Sobre Pombos e Gavetas

Vinícius Barbosa de Paiva vinicius.paiva@ifmg.edu.br
Instituto Federal de Minas Gerais - *Campus* Avançado Piumhi, Piumhi, MG, Brazil

Marcelo Oliveira Veloso veloso@ufsj.edu.br
Universidade Federal de São João del-Rei, Ouro Branco, MG, Brazil

Resumo

Neste trabalho estudamos o Princípio das Gavetas de Dirichlet, também conhecido como Princípio da Casa dos Pombos. Apresentamos três versões deste princípio e suas aplicações em problemas geométricos e aritméticos. Além disso, apresentamos uma prova da infinitude dos números primos utilizando o Princípio das Gavetas de Dirichlet.

Palavras-chave

Princípio das Gavetas de Dirichlet, Geometria, Matemática Discreta.

1 Introdução

Se todos os pontos do plano forem pintados, cada um com uma dentre 2 cores, seria possível encontrarmos dois pontos cuja distância entre eles é de exatamente 10 cm? O que acontece se distribuirmos 12 bombons para 9 crianças? É possível afirmar que em determinada sala de aula existem alunos que nasceram no mesmo dia da semana? E no mesmo dia do ano?

Neste texto pretende-se abordar questões desta natureza utilizando o Princípio das Gavetas de Dirichlet, também conhecido como Princípio da Casa dos Pombos, que diz:

"Se distribuirmos n objetos em m gavetas com $n > m$, então pelo menos uma gaveta terá mais que um objeto".

Acredita-se que o matemático alemão Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet tenha utilizado este princípio pela primeira vez em 1834, na forma de ocupação de gavetas. O enunciado é de fácil entendimento. Contudo é uma ferramenta de grande utilidade na solução desde problemas elementares a questões mais elaboradas.

A técnica para aplicar o Princípio das Gavetas é identificar "objetos", "gavetas" e a "regra" utilizada para distribuir os objetos nessas gavetas. Ao longo do texto explicitamos, nos diversos exemplos, estas três etapas. Também verificamos que o conjunto dos números primos é infinito, Teorema 4.1, utilizando o Princípio da Casa dos Pombos.

O texto está organizado da seguinte maneira: Na segunda seção relembramos alguns conceitos que serão utilizados nesta discussão. A terceira seção apresenta três versões do Princípio das Gavetas e exemplos de sua aplicação, sempre ressaltando a importância da escolha "ideal" dos objetos e das gavetas. As seções quatro e cinco foram dedicadas aos problemas relacionados a aritmética e geometria, respectivamente.

2 Conceitos Básicos

Nesta seção listamos os principais conceitos utilizados ao longo do texto. As principais referêcias desta seção são [1] e [3] onde o leitor encontrará as respectivas demostrações.

Dados dois números inteiros a e b, com $a \neq 0$, dizemos que a **divide** b ($a \mid b$) se existir um inteiro c tal que $b = ac$. Se a não divide b, escrevemos $a \nmid b$. É usual dizer que a é um **divisor** de b, ou b é **divisível** por a, ou ainda b é um **múltiplo** de a quando $a \mid b$.

Um número inteiro n é chamado de **primo** se $n > 1$ e se possui apenas dois divisores positivos n e 1. Se $n > 1$ não é primo dizemos que n é **composto**.

Vejamos algumas propriedades da divisão dos inteiros:

Teorema 2.1. *Sejam a, d, m e n números inteiros. Então:*

1. $1 \mid a$, $a \mid a$ *e* $a \mid 0$;
2. $d \mid n \Rightarrow ad \mid an$;
3. $ad \mid an$ *e* $a \neq 0 \Rightarrow d \mid n$;
4. $d \mid n \Rightarrow d \mid nm$;
5. $a \mid b \;\; e \;\; b \mid c \;\Rightarrow a \mid c$.

Demonstração. Veja $(1$ e $5)$ no livro [3]: unidade 1 - página 3 e (2) no livro [1] - página 3. □

Teorema 2.2 (Algoritmo da Divisão)**.** *Sejam a e b números inteiros com $b > 0$. Então existem dois, únicos, números inteiros q e r tais que:*

$$a = b \cdot q + r, \text{ com } 0 \leq r < b$$

Demonstração. Veja a demonstração do algoritmo no livro [1] página 5. □

Dado dois inteiros a, b não simultaneamente nulos. Um inteiro $d > 0$ é dito **o máximo divisor comum** de a e b se, e somente se

i) $d|a$ e $d|b$,

ii) c inteiro tal que $c|a$ e $c|b$ implica que $c|d$.

O inteiro d é denotado por $mdc(a,\, b)$.

Observe que o segundo item garante a unicidade do $mdc(a, b)$. De fato: suponha que $d = mdc(a, b)$ e $d_1 = mdc(a, b)$. Segue do segundo item que $d|d_1$ e $d_1|d$ e assim $d = d_1$.

É usual dizer que a e b são **coprimos**, ou primos entre si, quando $mdc(a, b) = 1$. O próximo resultado elenca algumas propriedades do máximo divisor comum.

Teorema 2.3. *Sejam a e b números inteiros. Então:*

1. $mdc(a, b) = mdc(b, a) = mdc(-a, b) = mdc(a, -b) = mdc(-a, -b)$;
2. $mdc(1, a) = 1$;
3. $mdc(0, a) = |a|$;
4. $mdc(a, a) = |a|$;
5. $a \mid b \;\Leftrightarrow\; mdc(a, b) = |a|$.

Demonstração. Veja a demonstração no livro [3]: unidade 5 - páginas 2 e 3. $\square$

Para provar a existência do máximo divisor comum de dois inteiros não negativos, Euclides utiliza, essencialmente, o resultado abaixo que é conhecido como *Lema de Euclides*.

