Revista de Matemática da UFOP
ISSN: 2237-8103

Estabilidade de Equações de Diferenças Autônomas de Primeira Ordem

Érica das Graças Ferreira ericaferreira72@hotmail.com
Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil

Monique Rafaella Anunciação de Oliveira monique@ufop.edu.br
Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil

Resumo

O objetivo principal deste trabalho é estudar a estabilidade de equações de diferenças autônomas de primeira ordem. Apresentamos a teoria geral de equações de diferenças lineares de primeira e segunda ordem e alguns exemplos aplicados na área de Economia.

Palavras-chave

Equação de Diferenças. Estabilidade. Pontos de equilíbrio.

1 Introdução

Dizemos que um sistema é dinâmico quando as propriedades deste sistema variam com o tempo, podendo variar, também, espacialmente. Sendo assim, a área de Sistemas Dinâmicos estuda processos cuja evolução é dada por uma lei matemática, como as que encontramos em diversos ramos do conhecimento tais como na Biologia e na Economia. A lei de evolução pode ser uma função ou uma equação diferencial. O objetivo é construir uma teoria matemática destes processos que permita compreender e prever sua evolução. Consequentemente, diversos modelos podem ser usados para se estudar essa evolução temporal e é preciso compreender as regras que regem as mudanças que ocorrerão.

Nesse sentido, o principal objetivo desse trabalho é estudar a estabilidade de equações de diferenças autônomas de primeira ordem. Esse artigo é fruto do trabalho de conclusão de curso [7]. A principal referência utilizada nesse trabalho foi [4], e os exemplos apresentados foram retirados de [1], [3] e [5].

2 Teoria geral de equações de diferenças

Seja t o tempo contínuo para a grandeza $x(t)$; sua variação é medida pela derivada $\frac{d}{dt}x(t)$. Sendo assim, o estudo matemático de mudanças nas propriedades do sistema dinâmico corresponde ao estudo das equações diferenciais. No entanto, ao tomarmos a evolução do tempo de forma discreta, ou seja, ao assumirmos que o sistema sofre alteração somente em determinados instantes, estudaremos equações de diferenças (equações discretas). Podemos classificar um sistema dinâmico como discreto ou contínuo, de acordo com as definições apresentadas abaixo.

Um sistema dinâmico discreto é quando a variável t é um número inteiro (neste caso, tomaremos t por n). Geralmente, assume-se que n é um número inteiro não negativo ($n \in \mathbb{Z}_+$). A evolução de um sistema de tempo discreto é governada por uma ou mais equações, que relacionam o valor da variável x no instante $n \in \mathbb{Z}_+$ a valores de x em outros instantes, tais como: $n+1, n+2, n+3$.

Quando a variável t é um número real ($t \in \mathbb{R}$), o sistema dinâmico é dito contínuo. Geralmente, assume-se que t é um número real não-negativo ($t \in \mathbb{R}_+$). A evolução de um sistema de tempo contínuo é governada por uma ou mais equações diferenciais que relacionam a variável x com suas respectivas derivadas.

Neste trabalho, vamos estudar as equações discretas.

2.1 Equações discretas

Nesta seção abordaremos o conceito de equações de diferenças.

Definição 1. *Dada uma função* $f : \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *uma equação discreta de* *primeira ordem é dada por:*

$$x(n+1) = f(n, x(n)) \tag{1}$$

em que $n \geq n_0 (n \in \mathbb{N})$*, para algum* $n_0 \in \mathbb{N}$.

O teorema a seguir aborda a existência e unicidade da solução da equação (1).

Teorema 1. *Dada uma condição inicial* $x(n_0) = x_0$*, existe uma única solução* $x(n) \equiv x(n, n_0, x_0)$ *de* (1)*, para* $n \geq n_0$*, tal que* $x(n, n_0, x_0) = x_0$.

Não apresentaremos a demonstração do teorema neste trabalho, mas podemos construir a solução por meio de iterações:

$x(n_0+1) = x(n_0+1, n_0, x_0) = f(n_0, x(n_0))$.
$x(n_0+2) = x(n_0+2, n_0, x_0) = f(n_0+1, x(n_0+1))$.
$x(n_0+3) = x(n_0+3, n_0, x_0) = f(n_0+2, x(n_0+2))$.

