INVARIANTE GLOBAL DE APLICAÇÕES ESTÁVEIS DE SUPERFÍCIE NO PLANO

Diogo da Silva Machado[1], Catarina Mendes de Jesus[1]

RESUMO

Em 1955, H. Whitney publicou o artigo "Mappings of the plane into the plane" que se tornou o fundamento para uma nova teoria matemática, a Teoria de Singularidades de aplicações diferenciáveis. Whitney mostrou que, para uma classe especial de aplicações do plano no plano (as estáveis) as singularidades que podem aparecer são apenas de dois tipos: dobras ou cúspides. A partir do trabalho de Whitney, diversos matemáticos têm estudado as singularidades de aplicações de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$, como por exemplo, R. Thom [12] que classificou, no caso de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$, as singularidades em sete catástrofes elementares ou Boardman [2] que realizou um estudo sobre as singulares de ordem superiores.

Uma noção de equivalência no espaço das aplicações diferenciáveis é a de mudanças de coordenadas no domínio e na imagem (A-equivalência). Sendo um dos problemas clássicos em Teoria de Singularidades a descrição completa das classes de equivalência dessa relação. Tal problema tem se mostrado difícil de ser resolvido. Os rumos da pesquisa no sentido de resolvê-lo se resumem, em muitos casos, na busca de invariantes que permitam classificar boa parte das aplicações.

Em [13], Vassiliev desenvolveu uma teoria geral que conduz a obtenção de invariantes de isotopia nos espaços de aplicações estáveis entre variedades. Seu método pode ser aplicado a vários tipos de aplicações e a definição dos invariantes correspondentes está baseada, em cada caso, no estudo da topologia de um subconjunto discriminante determinado pelo subespaço das aplicações não estáveis.

Em [1], por exemplo, Arnold definiu três invariantes básicos de primeira ordem para aplicações estáveis do círculo no plano. Por outro lado, Goryunov [4], estudando aplicações estáveis de superfícies no $\mathbb{R}^3$, obteve todos invariantes locais de primeira ordem para tais aplicações. Mais recentemente, T. Ohmoto [9], determinou um conjunto completo de geradores para o anel dos invariantes semi-locais de primeira ordem do tipo Vassiliev.

No estudo de aplicações estáveis de superfície fechadas no plano, T. Ohmoto e F. Aicardi [10], usando a técnica de Vassiliev, apresentaram alguns invariantes numéricos, do ponto de vista local, para o conjunto de ramificação dessas aplicações. No entanto (ver [8]), existem casos em que estes invariantes não são suficientes para distinguir as aplicações, ou seja, existem aplicações em classes de A-equivalência distintas, mas, com mesmo valor para esses invariantes. Isto acontece quando as aplicações em questão apresentam conjuntos de ramificação "parecidos". Tal fato tem motivado a busca de novos invariantes (globais) que dependam da topologia do conjunto singular sobre a superfície de domínio da aplicação.

Um invariante com tal propriedade foi introduzido por Hacon, Mendes e Romero [5] (no caso de superfícies orientadas), a saber, o grafo associado à aplicação estável. Neste caso, o grafo carrega consigo diversas informações sobre a aplicação. Além de caracterizar totalmente a superfície de domínio, fornecendo o seu gênero, o grafo associado nos informa o tipo topológico do complemento do conjunto singular da aplicação bem como o número de componentes conexa do conjunto singular.

Com relação à técnica de associar grafos a aplicações estáveis, uma pergunta pertinente é: "Quais grafos podem ser vistos como grafos de aplicações estáveis?". Em [7], Hacon, Mendes e Romero, deram uma resposta satisfatória a esta pergunta (no caso de superfícies

[1]Universidade Federal de Viçosa - Departamento de Matemática,
dxmachado@gmail.com, cmendes@ufv.br

orientadas), caracterizando completamente todos os grafos realizáveis por tais aplicações. Em [6], estes mesmos autores trataram da questão de realização de grafos para uma classe de aplicações estáveis da esfera, as aplicações dobra (aplicações sem cúspides), caracterizando também os grafos dessas aplicações.

Em [1], Quine estabeleceu uma fórmula que relaciona o grau da aplicação estável entre superfícies compactas, com o número de cúspides e a característica de Euler das superfícies. Utilizando algumas das transições de codimensão 1, apresentadas por E. Chíncaro [3] e T. Ohmoto [9] vamos apresentar uma demonstração da fórmula de Quine, no caso das aplicações estáveis de superfícies fechadas (e orientadas) no plano. Com esta fórmula, pode-se obter uma relação entre os sinais das cúspides de uma aplicação e o grafo associado. Tal relação, como veremos, determina uma caracterização dos grafos realizáveis por aplicações dobra.

Referências

[1] ARNOLD, V. I., Topological Invariants of Plane Curves and Caustic, *University Lecture Series,* **5**, AMS, Providence, RI, 1994.

[2] BOARDMAN, J. M., Singularities of differentiable maps, *Publ. Math. I.H.E.S.*, **33**, 21-57, 1967.

[3] CHÍNCARO, E. A., "Bifurcations of Whitney Maps", Tese de Doutorado, IMPA, 1978.

[4] GORYUNOV, V., Local Invariants of Mappings of Surfaces into Three-space, 1994, (preprint).

[5] HACON, D.; JESUS, C. M.; FUSTER, M.C.R., Topological invariants of stable maps from a surface to the plane from a global viewpoint.*Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*, **32**, Marcel and Dekker, 227-235, 2003.

[6] HACON, D.; JESUS, C. M.; FUSTER, M.C.R., Fold maps from the sphere to the plane.*Experimental Maths*, **15**, 491-497, 2006.

[7] HACON, D.; JESUS, C. M.; FUSTER, M.C.R., Stable maps from surfaces to the plane with prescribed branching data.*Topology and Its Appl.*, **154**, 166-175, 2007.

[8] MACHADO, D. S., "Invariante Global de Aplicações Estáveis de Superfície Fechada no Plano", Dissertação de Mestrado, DMA-UFV, 2010.

[9] OHMOTO, T., Vassiliev Type Invariants of Order one of Generic Mappings from a Surfaces to the Plane.*Topology of Real Singularities and Related Topics, Kyoto*, 55-68, 1997.

[10] OHMOTO, T.; AICARDI, F., First Order Local Invariants of Apparent Contours.*Topology*, **45** 27-45, 2006.

[11] QUINE, J.R., A Global Theorem for Singularities of Maps Between Oriented 2-Manifolds, *Transactions of the American Mathematical Society*, **236**, 307-314, 1978.

[12] THOM, R., "Structural Stability and Morphogenesis.", Benjamin- Addison Wesley, New York, 1975.

[13] VASSILIEV, V. A., Complements of discriminants of smooth maps: topology and applications, AMS, Providence, RI, 1992.