Lema 2.1 (Lema de Euclides)**.** *Sejam a, b, q e r números inteiros. Se $a = b \cdot q + r$ então*

$$mdc(a,\, b) = mdc(b,\, r).$$

Demonstração. Seja $d = mdc(a,\, b)$ e $d_1 = mdc(b,\, r)$. Como $d = mdc(a,\, b)$ temos que $d|a$ e $d|b$ e então $d|(a - bq)$, ou seja, $d|r$. Portanto $d|d_1$, pois $d_1 = mdc(b,\, r)$. De maneira análoga temos que $d_1|d$. Portanto, $d = d_1$ e temos o resultado. $\square$

Exemplo 2.1. *Dados m e n inteiros positivos e distintos, temos que:*

$$mdc(2^{2^m} + 1, 2^{2^n} + 1) = 1.$$

De fato, suponha que $m > n$ e observe que

$$2^{2^m} - 1 = (2^{2^{m-1}} + 1)(2^{2^{m-2}} + 1) \cdots (2^{2^n} + 1)(2^{2^n} - 1).$$

Assim $2^{2^m} + 1 = (2^{2^n} + 1) \cdot q + 2$ e portanto pelo Lema de Euclides

$$mdc(2^{2^m} + 1, 2^{2^n} + 1) = mdc(2^{2^n} + 1, 2) = 1.$$

$\diamondsuit$

Teorema 2.4. *Sejam a, b e c números inteiros. Se $a \mid b \cdot c$ e $mdc(a, b) = 1$ então $a \mid c$.*

Demonstração. Veja a demonstração do teorema no livro [3]: unidade 6 - página 4. $\square$

Dado um número real x vamos denotar por $\lfloor x \rfloor$ o maior inteiro que é menor ou igual a x, ou seja,

$$\lfloor x \rfloor = max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}.$$

A função $\lfloor\ \rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ é chamada de **maior inteiro** ou **função piso**.

As principais propriedades da função maior inteiro seguem abaixo.

Teorema 2.5. *Sejam x, y números reais e m um número inteiro. Então:*

1. $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$;
2. *se* $x < y$ *então* $\lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$;
3. $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$;
4. *se* $m > 0$ *então* $\left\lfloor \dfrac{\lfloor x \rfloor}{m} \right\rfloor = \left\lfloor \dfrac{x}{m} \right\rfloor$.

Demonstração. Vamos verificar o item 3. Os demais deixamos a cargo do leitor. Sejam $x = n + \alpha$ e $y = p + \beta$ onde n e p são inteiros e $0 \leq \alpha, \beta < 1$. Logo,

$$\begin{aligned} \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor = n + p = \lfloor n + p \rfloor &\leq \lfloor n + \alpha + p + \beta \rfloor \\ &= \lfloor x + y \rfloor \\ &= n + p + \lfloor \alpha + \beta \rfloor \\ &\leq n + p + 1 \\ &= \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1 \end{aligned}$$

$\square$

Dado um número real x vamos denotar por $\lceil x \rceil$ o menor inteiro que é maior ou igual a x, ou seja,

$$\lceil x \rceil = min\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq x\}.$$

A função $\lceil\ \rceil : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ é chamada de **função menor inteiro** ou **função teto**.

Teorema 2.6. *Sejam x, y números reais e m um número inteiro. Então:*

1. $\lceil x \rceil - 1 < x \leq \lceil x \rceil$;
2. *se* $x < y$ *então* $\lceil x \rceil \leq \lceil y \rceil$;
3. $\lceil x \rceil + \lceil y \rceil - 1 \leq \lceil x + y \rceil \leq \lceil x \rceil + \lceil y \rceil$;
4. *se* $m > 0$ *então* $\left\lceil \dfrac{\lceil x \rceil}{m} \right\rceil = \left\lceil \dfrac{x}{m} \right\rceil$.

Demonstração. Vamos verificar o item 4. Os demais ficam a cargo do leitor. Seja $x = n - \alpha$, onde n é inteiro e $0 \leq \alpha < 1$. Sabemos, do algoritmo da divisão, que existem q e r tais que $n = m.q + r, \ \ 0 \leq r < m$. Portanto,

$$\left\lceil \frac{x}{m} \right\rceil = \left\lceil \frac{q.m + r - \alpha}{m} \right\rceil = \left\lceil q + \frac{r - \alpha}{m} \right\rceil = q$$

pois $0 \leq r - \alpha < m$, uma vez que $0 \leq \alpha < 1$ e $0 \leq r < m$. Mas,

$$\left\lceil \frac{\lceil x \rceil}{m} \right\rceil = \left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil = \left\lceil \frac{q.m + r}{m} \right\rceil = \left\lceil q + \frac{r}{m} \right\rceil = q$$

verificando o resultado. $\square$

3 Princípio de Dirichlet e Generalizações

Nesta seção vamos apresentar três versões do Princípio de Dirichlet, ou Princípio da casa dos Pombos, e vários exemplos de suas aplicações.

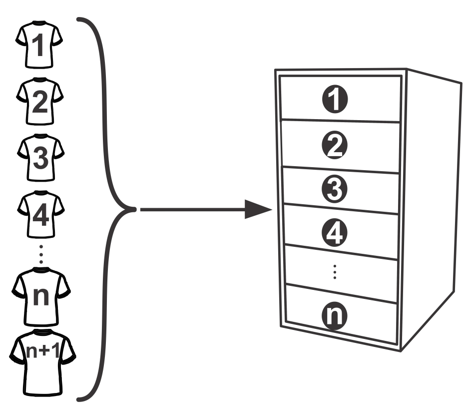

Figura 1: Cômoda.

Princípio das Gavetas 3.1. *Se colocamos $n+1$ objetos em n gavetas, então haverá pelo menos uma gaveta com dois ou mais objetos.*

Demonstração. Se ao distribuímos $n+1$ objetos em n gavetas e cada uma delas contiver, no máximo, um objeto, o número total de objetos assim distribuídos será no máximo n, o que é uma contradição. □

Note que $n+1$ é o número mínimo de objetos que satisfaz o Princípio das Gavetas 3.1, e, claramente, o resultado é válido para todo inteiro $l \geq n+1$. Veremos que o Princípio das Gavetas de Dirichlet nos auxiliará na resolução de exercícios de Combinatória, Teoria dos Números e Geometria, dentre outros.

Vejamos, nos exemplos abaixo, como aplicar o Princípio das Gavetas 3.1.

Exemplo 3.1. *Em um conjunto de 8 pessoas podemos afirmar que: pelo menos duas nasceram no mesmo dia da semana.*

Identificando as gavetas e os objetos.

- *Objetos: As oito pessoas;*
- *Gavetas: Os sete dias da semana;*
- *Regra: Cada pessoa está associada ao dia da semana que nasceu.*

Temos 8 objetos (pessoas) para serem distribuídos em 7 gavetas (dias da semana). Pelo Princípio das Gavetas 3.1*, temos que, pelo menos uma gaveta irá conter ao menos dois objetos, ou seja, no mínimo 2 pessoas nasceram no mesmo dia da semana.* ♢

Exemplo 3.2. *Marcam-se cinco pontos (A, B, C, D, E) sobre um quadrado de lado 2. Mostre que, pelo menos, 2 destes pontos estão a uma distância menor ou igual a $\sqrt{2}$.*

Nosso desafio em cada exercício é determinar quem são as gavetas e quem são os objetos. Se a escolha não for bem sucedida acarretará em complicações. Por exemplo, se escolhermos as gavetas como sendo os quatro triângulos da figura 2.