Generalizando, temos

$$x(n) = x(n, n_0, x_0) = f(n-1, x(n-1)) = f(n-1, x(n-1, n_0, x_0)).$$

Se a função f não depender explicitamente de n, isto é, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a equação passa a ser

$$x(n+1) = f(x(n)), \tag{2}$$

que é chamada de *equação autônoma*. Partindo de um valor inicial x_0 obtemos através da relação (2), a sequência

$$x_0, f(x_0), f(f(x_0)), f(f(f(x_0))), \ldots$$

Para simplificar a escrita, serão adotadas as notações:

$$f^2(x_0) = f(f(x_0)), f^3(x_0) = f(f(f(x_0))), \ldots$$

e

$$x(n) = x_n.$$

Assim,

$$\begin{aligned} x_1 &= f(x_0), \\ x_2 &= f^2(x_0) = f(f(x_0)), \\ x_3 &= f^3(x_0) = f(f(f(x_0))), \\ &\vdots \\ x_n &= f^n(x_0), \end{aligned}$$

em que $f^n(x_0)$ é chamada de *n-ésima iteração* de x_0 através de f. O conjunto de todas as iterações $f^n(x_0)$, para $n \geq n_0$ é chamado de *órbita* de x_0 ou solução da equação discreta e será denotada por $O(x_0)$.

As equações dadas por $x_{n+1} - x_n = g(x_n)$ são chamadas de *equações de diferenças* e são equivalentes à (2) se $f(x) = g(x) + x$. Por isso, equações de diferenças são, geralmente, consideradas sinônimos de equações discretas. Em geral, uma *equação de diferenças linear não-homogênea de ordem k* é dada por:

$$x(n+k) + p_1(n)x(n+k-1) + \cdots + p_k(n)x(n) = g(n) \tag{3}$$

onde $p_i(n)$ e $g(n)$ são funções reais definidas para $n \geq n_0, i = 1, \ldots, k$ e $p_k(n) \neq 0$ para todo $n \geq n_0$. Se $g(n)$ for identicamente nula, então (3) será dita uma *equação homogênea*.

Na próxima seção, estudaremos casos especiais de equações de diferenças, denominadas equações lineares. Restringiremos nossa discussão às equações de diferenças lineares de primeira e segunda ordem.

2.2 Equações de diferenças lineares de primeira ordem

Sejam $a(n)$ e $g(n)$ funções reais definidas para $n \geq n_0$. Uma *equação linear não homogênea de primeira ordem* é dada por:

$$x(n+1) = a(n)x(n) + g(n), x(n_0) = x_0, n \geq n_0, \tag{4}$$

e a *equação homogênea associada* é dada por:

$$x(n+1) = a(n)x(n), x(n_0) = x_0, n \geq n_0. \tag{5}$$

Em ambas as equações assumimos que $a(n) \neq 0$, para $n \geq n_0$. Dado $x(n_0) = x_0$ podemos mostrar por indução finita que a solução de (5) é dada por $x(n) = \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right] x_0$. Verifiquemos que vale para n_0+1 e n_0+2:

$x(n_0+1) = a(n_0)x(n_0) = a(n_0)x_0.$
$x(n_0+2) = a(n_0+1)x(n_0+1) = a(n_0+1)a(n_0)x_0.$

Suponhamos que vale para n_0+k e vejamos que também vale para $n_0+(k+1)$:

$$x(n_0+k) = a(n_0+(k-1))a(n_0+(k-2))\cdots a(n_0)x_0.$$

$$\begin{aligned} x(n_0+(k+1)) &= a(n_0+k)x(n_0+k) \\ &= a(n_0+k)a(n_0+(k-1))a(n_0+(k-2))\cdots a(n_0)x_0. \end{aligned}$$

Assim, podemos escrever:

$$x(n) = a(n-1)a(n-2)\cdots a(n_0)x_0 = \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right] x_0.$$

Também podemos encontrar a única solução da equação não homogênea (4) utilizando indução finita:

$$\begin{aligned} x(n_0+1) &= a(n_0)y_0 + g(n_0). \\ x(n_0+2) &= a(n_0+1)y(n_0+1) + g(n_0+1) \\ &= a(n_0+1)(a(n_0)y_0 + g(n_0)) + g(n_0+1). \end{aligned}$$

Assim, por indução, para todo $n \in \mathbb{Z}_+$, segue que:

$$x(n) = \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right] x_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1} \left[\prod_{i=r+1}^{n-1} a(i)\right] g(r). \tag{6}$$

