\ . \\ . \\ . \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \Leftrightarrow$$

$y' = y'$, $\;...\;$, $y^{(n-1)} = y^{(n-1)}$ e $y^{(n)} = -k_n y - \;...\; - k_1 y^{(n-1)} + u(t)$, ou seja, $y^{(n)} + k_1 y^{(n-1)} + \;...\; + k_n y = u(t)$.

[1]IF Sudeste de Minas Gerais,
marcos.pavani@ifsudestemg.edu.br

Estamos interessados na recíproca: quando pode um sistema linear com coeficientes constantes

$$x^{'} = Ax + bu(t) \tag{5}$$

onde $A$ é $n \times n$ e $b$ é $n \times 1$, ser levado para (2) por uma transformação linear não-singular $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, tal que $x \mapsto Tx = z$ onde $T$ é uma matriz constante?

Se $z = Tx$, então $z^{'} = Tx^{'} = T(Ax + bu(t)) = TAx + Tbu(t) = TAT^{-1}(Tx) + (Tb)u(t)$. Logo, devemos ter $P = TAT^{-1}$, isto é, $P \sim A$ e $Tb = q$.

Assim é fácil ver que uma tal transformação linear nem sempre é possível. Considere o sistema linear

$$\begin{bmatrix} x_1^{'} \\ x_2^{'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \tag{6}$$

Temos que (6) é da forma $x^{'} = Ix + bu(t)$, onde $u(t) \equiv 1$.

Afirmamos que não existe $P$ na forma acima que seja semelhante a $I$.

De fato, se $P \sim I$ então existe $T$ não-singular tal que $P = TIT^{-1} = TT^{-1} = I$, uma contradição.

Portanto $P$ não é semelhante a $I$.

## Um Exemplo

Vamos começar de forma ingênua transformando um exemplo simples e então considerar uma definição precisa de equivalência de sistemas.

**Exemplo 1** Considere o sistema,

$$\begin{cases} x_1' = -2x_1 + 2x_2 + u(t) & \text{(a)} \\ x_2^{'} = x_1 - x_2 & \text{(b)} \end{cases} \tag{7}$$

na forma (5), com $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Diferenciando $(b)$ e substituindo nesta a equação $(a)$, temos

$x_2^{''} = x_1^{'} - x_2^{'} = -2x_1 + 2x_2 + u(t) - x_2^{'} = -2(x_1 - x_2) + u(t) - x_2^{'} = -2x_2^{'} + u(t) - x_2^{'} = -3x_2^{'} + u(t)$ $\Leftrightarrow x_2^{''} + 3x_2^{'} = u(t)$, que é uma equação da forma (1) com $n = 2$, que pode ser levada à forma (2) com

$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ e $q = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Uma solução $x_2(t)$ da equação acima determina uma função $x_1(t)$ (usando $x_1 = x_2^{'} + x_2$), assim o sistema (7) pode ser resolvido. Logo, o sistema (7) pode ser dito equivalente à equação de segunda ordem $y^{''} + 3y^{'} = u(t)$.

Existe outra equação de segunda ordem da forma $y^{''} + k_1 y^{'} + k_0 y = u(t)$ que também é equivalente a (7)?

Vamos tentar formar uma equação de segunda ordem para $x_1$, usando o mesmo método acima.

Diferenciando $(a)$ e substituindo nesta a equação $(b)$, temos

$x_1^{''} = -2x_1^{'} + 2x_2^{'} + u'(t) = -2x_1^{'} + 2x_1 - 2x_2 + u'(t) = -2x_1^{'} - (-2x_1 + 2x_2) + u^{'}(t) = -2x_1^{'} - (x_1^{'} - u(t)) + u^{'}(t) = -3x_1^{'} + u(t) + u'(t)$ se, e somente se, $x_1^{''} + 3x_1^{'} - u'(t) = u(t)$, que não tem a forma (1).

Essa questão é tratada usando uma precisa definição de equivalência. Note que a equação $y^{''} + 3y^{'} = u(t)$ tem a forma do sistema linear

$$z^{'} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t). \tag{8}$$

Nós esperamos que exista uma transformação de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$, que transforma nosso sistema original (7) para a forma (8). Desde que as equações diferenciais são lineares, esperamos que a transformação seja linear, digamos $z = Tx$. Como vimos, a diferenciação nos dá $z^{'} = TAT^{-1}z + Tbu(t)$.