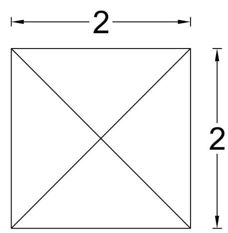

Figura 2: Quadrado.

Aplicando o Princípio das Gavetas 3.1 *temos que ao menos uma gaveta conterá 2 pontos, como mostra figura 3.*

Nesse caso, podemos obter uma distância entre os pontos A e B maior que $\sqrt{2}$. Logo, a escolha das gavetas não foi adequado para o nosso problema.

Mas, se dividirmos o quadrado original em 4 quadrados de lado 1, figura 4.

Vamos obter

- *Objetos: Os cinco pontos (A, B, C, D, E);*
- *Gavetas: Os quatro quadrados de lado 1;*

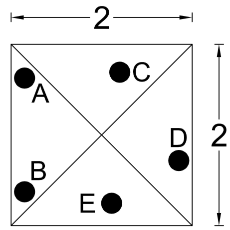

Figura 3: Possíveis gavetas.

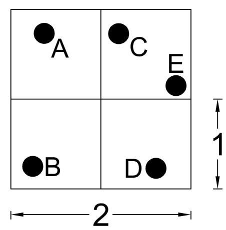

Figura 4: Objetos nas gavetas.

- *Regra: Cada ponto está associado a um quadrado (Caso um ponto esteja na fronteira entre dois ou mais quadrados, "ele pode escolher"a qual deles quer pertencer).*

Pelo Princípio das Gavetas 3.1*, ao distribuirmos os 5 pontos* (A, B, C, D, E) *dentro dos 4 quadrados de lado 1, teremos pelo menos dois pontos dentro de um mesmo quadrado.*

Sabemos que a maior distância entre dois pontos contidos no interior de um quadrado é igual a sua diagonal ($l\sqrt{2}$)*. Portanto, como os quadrados possuem lado 1, temos que o maior comprimento entre estes dois pontos será* $\sqrt{2}$*.* ♢

Exemplo 3.3. *Em um ano, não bissexto, em qualquer conjunto com 366 pessoas existem pelo menos duas que nasceram no mesmo dia.*

- *Objetos: As pessoas;*
- *Gavetas: Os dias do ano (365 dias, nesse caso);*
- *Regra: Cada pessoa está associada ao dia do seu nascimento.*

Temos 366 objetos (pessoas) para serem distribuídos em 365 gavetas (dias do ano). Pelo Princípio das Gavetas 3.1*, temos que, pelo menos uma das gavetas irá conter pelo menos dois objetos, ou seja, pelo menos 2 pessoas vão nascer no mesmo dia do ano.* ♢

O Princípio das Gavetas 3.1 garante que em qualquer grupo de 366 pessoas, em um ano não bissexto, pelo menos duas nasceram no mesmo dia do ano. Um fato curioso é que em um grupo de apenas 23 pessoas existe a chance de pelo menos duas nascerem no mesmo dia do ano, e esta, é maior que 50%. Ou seja, no referido grupo, é mais provável ter duas pessoas com o mesmo aniversário do que todas aniversariarem em dias diferentes. Indicamos a leitura do texto *O paradoxo gêmeo e o velho e bom logaritmo* na seção 2.5 do livro [5] - página 36.

Exemplo 3.4. *Vejamos que em um grupo de* n *pessoas há sempre duas que conhecem exatamente o mesmo número de pessoas nesse grupo.(Conhecer é uma relação simétrica, ou seja, se* a *conhece* b*,* b *conhece* a*.)*

Dentro desse grupo de n pessoas, qualquer uma delas pode conhecer no mínimo 0 (quando não se conhece ninguém - "penetra") e no máximo $(n-1)$ pessoas (quando se conhece todo mundo).

- *Objetos: As pessoas;*
- *Gavetas: Número de pessoas que cada indivíduo pode conhecer (de 0 a $(n-1)$, nesse caso);*
- *Regra: Cada pessoa está associada ao número de pessoas que ela conhece.*

Identifique cada gaveta pelo número de pessoas que cada indivíduo pode conhecer. Note que uma das gavetas 0 e $(n-1)$ permanecerá desocupada, pois estas possibilidades não podem ocorrer simultaneamente. Portanto, temos n objetos para serem distribuídas em $(n-1)$ gavetas. Segue do Princípio das Gavetas 3.1 que pelo menos uma gaveta contém pelo menos dois objetos. Ou seja, existem pelo menos duas pessoas que conhecem o mesmo número de pessoas. $\diamondsuit$

O próximo exemplo estava proposto na seção de exercícios do livro [2] página 159.

Exemplo 3.5. *Um certo livreiro vende pelo menos um livro por dia. Sabendo que o livreiro vendeu 463 livros durante 305 dias consecutivos, mostre que em algum período de dias consecutivos o livreiro vendeu exatamente 144 livros.*
Seja S_K o total de livros vendidos até o K-ésimo dia inclusive. Sabemos que o livreiro vende pelo menos um livro por dia e que durante 305 dias vendeu um total de 463 livros. Logo:

$$1 \leq S_1 < S_2 < S_3 < \ldots < S_{305} = 463$$

O número de livros vendidos do dia q ao dia p (inclusive) é $S_p - S_{q-1}$. Nossa intenção é mostrar que existem termos na sequência S_n cuja diferença é 144. Com esse intuito definimos a seguinte sequência

$$T_k = S_k + 144, \text{ onde } k = 1, \ldots 305$$

Note que

$$145 \leq T_1 < T_2 < T_3 < \ldots < T_{305} = 607.$$

Agora estamos em condições de definirmos nossas gavetas e objetos:

- *Objetos: $S_1, S_2, S_3, S_{305}, T_1, T_2, \ldots, T_{305}$;*
- *Gavetas: Os 607 números inteiros de 1 a 607;*
- *Regra: Cada número S_k ou T_k, $k = 1, \ldots, 305$, está associada ao seu valor inteiro.*

