DEFINIÇÃO UNIFICADA DAS CÔNICAS E CLASSES DE EQUIVALÊNCIA

Juracélio Ferreira Lopes[1]

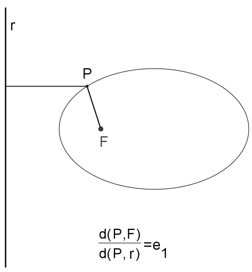
RESUMO

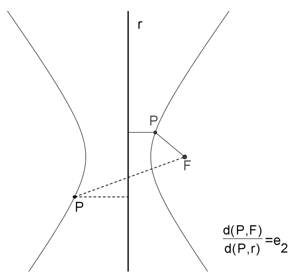
Introdução

Dados uma reta e um ponto não pertencente a mesma, pode-se apresentar uma definição unificada das cônicas (elipse, hipérbole e parábola). Esta definição possibilita uma discussão mais concisa sobre o conceito de excentricidade e a relação deste conceito com as formas geométricas destas curvas no plano. Com isso, pode-se definir família de cônicas, cônicas equivalentes e apresentar um estudo sobre classes de equivalência no conjunto das cônicas no plano.

Definição unificada das cônicas

Uma alternativa de definição geral das cônicas pode ser dada a partir de um foco F e a reta diretriz r como ilustra a figura a seguir,





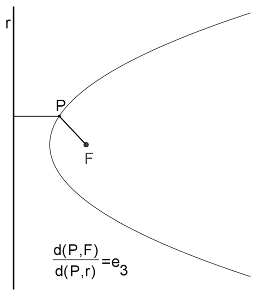


Figura 1: Cônicas definidas por foco-diretriz.

onde, d é distância euclidiana e e_1, e_2 e e_3 distintos dois a dois são as excentricidades da elipse, hipérbole e parabóla, respectivamente.

A partir desta definição pode-se obter a expressão geral para as cônicas dado por

$$(1-e^2)x^2 - 4px + y^2 + 4p^2 = 0$$

que representa uma família de cônicas tal que se $e = 1$, a cônica é uma parábola; $0 < e < 1$ é uma elipse e $e > 1$ é uma hipérbole conforme ilustra a figura a seguir.

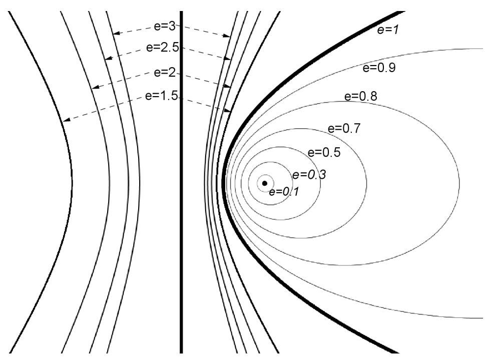


Figura 2: Famílias de cônicas.

Classes de equivalência

Considerando a e b cônicas pertencentes ao conjunto $\mathcal{C}$ de todas as cônicas no plano, diz-se que a se relaciona com b pela relação R se a excentricidade de a for igual a excentricidade

[1]Coordenação da Área de Matemática - CODAMAT, IFMG-Ouro Preto,
juracelio.lopes@ifmg.edu.br

de b. Esta relação, denotada por aRb é uma relação de equivalência. Duas cônicas equivalentes possuem a mesma forma geométrica, embora possam ser distintas sob o ponto de vista analítico. Veja o exemplo:

Sejam $\mathcal{E}_1$ e $\mathcal{E}_2$ elipses com equações canônicas

$$\mathcal{E}_1 : \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \text{ e } \mathcal{E}_2 : \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1,$$

com excentricidades $e_{\mathcal{E}_1} = e_{\mathcal{E}_2} = 0,6$, então

$$\mathcal{E}_1 \equiv \mathcal{E}_2(R)$$

o que significa que $\mathcal{E}_1$ é equivalente a $\mathcal{E}_2$ módulo R, conforme ilustra a figura abaixo.

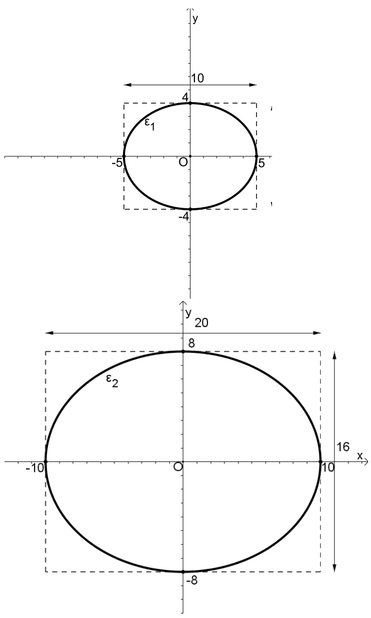


Figura 3: Elipses equivalentes.

Uma classe de equivalência no conjunto $\mathcal{C}$ das cônicas é um subconjunto formado por todas as cônicas que possuem a mesma excentricidade. Desta forma as classes pertencentes ao conjunto $\mathcal{C}$ podem ser agrupadas em três grandes subconjuntos:

i) O conjunto de todas as classes de cônicas com excentricidade e tal que $0 < e < 1$. Os elementos destas classes são elipses.

ii) O conjunto de todas as classes de cônicas com excentricidade $e > 1$. Os elementos destas classes são hipérboles.

iii) O conjunto formado por apenas uma classe representada pela excentricidade $e = 1$. Nesta classe encontram-se todas as parábolas.

Conclui-se que cada uma destas classes é composta por cônicas que podem possuir expressões analíticas diferentes mas terão mesma forma do ponto de vista geométrico. Isto significa que todos os elementos de $\mathcal{C}$ pertencentes a uma mesma classe possuem representações geométricas que se sobrepõem quando rotacionadas, ampliadas ou reduzidas adequadamente.

Referências

[1] Boulos, P., "Geometria Analítica", Terceira Edição, São Paulo: Prentice Hall, 2005.

[2] Domingues, H. H., "Álgebra Moderna", Segunda Edição, São Paulo: Atual, 1982.

[3] Lopes, J. F., "Cônicas e Aplicações", Dissertação de Mestrado, IGCE-Unesp, 2010.