**Definição 1** O sistema $x^{'} = Ax + bu(t)$ é linearmente equivalente ao sistema $z^{'} = Pz + qu(t)$ se existe uma matriz $T$ não-singular tal que

$$TAT^{-1} = P, \quad Tb = q. \tag{9}$$

Obtemos do exemplo exemplo 1, a equação de segunda ordem para $x_2$, que foi ($x_2^{''} = -3x_2^{'} + 0x_2 + u(t)$).

Se colocarmos $z_1 = x_2$ e $z_2 = x_2^{'} = x_1 - x_2$, a transformação demonstrando a equivalência de (7) e (8) é dada por, $x \mapsto Tx = z$ onde $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

De fato, temos $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Colocando $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ e $q = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, temos

$$TAT^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = P \quad \text{e} \quad Tb = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = q.$$

Surge a natural questão sobre existência, unicidade, e cálculo de $T$. Antes de procedermos para a resposta dessas questões, é instrutivo tentar transformar o exemplo seguinte para a forma (2). Antes, temos o seguinte

**Lema 1** Sejam $A, B \in M_n$. Se $B$ é semelhante à $A$, então o polinômio característico de $B$ é o mesmo que o de $A$.

**Demonstração.** Sejam $p_A$, $p_B$, polinômios característico de $A$ e $B$, onde $A \sim B$.

Logo existe $P$ não-singular tal que, $B = P^{-1}AP$.

Assim, $p_B(\lambda) = det(B - \lambda I) = det(P^{-1}AP - \lambda I) = det\{P^{-1}(A - \lambda I)P\} = detP^{-1} \cdot det(A - \lambda I) \cdot detP = det(A - \lambda I) = p_A(\lambda)$. ■

**Exemplo 2** Seja $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ como no exemplo **??**, mas seja $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Mostre que o sistema $x^{'} = Ax + bu(t)$ não pode ser transformado para a forma (2).

De fato, seja $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_2 & -k_1 \end{bmatrix}$. Se $A \sim B$, temos que o polinômio característico de $A$ é igual ao de $P$, isto é, $\lambda^2 + k_1\lambda + k_2 = p_P(\lambda) = p_A(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda$. Assim, $k_1 = 3$ e $k_2 = 0$. Logo,

$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ e daí podemos deduzir que $\quad T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Portanto,

$$Tb = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = q,$$

e o sistema não pode ser transformado para (2).

## Equivalência e a Matriz Companheira $P$

O sistema (2) é muito especial, chamado de *sistema companheiro* e $P$ é a *matriz companheira*. A matriz companheira é definida pela equação característica $\lambda^n + k_1\lambda^{n-1} + ... + k_{n-1}\lambda + k_n = 0$. Um fato conhecido é que o polinômio característico de $P$ é o que define a equação característica.

De fato,

$$p_P(\lambda) = det(P - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \cdots & 0 \\ . & . & . & \cdots & . \\ . & . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -k_n & -k_{n-1} & -k_{n-2} & \cdots & (-k_1 - \lambda) \end{vmatrix}_{(n\times n)} = 0.$$

Logo,

$$\lambda^n + k_1\lambda^{n-1} + ... + k_{n-1}\lambda + k_n = 0.$$

Vemos assim que a equação $p_P(\lambda) = 0$ coincide com a equação característica da equação diferencial de ordem $n$ que deu origem à matriz $P$.

O exemplo 1, mostra que o sistema (5) pode ser equivalente ao sistema companheiro e vimos dois exemplos de (5) que não são equivalentes a um sistema companheiro, o exemplo exemplo 2 e o sistema (6) bi-dimensional com diagonal, tendo dois autovalores repetidos.

## Uma Semelhança Invariante

É conveniente dar a definição a seguir.

**Definição 2** Um vetor $x \in \mathbb{R}^n$ é um vetor cíclico para uma matriz quadrada $A$ de ordem $n$ se os $n$ vetores $x$, $Ax$, $A^2x$, ... , $A^{n-1}x$ são linearmente independentes.