Temos 610 objetos (termos) para serem distribuídos em 607 gavetas. Pelo Princípio das Gavetas 3.1 pelo menos uma gaveta irá conter pelo menos dois objetos, ou seja, pelo menos 2 termos desse grupo são iguais. Estes números não podem pertencer à sequência S_k, pois esta é estritamente crescente, o mesmo vale para à sequência T_k. Portanto, existem S_p e T_q tais que $S_p = T_q$, ou seja: $S_p = S_q + 144$. Assim $S_p - S_q = 144$. Portanto, entre os dias e $q+1$ e p, inclusive, foram vendidos 144 livros. $\diamondsuit$

Princípio das Gavetas 3.2. *Se colocamos $n \cdot k + 1$ objetos em n gavetas, então haverá pelo menos uma gaveta com $k+1$ ou mais objetos.*

Demonstração. Se cada gaveta conter no máximo k objetos, então teremos $n.k$ objetos distribuídos. Como temos $n \cdot k + 1$ objetos, então pelo menos uma gaveta conterá pelo menos $k+1$ objetos. $\square$

Abaixo, segue alguns exemplos e sua aplicação.

Exemplo 3.6. *Mostre que ao distribuirmos 49 presentes a um grupo de 12 crianças, pelo menos uma delas irá receber ao menos 5 presentes.*

- *Objetos: Os presentes;*
- *Gavetas: As crianças;*
- *Regra: Cada criança está associada a seu presente.*

Pelo Princípio das Gavetas 3.2*, que se n gavetas são ocupadas por $n \cdot k + 1$ objetos então pelo menos uma gaveta deverá conter pelo menos $k+1$ objetos. Como temos 49 objetos (preentes) e $n = 12$ gavetas, podemos escrever:*

$$\begin{aligned} n \cdot k + 1 &= 49 \\ 12 \cdot k + 1 &= 49 \\ 12 \cdot k &= 48 \\ k &= 4 \end{aligned}$$

Pelo menos uma gaveta, ou seja, pelo menos uma criança receberá $k + 1$ presentes.
Portanto, como $k = 4$, temos que $k + 1 = 5$ presentes. ♢

Exemplo 3.7. *Um estojo contém 5 canetas vermelhas, 8 canetas azuis, 7 canetas pretas e 4 canetas verdes. Qual o menor número de canetas que devemos retirar para que possamos garantir que retiramos 4 de uma mesma cor?*

- *Objetos: As canetas;*
- *Gavetas: As cores (Vermelha, Azul, Preta e Verde);*
- *Regra: Cada caneta está associada a sua cor.*

Sabemos, pelo Princípio das Gavetas 3.2*, que se n gavetas são ocupadas por $n \cdot k + 1$ objetos então pelo menos uma gaveta deverá conter pelo menos $k + 1$ objetos. Como queremos obter 4 objetos (canetas) de uma mesma cor, então:*

$$\begin{aligned} k + 1 &= 4 \\ k &= 3 \end{aligned}$$

Agora, como temos $n = 4$ gavetas (cores) e $k = 3$, pelo Princípio das Gavetas, podemos escrever:

$$\begin{aligned} n \cdot k + 1 &= 4 \cdot 3 + 1 \\ &= 13 \end{aligned}$$

Dessa forma, para termos certeza de que retiramos 4 canetas de uma mesma cor, é necessário retirar do estojo no mínino 13 canetas. ♢

Princípio das Gavetas 3.3. *Suponha que distribuímos $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ objetos em n gavetas da seguinte maneira:*

$$\begin{gathered} a_1 \textit{ objetos na primeira gaveta,} \\ a_2 \textit{ objetos na segunda gaveta,} \\ \vdots \\ a_n \textit{ objetos na última gaveta} \end{gathered}$$

Então

i) existe uma gaveta com no mínimo $\left\lfloor \dfrac{S}{n} \right\rfloor$ objetos.

ii) existe uma gaveta com no máximo $\left\lceil \dfrac{S}{n} \right\rceil$ objetos.

Demonstração:

i) - Queremos mostrar que existe, pelo menos um a_i, $1 \leq i \leq n$, tal que: $a_i \geq \left\lfloor \dfrac{S}{n} \right\rfloor$.

Suponha que todos os $a_i's$ sejam menores que $\left\lfloor \dfrac{S}{n} \right\rfloor$, ou seja,

$$a_i \leq \left\lfloor \frac{S}{n} \right\rfloor - 1, \text{ para } i = 1, \ldots, n.$$

Logo $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq n(\left\lfloor \dfrac{S}{n} \right\rfloor - 1)$ e temos que

$$\frac{S}{n} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leq \left\lfloor \frac{S}{n} \right\rfloor - 1.$$

Um absurdo visto que $\left\lfloor \dfrac{S}{n} \right\rfloor \leq \dfrac{S}{n}$, Teorema 2.5. Portanto, existe uma gaveta com no mínimo $\left\lfloor \dfrac{S}{n} \right\rfloor$ objetos.

ii) Queremos mostrar que existe, pelo menos um a_i, $1 \leq i \leq n$, tal que: $a_i \leq \left\lceil \dfrac{S}{n} \right\rceil$.

Vamos supor que todos os $a_i's$ sejam maiores que $\left\lceil \dfrac{S}{n} \right\rceil$, ou seja,

$$\left\lceil \frac{S}{n} \right\rceil + 1 \leq a_i \text{ para } i = 1, \ldots, n.$$

Então $n(\left\lceil \dfrac{S}{n} \right\rceil + 1) \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ e assim

$$\left\lceil \frac{S}{n} \right\rceil + 1 \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \frac{S}{n}.$$

Logo $\left\lceil \dfrac{S}{n} \right\rceil \leq \dfrac{S}{n} - 1$. Um absurdo visto que $\dfrac{S}{n} \leq \left\lceil \dfrac{S}{n} \right\rceil$, Teorema 2.6. Portanto, existe uma gaveta com no máximo $\left\lceil \dfrac{S}{n} \right\rceil$ objetos. $\square$

Uma consequência direta desta demostração é que se M é a média aritmética dos números $a_1, a_2, \ldots, a_n$, então ao menos um dos números é maior ou igual a M, e, ao menos um dos números é menor ou igual a M.

