OPERADOR P-LAPLACIANO UNIDIMENSIONAL: UMA SEQUÊNCIA QUE CONVERGÊNCIA PARA O PRIMEIRO PAR (AUTOVALOR, AUTOFUNÇÃO)

Marcelo Aparecido Cabral Nogueira[1], Eder Marinho Martins[1], Wenderson Marques Ferreira[1]

RESUMO

Introdução

O presente trabalho apresenta um método que permite obter o primeiro autovalor e a primeira autofunção positiva (normalizada pela norma do sup) para o operador p-Laplaciano unidimensional.

O problema de autovalor unidimensional de Dirichlet para o $p-Laplaciano$ é dado por:

$$\begin{cases} -\psi_p\left(u'\right)' = \lambda\psi_p\left(u\right) & \text{se } a < x < b, \\ u\left(a\right) = u\left(b\right) = 0, \end{cases}$$

em que $\psi_p\left(t\right) = t\left|t\right|^{p-2}$ e $1 < p < \infty$. (1)

Como o operador envolvido não é linear, entende-se o problema acima como sendo de autovalor no sentido que se o par (λ, u) verifica (1), o mesmo ocorre com $(\lambda, \alpha u)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

A existência de uma sequência de autovalores e autofunções para o problema (1) é garantida em [19]. O primeiro autovalor, denotado por λ_1, é isolado, simples e possui a seguinte caracterização variacional:

$$\lambda_1 = \left\{ \inf \frac{\int_a^b |u'(x)|^p dx}{\int_a^b |u(x)|^p dx}, \text{ em que } u \in W_0^{1,p}\left([a,b]\right), u \not\equiv 0 \right\}$$

O espectro deste problema de autovalor é conhecido na literatura, é discreto e todos os seus autovalores, λ_k, são simples e dados por (veja [18]).

$$\lambda_k = k^p\lambda_1.$$

Neste problema unidimensional, λ_1, o primeiro autovalor de (1), é conhecido e dado por

$$\lambda_1 = (p-1)\left(\frac{2}{b-a}\int_0^1 \frac{ds}{\sqrt[p]{1-s^p}}\right)^p = \left(\frac{\pi_p}{b-a}\right)^p, \quad (2)$$

em que

$$\pi_p := 2\sqrt[p]{p-1}\int_0^1 \frac{ds}{\sqrt[p]{1-s^p}}. \quad (3)$$

Observe que $\pi_2 = \pi$.

É conhecido na literatura (veja [19]) que se u é uma primeira autofunção de (1) então u se anula somente em $x = a$ e em $x = b$. Deste modo, podemos tomar $u > 0$ em (a, b).

Objetivos

No presente trabalho apresentamos uma sequência de funções (ϕ_n) com as seguintes propriedades:

1. $\dfrac{\|\phi_n\|_\infty}{\|\phi_{n+1}\|_\infty} \to \lambda_1$;
2. $\dfrac{\phi_n}{\|\phi_n\|_\infty} \to u$ uniformemente, em que u é a primeira autofunção positiva de (1) tal que $\|u\|_\infty = 1$.

em que $\|f\|_\infty := \sup_{a\leq x\leq b}|f(x)|$ é a norma do sup da função f.

A sequência ϕ_n é definida de forma recursiva como sendo a solução de equação diferencial específica.

Metodologia

Para demonstrar os fatos citados acima utilizamos fortemente as propriedades da função ψ_p, uma regra de L'Hôpital para a monotonicidade (veja [17]) e o Teorema de Arzelá-Ascoli (veja [11] ou [5]). Além disso, as principais bibliografias deste trabalho são [12], [13] e [14].

Conclusões

O método apresentado permite obter o primeiro par autovalor-autofunção do p-laplaciano unidimensional. Observamos que o método que

[1]Departamento de Matemática, UFOP, marcelonogueira19@gmail.com, eder@iceb.ufop.br, wmf@iceb.ufop.br

apresentamos aqui também vale para o caso do $p-$Laplaciano radial (para maiores detalhes veja [13] ou [12]). Uma possível continuação deste trabalho seria implementar numericamente as integrais envolvidas e obter (numericamente) o primeiro autovalor e a respectiva autofunção para diversos valores de L.

Referências

[1] Assem, I., Simson, D., Skowronski, A., *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras.* London Math. Soc. Student Texts **65**, Cambrigde Univesity Press, Cambrigde, 2006.

[2] Butler, M. C. R., Ringel, C. M., *Auslander-Reiten sequences with few middle terms and appications to string algebras.* Comm. Algebra **15 (1-2)**, 145-179, 1987.

[3] Benson, D. J., *Representations and cohomology.* Cambrigde Univesity Press, Cambrigde, 1995.

[4] Boyce, W. E.; Diprima, R. C., *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno.* Rio de Janeiro: Editora LTC, 5^a Edição, 1994.

[5] Figueiredo, D. G., *Análise I* .L.T.C. Rio de Janeiro, 2^a Edição, 1995.

[6] Figueiredo, D. G., *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais.* Projeto Euclides-IMPA, Rio de Janeiro, 2^a edição, 1977.

[7] Brown, B. M.; Reichel, W., Sturm-Liouville type problems for the p-Laplacian under asymptotic non-resonance conditions, *J. Differential Equations*, **156**, 50-70, 1999.

[8] Hai, D. D.; Shivaji, R., An existence result on positive solutions for a class of p-Laplacian systems, *Nonlinear Analysis*, **56**, 1007-1010, 2004.

[9] Hai, D. D.; Wang, H., Nontrivial Solution for p-Laplacian systems, *Mathematical Analysis and Applications*, **330**, 186-194, 2007.

[10] Lieb, E. H.; Loss, M., Analysis, *Graduate Studies in Mathematics: AMS*, 2001.

[11] Lima, E. M., *Curso de Análise.* Volume 1, Rio de Janeiro: Projeto Euclides - IMPA, 2007.

[12] Martins, E. M., *Obtenção do Primeiro Autovalor para o p-Laplaciano via Método das Potências Inverso.* Tese de Doutorado, UFMG, Belo Horizonte, 2009.

[13] Martins, E. M.; Biezuner, R. J.; Ercole, G., Computing the first eigenvalue of the p-Laplacian via the inverse power method, *Journal of Functional Analysis*, **160**, 243-270, 2009.

[14] Martins, E. M.; Biezuner, R. J.; Ercole, G., Computing the sin_p function via the inverse power method, *(manuscript).*

[15] García Azorero, J. P.; Peral Alonso, I., Existence and nonuniqueness for the p-Laplacian: nonlinear eigenvalues, *Commun. in Partial Differential Equation*, **12**, 1389-1430, 1987.

[16] Bueno, H.; Ercole, G.; Zumpano, A., Positive solutions for the $p-$Laplacian and bounds for its first eigenvalue, *Advanced Nonlinear Studies*, **9**, 313-338, 2009.

[17] Pinelis, I., L'Hospital type rules for Monotonicity, with Applications, *Journal of Inequalites in Pure and Applied Mathematics*, **2**, 269-290, 1995.

[18] Guedda, M.; Veron, L., Bifurcation phenomena associated to the p-Laplace operator, *Transactions of the American Mathematical Society*, **1**, 419-431, 1998.

[19] Ôtani, M., A remark on certain nonlinear elliptic equations, *Proceedings of the Faculty of Science, Tokay University*, **19**, 23-28, 1984.

Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio recebido através do projeto de iniciação científica PIBIC apoiado pelo CNPq.