TEOREMA DO PONTO FIXO DE BANACH E UMA DE SUAS APLICAÇÕES

Gabriel dos Anjos Pimentel[1], **Lucas Martins Rocha**[1], **Vinícius V. P. de Almeida**[1]

RESUMO

Introdução

Considere (M, d) um espaço métrico completo, $X \subset M$ um subconjunto fechado não vazio e $f : X \to X$ uma aplicação contínua. Muitas vezes estamos interessados em encontrar um ponto de X que é levado por esta aplicação nele mesmo; ou seja, um ponto $x \in X$ tal que $f(x) = x$. Um ponto que satisfaz esta equação é chamado ponto fixo de f. Uma vez que sabemos da existência de um ponto fixo para f, gostaríamos de saber quantos existem ou, pelo menos, quais condições podem garantir que haja apenas um ponto fixo. Nesta direção, o Teorema do Ponto fixo de Banach afirma que, nas hipóteses anteriores, se f é uma contração, ou seja, se existe uma constante $0 \le c < 1$, tal que

$$d(f(a), f(b)) \le cd(a, b)$$

para todos $a, b \in X$; então f possui um, e somente um, ponto fixo em X. O Teorema do Ponto Fixo de Banach é um resultado muito importante em vários campos da Matemática como: Análise, Equações Diferenciais e Equações Integrais. Esse teorema é usado para provar vários resultados, entre eles o Teorema de Existência e Unicidade de Soluções de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs), que também é apresentado neste trabalho.

Objetivos

Uma das principais aplicações do Teorema do Ponto Fixo de Banach dá-se no contexto de espaços de funções, mais precisamente, quando o mesmo é empregado na teoria das equações diferenciais ordinárias. Sendo assim, nosso objetivo, além de fazer uma apresentação da demonstração do Teorema do Ponto Fixo de Banach, queremos utilizá-lo para apresentar uma prova do Teorema de Existência e Unicidade para EDOs.

Metodologia

Para apresentar uma demonstração do Teorema do Ponto Fixo de Banach foi realizado um estudo da bibliografia [1]. Para desenvolver resultados sobre existência e unicidade de problema de valor inicial e ilustrar com alguns exemplos, utilizamos a bibliografia [2]. Foi utilizado também as bibliografias [3, 4] para esclarecer dúvidas referentes ao conteúdo básico.

Conclusões

O Teorema do Ponto Fixo de Banach é uma valiosa ferramenta na resolução de problemas de existência e unicidade, devido ao fato de trazer um método iterativo para a resolução de tais problemas e também pela grande generalidade do seu enunciado, uma vez que trata de conjuntos de natureza arbitrária.

Referências

[1] Kreyszig, E., Introductory Functional Analysis with Applications. New York: John Wiley & Sons, 1978.

[2] Figueiredo, D. G.; Neves, A., Equações Diferenciais Aplicadas. Rio de Janeiro:Coleção Matemática Aplicada. IMPA, 2005.

[3] Lima, E. L., Espaços Métricos, 13^a Ed. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, 2003.

[4] Domingues, H. H., Espaços Métricos e Introdução à Topologia. São Paulo:Atual, 1982.

[1]Departamento de Matemática, UFOP,
gabriel.banze@yahoo.com.br,lucasmartinsrocha@gmail.com,
vvpamat@yahoo.com.br