**Exemplo 3** O vetor $q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}^T$ é cíclico para a matriz

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ . & . & . & \cdots & . \\ . & . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -k_n & -k_{n-1} & -k_{n-2} & \cdots & -k_1 \end{bmatrix}.$$

De fato,

$$\left[\begin{array}{ccccc} q & Pq & P^2q & \cdots & P^{n-1}q \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & * \\ . & . & . & \cdots & . \\ . & . & . & \cdots & . \\ 0 & 1 & * & \cdots & * \\ 1 & * & * & \cdots & * \end{array}\right],$$

que é não-singular.

Portanto, $q$ é vetor cíclico para $P$.

A existência de um vetor cíclico para uma matriz é invariante por semelhança, isto é, se $TAT^{-1} = P$ e $q$ é cíclico para $P$, então $A$ tem um vetor cíclico dado por $T^{-1}q$.

De fato:

$\{T^{-1}q, AT^{-1}q, A^2T^{-1}q, ..., A^{n-1}T^{-1}q\}$ é um conjunto linearmente independente pois, aplicando $T$ a cada um deles, obtemos

$$\left\{\begin{array}{c} TT^{-1}q = q \\ TAT^{-1}q = Pq \\ TA^2T^{-1}q = P^2q \\ . \\ . \\ . \\ TA^{n-1}T^{-1}q = P^{n-1}q \end{array}\right\},$$

que é um conjunto linearmente independente, por hipótese. Como $T$ é não-singular, segue, que o conjunto $\{T^{-1}q, AT^{-1}q, ..., A^{n-1}Tq\}$ é linearmente independente.

Portanto $T^{-1}q$ é vetor cíclico para a matriz $A$.

No que segue, utilizaremos os dois lemas abaixo. Lembramos que o polinômio mínimo de uma matriz $A$ é o polinômio de menor grau que se anula em $A$, cujo coeficiente do termo de maior grau é igual a 1.

**Lema 2** Matrizes semelhantes têm o mesmo polinômio mínimo.

**Demonstração.** Sejam $q_A$, $q_B$, polinômios mínimos de $A$ e $B$, respectivamente, onde $A \sim B$.

Logo existe $T$ não-singular tal que, $B = T^{-1}AT$.

Assim, $q_A(B) = q_A(T^{-1}AT) = T^{-1}q_A(A)T = 0$.

Logo, $gr(q_B(\lambda)) \leq gr(q_A(\lambda))$, onde "$gr$" significa "grau".

Por outro lado, $q_B(A) = q_B(TBT^{-1}) = Tq_B(B)T^{-1} = 0$.

Logo, $gr(q_A)(\lambda) \leq gr(q_B(\lambda))$.

Portanto esses dois polinômios têm o mesmo grau, se anulam em $A$ e em $B$ então eles devem ser idênticos por, $[3, teo: 3.3.1]$. ■

**Lema 3** Os polinômios característico e mínimo de uma matriz companheira $P$ são idênticos.

**Demonstração.**

Considere a matriz $P$ e seja $I$ a matriz identidade de ordem $n$.

Seja, $p_P(\lambda) = \lambda^n + k_1\lambda^{n-1} + \cdots + k_{n-1}\lambda + k_n$ polinômio característico de $P$.

Observe que, se $e_j$ representa o j-ésimo vetor da base canônica do $\mathbb{R}^n$, $j = 1, 2, \ldots, n$, então

$$e_1I = (1, 0, \cdots, 0) = e_1 = e_1I$$
$$e_1P = (0, 1, 0, \cdots, 0) = e_2 = e_1P$$
$$e_2P = (0, 0, 1, 0, \cdots, 0) = e_3 = e_1P^2$$
$$\vdots$$
$$e_{n-1}P = (0, 0, 0, 0, \cdots, 1) = e_n = e_1P^{n-1}$$
$$e_nP = (-k_n, -k_{n-1}, \cdots, -k_1) = -e_1k_n - e_2k_{n-1} - \cdots - e_nk_1 \Leftrightarrow$$
$$e_1P^n = -e_1Ik_n - e_1Pk_{n-1} - \cdots - e_1P^{n-1}k_1 \Leftrightarrow$$
$$e_1P^n + e_1k_1P^{n-1} + \cdots e_1k_{n-1}P + e_1k_nI = 0 \Leftrightarrow$$
$$e_1(P^n + k_1P^{n-1} + \cdots k_{n-1}P + k_nI) = 0 \Leftrightarrow$$
$$e_1p_P(P) = 0$$

Além disso, $e_kp_P(P) = e_1P^{k-1}p_P(P) = 0$ para cada $k = 1, 2, \cdots, n$, desde que $e_kp_P(P) = 0$ para cada vetor $e_k$. Concluímos que $p_P(P) = 0$, e portanto $p_P(\lambda)$ é um polinômio de grau $n$ que se anula em $P$.