De fato, assumindo que a igualdade (6) seja válida para $n = k$, e considerando $\prod_{i=k+1}^{k} a(i) = 1$ e $\sum_{i=k+1}^{k} a(i) = 0$, temos pela equação$(4)$ que

$$\begin{aligned}
x(k+1) &= a(k)y(k) + g(k)\\
&= a(k)\left\{\left[\prod_{i=n_0}^{k-1} a(i)\right] y_0 + \sum_{r=n_0}^{k-1}\left[\prod_{i=r+1}^{k-1} a(i)\right] g(r)\right\} + g(k)\\
&= \left[\prod_{i=n_0}^{k} a(i)\right] y_0 + \sum_{r=n_0}^{k-1}\left[\prod_{i=r+1}^{k} a(i)\right] g(r) + \left(\prod_{i=k+1}^{k} a(i)\right) g(k)\\
&= \left[\prod_{i=n_0}^{k} a(i)\right] y_0 + \sum_{r=n_0}^{k}\left[\prod_{i=r+1}^{k} a(i)\right] g(r).
\end{aligned}$$

Sendo assim, a fórmula (6) é válida para todo $n \in \mathbb{Z}_+$.

Exemplo 1. *Determine a solução da equação*

$$x_{n+1} = (n+1)x_n - 3^n(n+1)!, x_0 = 1.$$

De (6)*, temos que*

$$\begin{aligned}
x_n &= \left[\prod_{i=0}^{n-1}(i+1)\right] x_0 + \sum_{r=0}^{n-1}\left[\prod_{i=r+1}^{n-1}(i+1)\right](-3^r(r+1)!)\\
&= n! - \sum_{r=0}^{n-1}(r+2)(r+3)\cdots(n-1)n3^r(r+1)!\\
&= n! - n!\sum_{r=0}^{n-1} 3^r\\
&= n!\left[1 - \frac{1-3^n}{1-3}\right]\\
&= \frac{3-3^n}{2} n!.
\end{aligned}$$

2.3 Casos especiais de equações lineares

Podemos evidenciar dois casos de (4) que são utilizados para descrever diversas aplicações. O primeiro caso é dado por:

$$x(n+1) = ax(n) + g(n), x(0) = x_0 \tag{7}$$

em que a função $a(n)$ de (4) é constante não nula e $n_0 = 0$. Para se determinar sua solução, usa-se a fórmula (6), e obtém-se:

$$x(n) = a^n x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} g(k). \tag{8}$$

De fato, por (4) temos que $a(n) = a$ é constante, $n_0 = 0$ e $x_0 = x(0)$. Usando (6) segue que:

$$x(n) = \left[\prod_{i=0}^{n-1} a(i)\right] x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \left[\prod_{i=k+1}^{n-1} a(i)\right] g(k).$$

Como i varia de 0 a $n-1$, temos que $\left[\prod_{i=0}^{n-1} a(i)\right] = a^n$ (lembrando que $a(i)$ é constante).
Então,

$$x(n) = a^n x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \left[\prod_{i=k+1}^{n-1} a(i)\right] g(k)$$

mas $\left[\prod_{i=k+1}^{n-1} a(i)\right] = a^{n-k-1}$. Sendo assim, obtemos

$$x(n) = a^n x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} g(k).$$

O segundo caso é dado por:

$$x(n+1) = ax(n) + b, x(0) = x_0,$$

em que a função g(n) de (4) também é constante. Para se determinar a solução deste segundo caso, usamos a fórmula (8) e obtemos $x(n)$. De fato, temos que $g(n) = b$ e para $n = k$, também temos que $g(k) = b$. De (8):

$$x(n) = a^n x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} b = a^n x_0 + (a^{n-1} + a^{n-2} + a^{n-3} + \cdots + a^0)b.$$

Ora, $a^{n-1} + a^{n-2} + a^{n-3} + \cdots + a^0$ é a soma de uma PG (progressão geométrica) finita de razão $r = a^{-1}$. Invertendo os termos da PG, temos $a^0 + \cdots + a^{n-3} + a^{n-2} + a^{n-1}$ com razão $q = a$. Logo, sendo Sn tal soma, ela pode ser expressa da seguinte forma:

$$Sn = a^0 + \cdots + a^0 \cdot a^{n-3} + a^0 \cdot a^{n-2} + a^0 \cdot a^{n-1}.$$

Multiplicando os dois termos da última equação por a:

$$a \cdot Sn = (a^0 + \cdots + a^0 \cdot a^{n-3} + a^0 \cdot a^{n-2} + a^0 \cdot a^{n-1}) \cdot a$$

$$a \cdot Sn = a^1 + \cdots + a^0 \cdot a^{n-3} + a^0 \cdot a^{n-2} + a^0 \cdot a^{n-1} + a^0 \cdot a^n.$$

Efetuando a subtração entre as equações acima, obteremos:

$$Sn - Sn \cdot a = a^0 - a^0 \cdot a^n.$$

Colocando os termos semelhantes em evidência e isolando Sn, temos que

$$Sn = \frac{a^0(a^n - 1)}{a - 1}.$$

Como $a^0 = 1$,

$$Sn = \frac{a^n - 1}{a - 1},$$

portanto,

$$x(n) = a^n x_0 + b\left[\frac{a^n - 1}{a - 1}\right],$$

e assim $a \neq 1$.