Exemplo 3.8. *Em um restaurante, há 16 amigos sentados em torno de uma mesa circular para uma confraternização. Um garçom serve a cada um deles, sem perguntar a sua preferência, um suco. Alguns desses sucos são de laranja e outros de abacaxi. Sabendo que 8 desses amigos preferem suco de laranja e os outros 8 preferem suco de abacaxi, mostre que, sem mexer nos amigos e fazendo apenas rotações na mesa (por exemplo sentido horário), é possível fazer com que pelo menos 8 amigos tenham suas preferências respeitadas.*

A mesa pode assumir 16 posições diferentes. Seja $a_i, i = 1, \ldots, 16$, o número de amigos cuja preferência é atendida com a mesa na posição i. Portanto, temos:

- *Objetos: O número total de preferências atendidas pela mesa em cada posição i, $(a_1 + a_2 + \ldots + a_{16})$;*
- *Gavetas: As 16 posições distintas que a mesa pode assumir;*
- *Regra: Cada número de amigos cuja preferência é atendida está associado com a mesa na posição i.*

Mas cada suco é colocado, sucessivamente, em frente a cada um dos amigos e sabemos que existem exatamente 8 amigos que preferem cada sabor, ou seja, cada suco atende a exatamente 8 amigos. Visto que o garçom serviu 16 sucos, podemos concluir que o total de preferências atendidas será 128. Assim, temos:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{16} = 128 \;\Rightarrow\; \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{16}}{16} = 8$$

Logo, pelo Princípio das Gavetas 3.3*, podemos concluir que pelo menos um a_i, $i = 1, \ldots, 16$, será igual a 8, no mínimo. Ou seja, há uma determinada posição da mesa em que pelo menos 8 dos amigos terão suas preferências atendidas.* $\diamondsuit$

Exemplo 3.9. *A média de idade do elenco dos 23 jogadores da Seleção Brasileira de futebol campeã da Copa das Confederações, realizada no Brasil, no ano 2013, era de 26 anos. O que se pode dizer da idade do atleta mais velho do time?*

Como temos 23 atletas, podemos ter no máximo $n = 23$ idades diferentes (Gavetas). Sabemos que a média de idade da seleção é 26 anos. Portanto:

- *Objetos: Cada um dos 23 atletas;*
- *Gavetas: As 23 possíveis idades;*
- *Regra: Cada atleta está associado a sua idade.*

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{23}}{23} = 26$$

Assim, pela consequência do Princípio das Gavetas 3.3*, existe pelo menos um atleta, a_i com $i = 1, \ldots, 23$, que possui idade de pelo menos 26 anos.* $\diamondsuit$

Exemplo 3.10. *Suponhamos que os números de 1 até 12 sejam distribuídos aleatoriamente nas posições em torno do círculo da figura abaixo. Mostre que a soma dos elementos de pelo menos um conjunto de 3 elementos consecutivos tem que ser maior ou igual a 20.*

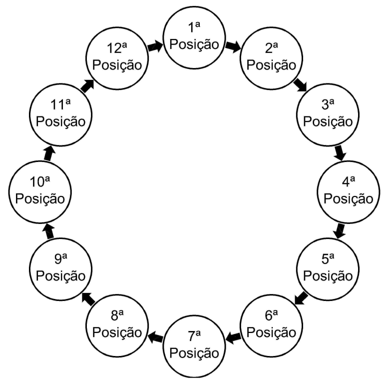

Figura 5: Círculo.

Sabemos que os números de 1 até 12 serão distribuídos, aleatoriamente, nas 12 posições $(a_1, \ldots, a_{12})$ *do circulo. Feito a distribuição, nos resta fazer os conjuntos de 3 elementos consecutivos. Começando, por exemplo da* 1^a *posição e no sentido horário, vamos obter 12 conjuntos:*

$$G_1 = \{a_1, a_2, a_3\},\ G_2 = \{a_2, a_3, a_4\},\ G_3 = \{a_3, a_4, a_5\},$$
$$G_4 = \{a_4, a_5, a_6\},\ G_5 = \{a_5, a_6, a_7\},\ G_6 = \{a_6, a_7, a_8\},$$
$$G_7 = \{a_7, a_8, a_9\},\ G_8 = \{a_8, a_9, a_{10}\},\ G_9 = \{a_9, a_{10}, a_{11}\},$$
$$G_{10} = \{a_{10}, a_{11}, a_{12}\},\ G_{11} = \{a_{11}, a_{12}, a_1\}, G_{12} = \{a_{12}, a_1, a_2\}$$

Note que cada posição aparece em 3 conjuntos, ou seja, podemos afirmar que todos os números vão repetir exatamente 3 vezes, independente da posição que este número ocupar.

- *Objetos: A soma dos três números consecutivos de cada um dos 12 grupos;*
- *Gavetas: Os 12 possíveis grupos;*
- *Regra: Cada soma dos três números está associada a um determinado grupo.*

Agora, basta calcular a média da soma dos números dos 12 conjuntos:

$$\begin{aligned} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{12} |G_i|}{12} &= \frac{|G_1| + |G_2| + \ldots + |G_{12}|}{12} = \frac{3a_1 + 3a_2 + \ldots + 3a_{12}}{12} \\ &= \frac{3(a_1 + a_2 + \ldots + a_{12})}{12} = \frac{3(78)}{12} = \frac{234}{12} = 19.5 \end{aligned}$$

Pelo Princípio das Gavetas 3.3*, existe pelo menos um* G_{i_0} *onde* $i_0 \in \{1, \ldots, 12\}$*, tal que* $G_{i_0} \geq 20$*. Ou seja, a soma de pelo menos um conjunto de 3 elementos consecutivos tem que ser maior ou igual a 20.* $\diamondsuit$

4 Aritmética

Nesta seção resolvemos algumas questões relativas a Aritmética utilizando o Princípio das Gavetas de Dirichlet. Em particular, apresentamos uma prova da infinitude dos números primos.