Se existe um polinômio $q(t) = t^m + b_1t^{m-1} + \cdots + tb_{m-1} + b_m$, com $m < n$ que se anula em $P$, então

$0 = e_1q(P)$
$= e_1P^m + e_1b_1P^{m-1} + \cdots + e_1b_{m-1}P + e_1b_mI$
$= e_{m+1} + b_1e_m + \cdots + b_{m-1}e_2 + b_me_1$
$\Leftrightarrow e_{m+1} = -b_1e_m - \cdots - b_{m-1}e_2 - b_me_1$
$\Rightarrow e_{m+1}$ é linearmente dependente com os vetores base $e_1, e_2, \cdots, e_m$, absurdo.

Portanto, $p_P(\lambda) = \lambda^n + k_1\lambda^{n-1} + \cdots + k_{n-1}\lambda + k_n$ é também o polinômio mínimo.

■

**Proposição 1** Uma matriz $A$ é semelhante à matriz companheira $P$ definida pelo seu polinômio característico se, e somente se, os polinômios mínimo e característico de $A$ são idênticos.

**Demonstração.** Sabemos que matrizes semelhantes têm os mesmos polinômios mínimo e característico.

Supondo $A \sim P$, então $p_P(\lambda) = p_A(\lambda)$ e $q_P(\lambda) = q_A(\lambda)$ onde, $p$ é o polinômio característico e $q$ é o polinômio mínimo. Pelo lema 3, $p_P(\lambda) = q_P(\lambda)$, e daí segue que os polinômios característico e mínimo de $A$ são idênticos.

Por outro lado, se o polinômio mínimo e o polinômio característico de $A$ são idênticos, então a forma canônica de Jordan de $A$ deve conter exatamente um bloco de Jordan para cada autovalor distinto, e a ordem de cada bloco é igual à multiplicidade do autovalor correspondente como zero do polinômio característico (e mínimo) de $A$.

Pelo lema 3, os polinômios característico e mínimo da matriz companheira $P$ são idênticos. Assim, a matriz companheira $P$ tem os mesmos blocos de Jordan de $A$. Logo por transitividade segue que $A$ é semelhante a $P$. ■

É fácil construir um exemplo de matriz que tem (ou não tem) vetores cíclicos. Os exemplos 1 e 2 possuem condição de semelhança onde o polinômio mínimo e característico de $A$ é $p(\lambda) = \lambda(\lambda + 3)$. Concluímos que existe alguma outra obstrução no exemplo 2 para a equivalência com o sistema (2), e a obstrução deve envolver o vetor $b$. Assim, o problema com a transformação no exemplo 2 está relacionado à forma com que a função forçante $u$ ingressa as equações. Examinaremos essas questões na próxima seção.

## Unicidade da Transformação $T$

Assuma que temos uma matriz $T$ não-singular tal que $TAT^{-1} = P$ e $Tb = q$.

Então, $TAT^{-1}q = TAb$, e $TA^kb = TA^kT^{-1}q = (TAT^{-1})^kq = P^kq$, para todo $k \geq 0$ inteiro.

A não-singularidade de $T$ implica que, se $q$ é cíclico para $P$,

$n = rank \begin{bmatrix} q & Pq & \cdots & P^{n-1}q \end{bmatrix}$

$= rank \begin{bmatrix} Tb & TAb & \cdots & TA^{n-1}b \end{bmatrix}$

$= rank \begin{bmatrix} b & Ab & \cdots & A^{n-1}b \end{bmatrix}$.

Além disso, $T$ é determinada univocamente por suas ações na base definida pelos vetores $\left\{ b, \;\; Ab, \;\; \cdots \;\; A^{n-1}b \right\}$.

Assim, nós temos o resultado de unicidade a seguir e condição necessária.