Quando $a = 1$, pela equação (8) temos que:

$$x(n) = x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} 1b = y_0 + nb.$$

Podemos, então, definir a solução $y(n)$ da seguinte forma:

$$y(n) = \begin{cases} a^n x_0 + b\left[\dfrac{a^n - 1}{a - 1}\right], & \text{se} \quad a \neq 1, a \neq 0 \\ x_0 + bn, & \text{se} \ \ a = 1. \end{cases} \tag{9}$$

Vejamos um exemplo referente ao segundo caso:

Exemplo 2. *(Amortização de empréstimos) A amortização é um processo pelo qual um empréstimo bancário é pago através de uma sequência de pagamentos periódicos. Nestes pagamentos, uma parte diz respeito aos juros e a outra parte é para reduzir a dívida. Se E_n representa o total em dívida após o n-ésimo pagamento $g(n)$ que se supõe constante, qual a expressão que traduz a prestação, sabendo que se aplica uma taxa de juros r por cada pagamento periódico?*

O total em dívida após o $(n+1)$-ésimo pagamento é igual ao total em dívida após o n-ésimo pagamento mais o respectivo juro, menos o n-ésimo pagamento, ou seja,

$$E_{n+1} = (1 + r)E_n - g(n).$$

Como $g(n)$ é constante, representa-se por P esse pagamento. Temos, por (9), que

$$E_n = (1 + r)^n \left[E_0 + \frac{P}{r}((1 + r)^{-n} - 1)\right]$$

onde E_0 é o valor inicial emprestado.

Quando a dívida ficar saldada, $E_n = 0$ e nesse caso temos:

$$0 = (1 + r)^n \left[E_0 + \frac{P}{r}((1 + r)^{-n} - 1)\right],$$

ou seja,

$$P = \frac{r(1+r)^n E_0}{(1+r)^n - 1} = \frac{rE_0}{1-(1+r)^{-n}}.$$

Para um empréstimo a 5 anos de $R\$12.000,00$ *à uma taxa de juros de* $3,5\%$ *ao ano, tem-se que o pagamento mensal é*

$$P = \frac{\frac{0{,}035}{12} \times 12.000}{1-(1+\frac{0{,}035}{12})^{-5\times 12}}$$

isto é, a prestação é de, aproximadamente, $R\$218,30$.

2.4 Equações de diferenças lineares de segunda ordem com coeficientes constantes

Uma *equação de diferenças linear homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes*, pode ser escrita como:

$$x(n+2) + p_1 x(n+1) + p_2 x(n) = 0, x(n_0) = x_0, n \geq n_0 \geq 0 \tag{10}$$

em que os $p_i's$ são constantes e $i = 1,2$ com $p_2 \neq 0$. No próximo resultado, teremos a prova de que a combinação linear de duas soluções de (10) também é solução da mesma.

Teorema 2. *Se* $\varphi_1(n)$ *e* $\varphi_2(n)$ *forem soluções de* (10) *e se* c_1 *e* c_2 *forem constantes, então a função* $\varphi(n) = c_1\varphi_1(n) + c_2\varphi_2(n)$ *também será solução de* (10).

Assumiremos agora que as soluções de (10) são da forma λ^n, onde λ é um número complexo. Substituindo este valor em (10), temos:

$$\lambda^{n+2} + p_1\lambda^{n+1} + p_2\lambda^n = 0 \Leftrightarrow \lambda^n(\lambda^2 + p_1\lambda + p_2) = 0.$$

Assim, ou $\lambda^n = 0$ e teremos a solução trivial (solução nula), ou $\lambda^2 + p_1\lambda + p_2 = 0$.