Exemplo 4.1. *Mostre que em um conjunto de sete inteiros, não necessariamente consecutivos, existem pelo menos dois que possuem o mesmo resto quando divididos por seis.*

Sabemos que

$$b = a \cdot q + r, \text{ com } 0 \leq r < a.$$

Sejam os sete números: $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$*, não necessariamente consecutivos. Ao dividí-los por seis, os possíveis restos são da forma* $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

- *Objetos: Os sete números;*
- *Gavetas: Os seis possíveis restos;*
- *Regra: Cada número está associado a seu resto.*

Pelo Princípio das Gavetas 3.1*, ao dividirmos os sete números por seis, teremos pelo menos dois números com o mesmo resto.* ♢

Exemplo 4.2. *Dados 5 ou mais números inteiros existirão, pelo menos dois inteiros cuja diferença é divisível por quatro.*

Considere os quatro conjuntos:

$$K_0 = \{\ldots, -8, -4, 0, 4, 8, 12 \ldots\}$$

$$K_1 = \{\ldots, -7, -3, 1, 5, 9, 13 \ldots\}$$
$$K_2 = \{\ldots, -6, -2, 2, 6, 10, 16 \ldots\}$$
$$K_3 = \{\ldots, -5, -1, 3, 7, 11, 15 \ldots\}$$

Observe que cada conjunto K_i*, com* $0 \leq i \leq 3$*, é formado pelos números que deixam restos:* $0, 1, 2$ *e* 3*, respectivamente, na divisão por 4.*
Sejam os cinco números inteiros: $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$*, não necessariamente consecutivos. Cada um desses números, estará associado a exatamente uma classe de* K_i*'s, com* $0 \leq i \leq 3$*. Portanto, os possíveis restos serão da forma* $\{0, 1, 2, 3\}$.

- *Objetos: Os cinco números;*
- *Gavetas: Os quatro possíveis restos (da divisão por 4);*
- *Regra: Cada número está associado a seu resto.*

Pelo Princípio das Gavetas 3.1*, pelo menos, dois desses números vão possuir o mesmo resto e, portanto, a diferença entre eles será um múltiplo de 4.* ♢

Note que, o que acabamos de fazer com o número 4, pode ser feito com qualquer número n. Basta considerarmos os n conjuntos: $K_0, K_1, K_2, ..., K_{n-1}$, onde em cada K_i, com $0 \leq i \leq (n-1)$, colocamos todos os inteiros que deixam restos i quando divididos por n. Sabemos que cada inteiro estará associado a exatamente uma classe de K_i's. Agora, basta tomarmos um conjunto de números com m elementos, $m \geq n+1$, de onde podemos concluir que, pelo menos, 2 deles estarão na mesma classe K_i e portanto, a diferença entre eles será divisível por n.

Exemplo 4.3. *Vejamos que 11 divide infinitos números da forma* $919191 \ldots 91$*. Pela Divisão Euclidiana, os possíveis restos de uma divisão por 11 são: r = {0, 1, 2, 3, ,4 5, 6, 7, 8, 9, 10}. Considere*

- *Objetos: O doze números 91, 9191,. . ., 919191919191919191919191;*
- *Gavetas: 0, 1, . . ., 11 (os onze possíveis restos da divisão por 11);*
- *Regra: Cada número está associado a seu resto da sua divisão por 11.*

Segue do Princípio das Gavetas 3.1 *que pelo menos dois destes números possuem o mesmo resto. Logo, a diferença entre eles será divisível por 11.Note que esta diferença é da forma*

$$919191\ldots91\ldots0000 = \underbrace{919191\ldots91}_{c} \cdot \underbrace{10^{2k}}_{b}.$$

Segue do Teorema 2.4 *que* $11 \mid (919191\ldots91)$*, visto que 11 não divide* 10^{2k}*. É claro que considerando infintas sequências distintas com 12 números, 91...91, garantimos a infinitude da afirmação.* ♢

O exemplo abaixo foi retirado do livro [2], página 151, e mostra que podemos escrever o $mdc(a, b) = d$ como uma combinação linear de a e b.

Exemplo 4.4. *Sejam os números naturais* a *e* b *e o* $mdc(a, b) = 1$*. Mostre que existem números inteiros* m *e* n *tais que:*

$$am + bn = 1.$$

Se $mdc(a, b) = 1$*, considere a sequência* $A = \{a, 2a, 3a, \ldots, ba\}$*. Afirmamos que existe algum número do conjunto* A *que deixa resto 1 quando dividido por* b*. Se isso não ocorresse, teríamos:*

- *Objetos: Os* b *números do conjunto* A*;*
- *Gavetas: Os* $b - 1$ *restos diferentes quando divididos por* b $(0, 2, \ldots, b - 1)$*;*
- *Regra: Cada número da sequência está associado a seu resto.*

Pelo Princípio das Gavetas 3.1*, pelo menos dois deles, digamos* ia *e* ja*, com* $1 \leq i < j < b$*, deixarão o mesmo resto quando divididos por* b*. Logo a diferença entre eles,* $(j-i)a$ *será divisível por* b*.*

Mas o $mdc(a, b) = 1$*, então* $b \mid (j - i)$*, pelo Teorema* 2.4*, com* $j - i > 0$*. Como* $b > j - i$*, temos um absurdo. Assim, algum dos números em* A *deixa resto 1 quando divididos por* b*. Digamos que esse número seja* am*. Logo,* $am - 1$ *é múltiplo de* b*, ou seja, existe* n *tal que* $am - 1 = bn$*. Verificando o resultado desejado.* ♢

A infinitude dos números primos é um resultado clássico da teoria dos números. No próximo teorema nós exibimos uma prova desta afirmação, utilizando o Princípio das Gavetas.

Teorema 4.1. *Existem infinitos números primos.*

Demonstração. Suponha que o conjunto dos números primos é finito. Seja

$$p_1 < p_2 < \cdots < p_n$$

a ordenação de todos os números primos. Agora considere os subconjuntos $G_1,\ G_2, \ldots, G_n$ dos números inteiros, onde G_i é o conjunto dos múltiplos do primo p_i, para $i = 1, \ldots, n$. Afirmamos que não existe nenhum conjunto de números inteiros

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}\}$$

com $n + 1$ elementos primos entre si dois a dois. De fato, sendo

- Objetos: $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$;
- Gavetas: $G_1,\ G_2,\ \ldots,\ G_n$;
- Regra: $a_i \in G_i$ se p_i é o maior divisor primo de a_i.

Portanto, temos pelo Princípio das Gavetas 3.1, que para algum $1 \leq j \leq n$ existem $a_r, a_s \in G_j$. Ou seja, p_j divide a_r e a_s, e então $mdc(a_r, a_s) \geq p_j$, verificando nossa afirmação. Mas isto é um absurdo! Visto que existem subconjuntos infinitos com elementos primos entre si, como no Exemplo 2.1. □

5 Geometria

Apresentamos agora alguns exemplos de como podemos utilizar a aplicação do Princípio das Gavetas de Dirichlet na Geometria.