**Proposição 2** Há no máximo uma transformação linear não-singular $z = Tx$, levando (5) para a forma companheira (2). Tal $T$ existe somente se

$$rank \begin{bmatrix} b & Ab & \cdots & A^{n-1}b \end{bmatrix} = n. \tag{10}$$

O exemplo 2 é explicado por este resultado pois, $\begin{bmatrix} b & Ab \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$,

$rank \neq 2$.

Voltaremos mais adiante ao exemplo 2 para estudo adicional.

A Proposição 2. também explica porque nós não podemos obter uma equação de segunda ordem da forma (1) para a variável $x_1$ no exemplo 1: a equação de segunda ordem para $y = z_1$ deve ser uma combinação linear única das componentes de $x$.

Mostraremos em seguida que a condição (10) é também suficiente para garantir a existência de uma transformação não-singular que leve (5) a (2). Mostraremos também como construir $T$ por um método direto e simples.

## A Condição do posto é Suficiente para Equivalência

Referindo-se anteriormente pelo exemplo 1, a chave em transformar (5) para (2) é identificar a variável $z_1$ que satisfaz uma equação de ordem $n$ equivalente a (1).

Note que,

$z_1 =$(primeira linha de $T$)$\cdot x$. Vamos denotar a primeira linha de $T$ por $\tau$.

Assim, desde que $Tb = q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}^T$ e $TA^kb = P^kq$, devemos ter, $\tau b = 0$, $\tau Ab = 0$, $\cdots$, $\tau A^{n-2}b = 0$, $\tau A^{n-1}b = 1$.

Escrevemos isso como

$$\tau \begin{bmatrix} b & Ab & \cdots & A^{n-1}b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}^T = q^T. \tag{11}$$

Agora, se assumirmos $rank \begin{bmatrix} b & Ab & \cdots & A^{n-1}b \end{bmatrix} = n$, há uma única solução para $\tau$ em (11)

Novamente, a variável $z_1$ deve ser uma combinação linear única das coordenadas de $x$.

Seja agora $z_2 =$(segunda linha de $T$)$\cdot x = z_1' = \tau x' = \tau(Ax + bu(t)) = \tau Ax + \tau bu(t) = \tau Ax$.

Portanto, $z_2 = \tau Ax$.

Continuando desse modo, as equações que definem $\tau$ e a forma do sistema $z$ implicam que,

$$T = \begin{bmatrix} \tau \\ \tau A \\ \vdots \\ \tau A^{n-1} \end{bmatrix} \tag{12}$$

Combinamos esse argumento com a Proposição 2, temos o seguinte resultado:

**Teorema 1** O sistema $x^{'} = Ax + bu(t)$ com $x \in \mathbb{R}^n$ pode ser transformado no sistema companheiro $z^{'} = Pz + qu(t)$, por uma transformação linear não-singular $z = Tx$ se, e somente se, $rank \begin{bmatrix} b & Ab & \cdots & A^{n-1}b \end{bmatrix} = n$. Neste caso, $T$ é definida univocamente por (12) onde $\tau$ é a única solução de (11).

O Teorema 1 responde nossa questão original. Se os fatos algébricos básicos relativos à existência de um vetor cíclico para a matriz companheira de $A$ é entendida, então a situação relativa à equivalência entre (5) e (2) se torna transparente. Nossa questão original nos levou a esse ponto. Mas há muito mais envolvido aqui. Pense em variar o termo não homogêneo em (5). E se aplicarmos diferentes funções de entrada $u(t)$? Até onde isso pode afetar as soluções do sistema?

## Referências


[1] Burghes, D.; Graham, A., "Control and Optimal Control Theories with Applications.", Chichester: Horwood, 2004.

[2] Coelho, F. U.; Lourenço M. L., "Um Curso de Álgebra Linear.", São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2001.

[3] Horn, R. A.; Johnson, C. R., "Matrix Analysis.", New York: Cambridge Uneversity Press, 1999.

[4] Lima. E. L., "Álgebra Linear.", Rio de Janeiro: IMPA, 2001.

[5] Nering. E. D., "Linear Algebra and Matriz Theory.", New york: John Wiley, 1970.

[6] Terrell, W. J., Some Fundamental Control Theory I: Controllability, Observability, and Duality, *American Mathematical Monthy*, **106(8)**, 705-719, 1999.