Este polinômio é chamado de *polinômio característico* de (10), e as raízes de λ são chamados de *raízes características* que podem ser encontradas desenvolvendo a equação da seguinte forma: pela conhecida "fórmula de

Bhaskara", $\Delta = p_1^2 - 4p_2$. Logo temos as raízes desejadas,

$$\lambda_1 = \frac{-p_1 + \sqrt{p_1^2 - 4p_2}}{2} \text{ e } \lambda_2 = \frac{-p_1 - \sqrt{p_1^2 - 4p_2}}{2}.$$

Assim como em qualquer outro polinômio de segundo grau, temos três casos a considerar:

(i) Quando temos $\Delta > 0$, obtemos duas raízes reais e distintas, sendo elas $x_1(n) = \lambda_1^n$ e $x_2(n) = \lambda_2^n$. Então, pelo Teorema 2, podemos obter uma solução dada por

$$x(n) = a_1\lambda_1^n + a_2\lambda_2^n,$$

onde a_1 e a_2 são constantes.

(ii) Quando $\Delta = 0$, obtemos duas raízes reais e iguais. Como $p_1^2 = 4p_2$, ao substituirmos em λ_1 e λ_2 teremos $\lambda_1 = \lambda_2 = -\dfrac{p_1}{2}$. Temos que $x_1(n) = \lambda_1^n$ é uma solução de (10) e para encontrar $x_2(n)$ vamos supor que $x_2(n) = n\lambda_1^n$ e verificar se também é uma solução de (10). Vejamos:

$$\begin{aligned} (n+2)\lambda_1^{n+2} + p_1(n+1)\lambda_1^{n+1} + p_2 n\lambda_1^n &= \\ (\lambda_1^2 + p_1\lambda_1 + p_2)n\lambda_1^n + (2\lambda_1 + p_1)\lambda_1^{n+1} &= 0 \end{aligned}$$

isso porque $\lambda_1^2 + p_1\lambda_1 + p_2 = 0$, pois λ_1 é raiz característica e $2\lambda_1 + p_1 = 0$, já que $\lambda_1 = -\dfrac{p_1}{2}$. Então $x_2(n)$ também é solução de (10) e uma solução geral de (10) é dada por:

$$x(n) = a_1x_1(n) + a_2x(n) = a_1\lambda_1^n + a_2n\lambda_1^n = (a_1 + na_2)\lambda_1^n,$$

lembrando que a_1 e a_2 são constantes.

(iii) O último caso a ser considerado, é quando as raízes características são complexas, ou seja, quando $\Delta < 0$ temos as raízes $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ e $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, com α e β reais e $\beta \neq 0$.

Antes de encontrarmos a solução para este caso, vejamos o teorema a seguir:

Teorema 3. *Seja $x(n) = u(n) + iv(n)$ uma solução complexa da equação de diferenças* (10)*, onde u e v são funções reais. Então u e v são soluções reais de* (10)*.*

Demonstração. Como $x(n) = u(n) + iv(n)$ é uma solução de (10), então, temos que:

$$u(n+2) + iv(n+2) + p_1[u(n+1) + iv(n+1)] + p_2[u(n) + iv(n)] = 0 \Rightarrow$$

$$u(n+2) + p_1u(n+1) + p_2u(n) + i[v(n+2) + p_1v(n+1)] + p_2v(n)] = 0.$$

Logo,

$$u(n+2) + p_1u(n+1) + p_2u(n) = 0$$

e

$$v(n+2) + p_1v(n+1) + p_2v(n) = 0.$$

Portanto, u e v são soluções reais de (10). $\square$

Retornando ao caso (iii), escrevendo λ_1 em coordenadas polares, temos $\lambda_1 = rcos(\theta) + irsen(\theta)$, onde $\alpha = rcos(\theta)$ e $\beta = rsen(\theta)$, sendo $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \theta = tg^{-1}\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)$, com $\alpha \neq 0$.
Temos:

$$x(n) = \lambda_1^n = (rcos(\theta) + irsen(\theta))^n = r^n(cos(n\theta) + isen(n\theta)).$$

Então, pelo teorema 3, $x_1(n) = r^n cos(n\theta)$ e $x_2(n) = r^n sen(n\theta)$ são soluções reais de (10) e uma solução geral de (10) é dada por:

$$x(n) = r^n(c_1cos(n\theta) + c_2sen(n\theta)).$$

Observação 1. *Como temos as constantes c_1 e c_2, então as soluções considerando λ_1 e λ_2 serão as mesmas.*

Com isso, concluímos o estudo da teoria geral de equações de diferenças. No próximo capítulo, estudaremos a estabilidade de equações de diferenças autônomas de primeira ordem.

