MÓDULOS INDECOMPONÍVEIS DE UMA ÁLGEBRA BISSERIAL ESPECIAL

Ana Paula da Silva Cota[1]

RESUMO

Introdução

Este trabalho é referente a uma parte de uma dissertação de Mestrado ainda em andamento. Um dos interesses da Teoria de Representações de Álgebras é estudar as possíveis representações de uma K-álgebra A na álgebra de matrizes. Este estudo é equivalente ao estudo de sua categoria de A-módulos. O Teorema de Krull-Schmidt[1] nos garante que para conhecermos os A-módulos, basta conhecermos os indecomponíveis. Com base nisso, estaremos interessados em descrever os A-módulos indecomponíveis de uma álgebra bisserial especial. Além disso, mostraremos que a partir dessa descrição podemos obter os módulos indecomponíveis da álgebra do grupo de Klein.

Seja K um corpo algebricamente fechado. Uma K-álgebra A é um anel $(A, +, \cdot)$ com unidade que possui uma estrutura de K-espaço vetorial compatível com a multiplicação do anel. Como exemplos de K-álgebras podemos citar a álgebra $K[x]$ de polinômios e a das matrizes quadradas $n \times n$ com elementos em K. Nem sempre os elementos e/ou operações de uma álgebra são fáceis de manipular. Neste sentido, um dos principais objetivos da Teoria de Representações de Álgebras é estudar as possíveis representações de uma K-álgebra na álgebra de matrizes, ou seja, escrever seus elementos e suas operações como matrizes. Formalmente uma representação de uma K-álgebra A é um homomorfismo de álgebras $\varphi : A \to \mathrm{End}(V)$ na álgebra de endomorfismos de um K-espaço vetorial V. Uma tal representação é equivalente a associar, para cada elemento $a \in A$, uma ação de V em V. Dessa forma, o estudo das representações de uma álgebra é equivalente ao estudo de sua categoria de A-módulos.

Um conhecido Teorema de Krull-Schmidt[1] assegura que todo A-módulo pode ser escrito de maneira única, a menos de ordem e de isomorfismos, como soma direta de módulos que não se decompõe desta forma, chamados módulos indecomponíveis. Desta forma, a categoria de A-módulos de uma álgebra é conhecida pela descrição dos módulos indecomponíveis e dos morfismos entre estes. Uma boa apresentação é feita por um grafo orientado, chamado quiver de Auslander-Reiten, cujos vértices representam as classes de módulos indecomponíveis e as setas representam bases do espaço de morfismos irredutíveis (que só se decompõe trivialmente) entre estes módulos. Não é fácil encontrar este quiver para álgebras em geral. Sua descrição para certas classes de álgebras é assunto de pesquisas nos dias atuais.

Álgebras de grupo são exemplos bastante importantes de álgebras. Além de sua importância intrínseca elas possuem importantes aplicações, tanto em outras áreas da matemática como em problemas práticos como, por exemplo, na teoria de códigos.

Seja G um grupo finito e seja K um corpo algebricamente fechado. Considere o espaço vetorial sobre K com base G, isto é, o conjunto $KG = \left\{\sum_{g\in G} \lambda_g g : \lambda_g \in K, \text{ para todo } g \in G\right\}$. Definindo neste espaço o produto $\alpha \cdot \beta = \sum_{g,h\in G} \lambda_g \mu_h gh$, obtemos uma K-álgebra chamada álgebra do grupo G. As álgebras de grupo são exemplos importantes de álgebras, devido às suas aplicações. Um importante teorema, devido a Maschke[1] assegura que esta álgebra é semissimples se, e somente se, a característica do corpo K é zero ou um primo $p > 0$ tal que p não divide a ordem de G. Neste caso todos os seus A-módulos são soma direta de módulos simples que, portanto, são os módulos indecomponíveis. Álgebras se-

[1]Departamento de Matemática, CCE, UFV, ana3004@gmail.com

missimples são estudadas pela Teoria Clássica de Representações de grupos usando técnicas tais como tabela de caracteres do grupo. Em contrapartida, para os casos não semisimples, onde ocorrem módulos indecomponíveis que não são simples, essa teoria torna-se insuficiente. Portanto, outros métodos devem ser utilizados, os quais constituem a chamada Teoria de Representações Modulares. Nesta comunicação veremos como algumas técnicas de representações de quivers se aplicam neste contexto e descreveremos as representações indecomponíveis da álgebra do grupo de Klein sobre corpos de característica 2.

Objetivos

Esta comunicação tem como objetivo aplicar a teoria de representações de quivers para descrever os módulos indecomponíveis de uma álgebra bisserial especial e utilizar essa descrição para a álgebra do grupo de Klein sobre um corpo de característica 2.

Metodologia

Apresentação via slides.

Referências

[1] Assem, I., Simson, D., Skowronski, A., *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras.* London Math. Soc. Student Texts **65**, Cambrigde Univesity Press, Cambrigde, 2006.

[2] Butler, M. C. R., Ringel, C. M., *Auslander-Reiten sequences with few middle terms and appications to string algebras.* Comm. Algebra **15 (1-2)**, 145-179, 1987.

[3] Benson, D. J., *Representations and cohomology.* Cambrigde Univesity Press, Cambrigde, 1995.