Exemplo 5.1. *Todos os pontos de um plano são pintados nas cores de azul ou vermelha. Veja que podemos encontrar dois pontos da mesma cor que distam exatamente 10 cm. Como queremos distâncias de exatamente 10 cm, basta imaginarmos um triângulo equilátero de lado igual a 10 cm.*

- *Objetos: três pontos (Vértices do Triângulo Equilátero);*
- *Gavetas: duas cores;*
- *Regra: Cada ponto está associado a sua cor.*

Pelo Princípio das Gavetas 3.1, ao pintarmos os 3 pontos com uma das 2 cores (Azul ou Vermelha), teremos dois pontos da mesma cor que distam exatamente 10 cm pelo fato do triângulo ser Equilátero. ♢

Exemplo 5.2. *Na praça de uma cidade, seis crianças se divertem no brinquedo gira-gira, figura abaixo. Mostre que, necessariamente, existem três delas que se conhecem mutuamente ou três delas que não se conhecem mutuamente. Vamos considerar as crianças A, B, C, D, E e F*

Figura 6: gira-gira.

como sendo os vértices de um hexágono regular. Agora, vamos associar as crianças duas a duas,

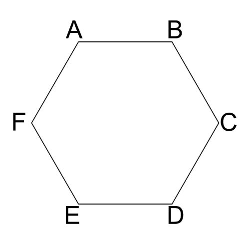

Figura 7: Hexágono regular.

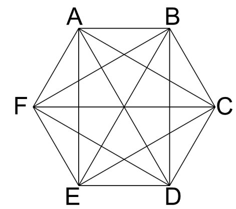

Figura 8: Crianças associadas duas a duas.

através de segmentos de retas. São $\binom{6}{2} = 15$ *possibilidades. Identificando as relações por cores: conhecer por Azul e não conhecer por Vermelha. Observe que conhecer ou não conhecer é uma relação simétrica (Se A conhece B então B conhece A). Note que cada criança está relacionada as outras cinco através de cinco segmentos de retas.*

Observemos, por exemplo, a criança A (O mesmo raciocínio vale para todas as crianças).

- *Objetos: Os cinco segmentos de retas;*
- *Gavetas: As cores disponíveis (Azul ou Vermelha);*
- *Regra: Cada segmento está associado a uma das cores.*

Pelo Princípio das Gavetas 3.2, $n.k + 1$, *como* $5 = 2.2 + 1$, *temos pelo menos 3 dos 5 segmentos da mesma cor. Vamos supor que estes 3 segmentos* $(\overline{AB}, \overline{AD}, \overline{AE})$ *sejam Azuis (caso contrário o argumento será análogo), ver figura.*

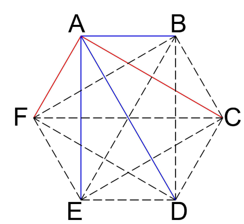

Figura 9: Criança A conhece três crianças.

Agora, se algum dos segmentos $\overline{BE}, \overline{BD}$ *ou* $\overline{DE}$ *(lado do triângulo BDE) for Azul, então este segmento junto aos que se ligam com A, formam um triângulo Azul, ver figura.*

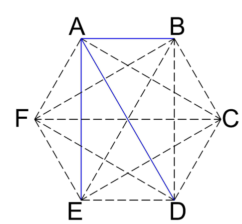

Figura 10:

Do contrário, se nenhum deles for Azul, então eles formam um triângulo de lados na cor Vermelha, o que completa a demonstração.

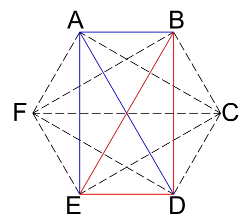

Figura 11: Três crianças que não se conhecem mutuamente.

Triângulo na cor Azul indica que as crianças se conhecem e triângulo na cor Vermelha indica que as crianças não se conhecem.

◊

Exemplo 5.3. *Considere cinco pontos reticulados*[1]*, distintos, no plano* $\mathbb{R}^2$*. Mostre que ao menos um dos segmentos definidos por esses pontos possui um ponto reticulado como seu ponto médio (veja proposição* 24.2 *do livro [4] página 237). Lembre que as coordenadas do ponto médio de um segmento* $\overline{XY}$ *é a média aritmética das coordenadas dos pontos* X *e* Y*. Sejam*

$$A(x_1, y_1),\ B(x_2, y_2),\ C(x_3, y_3),\ D(x_4, y_4) \text{ e } E(x_5, y_5)$$

os pontos reticulados e distintos. Podemos formar $\binom{5}{2} = 10$ *segmentos de retas distintos com extremos nesses pontos, ver figura.*

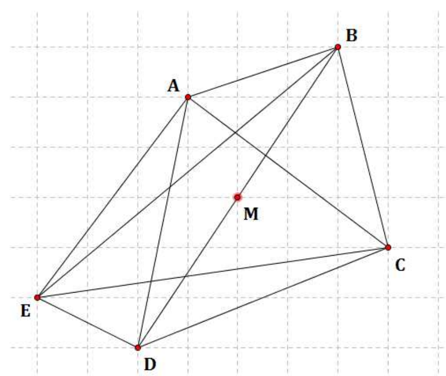

Figura 12: Pontos reticulados ligados dois a dois.

As coordenadas de um ponto reticulado somente assumi valores pares ou ímpares. Assim temos quatro possibilidades:

(par, par), (par, ímpar), (ímpar, par) ou (ímpar, ímpar)

- *Objetos: Os cinco pontos reticulados;*
- *Gavetas: Os quatro tipos de paridade;*
- *Regra: Cada ponto reticulado está associado a sua paridade.*

[1]Ponto Reticulado é todo ponto cujas coordenadas são ambas números inteiros. Por exemplo: (0,0), (2,5) e (-1,3) são pontos reticulados, mas $(\sqrt{2}, 1)$ não é.

