

ESTUDO SOBRE UMA CURVA DE PERSEGUIÇÃO

Alexandre Daniel Vieira¹, Júlio César do Espírito Santo¹

RESUMO

Introdução

Este trabalho trata sobre curvas de perseguição, uma em especial chamada tractrix. Relembraremos conceitos importantes do Cálculo Diferencial e métodos do Cálculo Diferencial e Integral para chegarmos a uma expressão matemática para esta curva, expressão esta que modela uma situação em um determinado problema.

Objetivos

O objetivo deste trabalho é, através da resolução de um problema, demonstrar a importância do Cálculo Diferencial e do Cálculo Integral e da sua utilização em conjunto, através de uma aplicação.

Pretendemos também obter um modelo matemático para o problema em questão.

Metodologia

Foi realizado um estudo sobre curvas de perseguição, e revisto alguns conceitos do cálculo diferencial e cálculo integral. Através deste estudo, tínhamos o objetivo de obter o modelo matemático que descreve o comportamento de um problema do um trajeto de um corpo.

A curva modelada é conhecida por Tractrix.

Buscamos na geometria analítica a expressão do coeficiente angular de uma reta:

$$m_{sec} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

Através desta expressão, que representa a inclinação da reta que passa pelos pontos (x_0, y_0) e (x_1, y_1) do plano, utilizamos o conceito de limite para então chegarmos ao coeficiente angular de uma reta tangente ao gráfico de uma

função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, no ponto (x_0, y_0) , onde $y_0 = f(x_0)$. Neste ponto envolvemos o conceito de derivada de uma função em um ponto.

Com esta ferramenta do cálculo diferencial, passamos então para o estudo da curva num determinado ponto, para chegarmos ao modelo desejado.

Partimos então para a análise da trajetória realizada por uma esfera com certa massa, a partir do ponto (x, a) , sendo arrastada em um plano áspero –o plano– xy – por uma corda de comprimento a (Figura 1) e encontramos o coeficiente angular da reta referente a esta curva dado por:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}$$

com a condição inicial $y(0) = a$

A expressão acima é uma equação diferencial que pode ser resolvida por separação de variáveis seguida de integração.

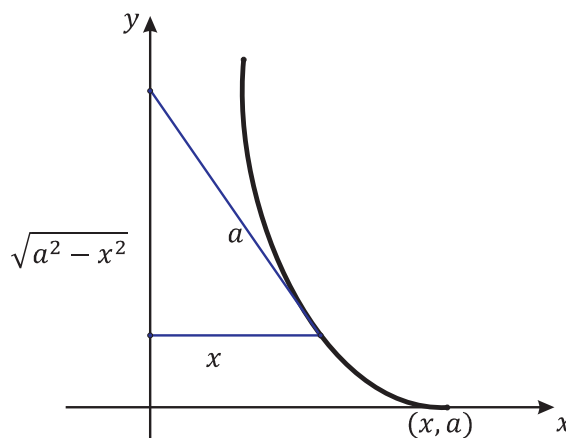


Figura 1: Tractrix.

Utilizando o método de integração por partes, resolvemos então a equação diferencial e chegamos ao modelo matemático para o problema em questão que tem como trajetória a curva acima.

¹Departamento de Matemática, ICEB, UFOP, regina.claudia35@yahoo.com.br, jcesares@iceb.ufop.br

$$y = a \ln \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right) - \sqrt{a^2 - x^2}$$

Referências

- [1] GUIDORIZZI, H. L. “Um curso de cálculo.”, volume 1, LTC, Rio de Janeiro, Quinta Edição.
- [2] SIMMONS, G. F. “Cálculo com geometria analítica.”, volume 1, Pearson.