Pelo Princípio das Gavetas 3.1, *pelo menos dois desses pontos vão ter a mesma paridade. Suponhamos que estes pontos tenham coordenadas* (x_i, y_i) *e* (x_j, y_j), *com* $1 \leq i \neq j \leq 5$. *O ponto médio desse segmento tem coordenadas do tipo:* $(\frac{x_i + x_j}{2}, \frac{y_i + y_j}{2})$. *Como* x_i *e* x_j *tem a mesma paridade, então* $x_i + x_j$ *é par e, assim* $\frac{x_i + x_j}{2}$ *é inteiro. Analogamente,* $\frac{y_i + y_j}{2}$ *é inteiro. Na figura 17, temos que o ponto médio* M *de* $\overline{BD}$ *é reticulado.*

$\diamondsuit$

Exemplo 5.4. *Suponha que todos os pontos do plano* $\mathbb{R}^2$ *sejam pintados, cada um com uma dentre 2 cores, Vermelha (V) ou Azul (A). Mostre que existem 4 pontos de mesma cor que formam os vértices de algum retângulo.*

Lembre que um retângulo é um paralelogramo que possui ao menos um ângulo reto. Queremos que os quatro vértices do retângulo tenham a mesma cor. Como temos disponíveis apenas duas cores, vamos imaginar, inicialmente, três pontos distintos P_1, P_2 *e* P_3 *alinhados sobre uma reta* r_1 *- vertical, ver figura:*

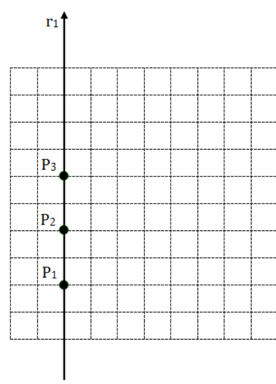

Figura 13: Três pontos alinhados.

- *Objetos: Três pontos alinhados na reta vertical;*
- *Gavetas: Duas cores (Vermelha ou Azul);*
- *Regra: Cada ponto está associado a sua cor.*

Pelo Princípio das Gavetas 3.1, *pelo menos, 2 destes 3 pontos, necessariamente, terão que assumir a mesma cor. Por exemplo:*

$$(V, V, V),\ (V, V, A),\ (V, A, V),\ (A, V, V),\ (V, A, A),\ (A, V, A),\ (A, A, V) \text{ ou } (A, A, A)$$

Encontramos 8 configurações de cores. Tome três retas t_1, t_2 *e* t_3 *perpendiculares à* r_1, *passando cada uma, por cada um dos três pontos alinhados* P_1, P_2 *e* P_3.

Agora, para obtermos retângulos, vamos traçar um feixe de 7 retas, $r_2, \ldots, r_8$ *paralelas e distintas à* r_1. *A intersecção de cada uma dessas 7 retas:* $r_2, \ldots, r_8$, *com as 3 retas:* t_1, t_2 *e* t_3, *nos fornece 3 pontos distintos e alinhados que pode assumir uma das 8 configurações de cores encontradas.*

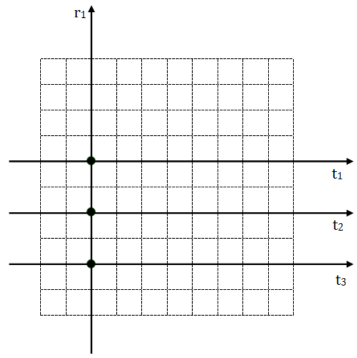

Figura 14: Retas paralelas e perpendiculares à r_1.

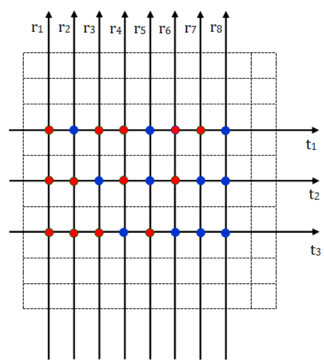

Figura 15: Feixes de retas paralelas e perpendiculares.

Podemos visualizar retângulos com vértices de mesma cor, mas ainda não é garantido que conseguimos sempre. Para finalizar, basta tomarmos uma reta r_9, paralela às retas $r_1, \ldots, r_8$, e aplicar, novamente, o Princípio das Gavetas 3.1 *da seguinte maneira:*

- *Objetos: As nove retas paralelas* $(r_1, \ldots, r_9)$*;*
- *Gavetas: As oito configurações de pontos;*
- *Regra: Cada uma das nove retas está relacionada à uma das configurações.*

Pelo Princípio das Gavetas 3.1*, pelo menos, 2 destas 9 retas, necessariamente, terão que assumir a mesma configuração e sabemos que em cada configuração, pelo menos, dois pontos possuem uma mesma cor, o que nos garante que sempre teremos algum retângulo com vértices de mesma cor. Para melhor visualização, vamos supor que a configuração de* r_9 *seja a mesma de* r_5.

Vale ressaltar que, por conveniência, iniciamos o exercício supondo r_1 *sendo uma reta vertical, e isto não precisa ser obrigatório. Basta termos três pontos alinhados, em qualquer posição, que define a nossa reta* r_1 *e a partir daqui imaginarmos um feixe de nove retas paralelas. Agora tome um outro feixe de três retas paralelas e perpendiculares às outras nove. A conclusão é idêntica!* $\diamondsuit$

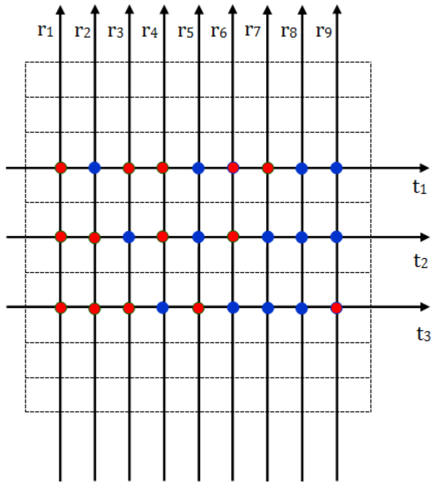

Figura 16: Retângulo com vértices de mesma cor - retas 5 e 9.

6 Conclusão

Este trabalho ressalta a importância do Princípio das Gavetas de Dirichlet e a sua utilização em diversos problemas aritméticos e geométricos. Em virtude do seu enunciado tão simples e de fácil entendimento, acreditamos que este assunto deveria ser abordado no Ensino Básico, principalmente, dentro dos descritores: funções, análise combinatória, geometria e como técnica para questões sobre existência. Contribuindo, dessa maneira, para o desenvolvimento lógico dos alunos e despertando-os para novas questões na matemática.

Referências

[1] J. Plínio de Oliveira Santos. *Introdução à Teoria dos Números*. 2010.

[2] K. Irraciel Martins Oliveira & A. José Corcho Fernández. *Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções*. SBM, 2010.

[3] A. Hefez. *Aritmética: Coleção PROFMAT*. 2016.

[4] E. R. Scheinerman. *Matemática Discreta - Uma introdução.* 2011.

[5] L. Lovász & J. Pelikán & K. Vesztergombi. *Matemática Discreta*. 2005.