3 Estabilidade de equações de diferenças autônomas de primeira ordem em caso real

Analisaremos o comportamento qualitativo das soluções de uma equação de diferenças autônoma de primeira ordem, que é representada da seguinte forma:

$$x(n+1) = f(x(n)), \tag{11}$$

em que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{Z}_+$.

3.1 Ponto de equilíbrio

Em muitas das aplicações, como na Biologia e Economia, faz-se necessário que todos os estados de um dado sistema tendam ao estado de equilíbrio, o que nos leva a estudar o ponto de equilíbrio.

Definição 2. *Um ponto x^* no domínio de f é dito ponto de equilíbrio de (11) se for um ponto fixo de f, isto é, se $f(x^*) = x^*$.*

Ou seja, x^* é uma solução constante de (11), pois se $x(0) = x^*$ for o ponto inicial, então $x(1) = f(x^*) = x^*, x(2) = f(x(1)) = f(x^*) = x^*$, e assim por diante. Graficamente, um ponto de equilíbrio é a abscissa do ponto onde o gráfico de f intersecta a linha diagonal $y = x$.

Exemplo 3. *Vamos determinar os pontos de equilíbrio da equação*

$$x(n+1) = x^3(n).$$

Para $f(x) = x^3$, a equação $f(x) = x$, ou seja $x^3 = x$, apresenta três raízes, que são $-1, 0$ e 1. Podemos verificar isso graficamente na figura 1.

Como consequência do Teorema do Valor Intermediário, temos assegurada a existência de, pelo menos, um ponto fixo para uma função f sob determinadas condições.

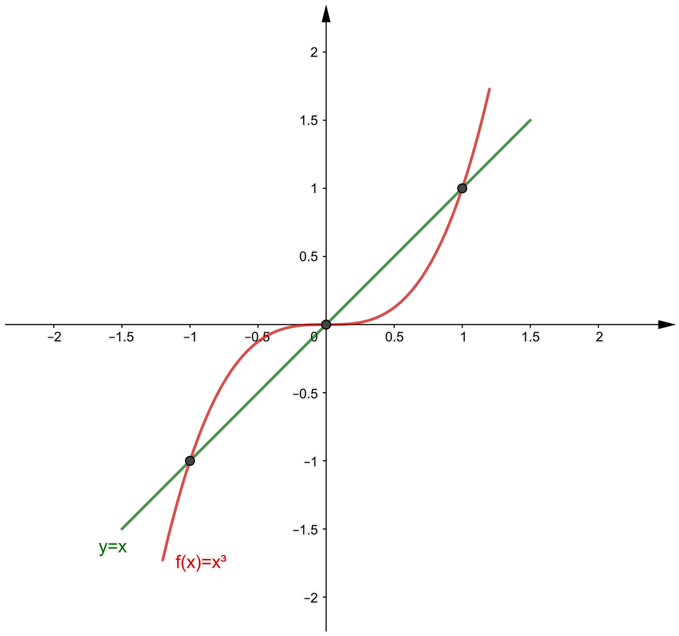

Figura 1: Pontos fixos de $f(x) = x^3$

Teorema 4. *(Teorema do Valor Intermediário (TVI)). Suponha que $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ seja uma função contínua e que y_0 esteja entre $f(a)$ e $f(b)$. Então, existe pelo menos um $x_0 \in (a, b)$ tal que $f(x_0) = y_0$.*

Teorema 5. *(Teorema do ponto fixo). Suponha que $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ seja uma função contínua. Então existe pelo menos um ponto fixo para f em $[a, b]$.*

Observe que o TVI não gera um método para encontrar o ponto fixo, mas ele garante sua existência, que é suficiente para o que queremos. A órbita do ponto de equilíbrio de (11) será $O(x^*) = \{x^*, x^*, \ldots\}$ e generalizando $x_n = f(x_{n-1}) = f(x^*) = x^*$ para todo $n \geq n_0$.

Um estado de não-equilíbrio pode vir a ser um estado de equilíbrio em um determinado tempo finito. Este fenômeno só é possível em equações de diferenças e não em equações diferenciais.

Definição 3. *Seja x_0 um ponto no domínio de f. Se existir um número inteiro r e um ponto de equilíbrio x^* de (11) tal que $f^r(x_0) = x^*$ e $f^{r-1}(x_0) \neq x^*$, então x_0 será um ponto de equilíbrio eventual.*

Em outras palavras, dizemos que x_0 é ponto de equilíbrio eventual se algum x_i de sua órbita for um ponto fixo. Por exemplo, podemos dizer que -1 é um ponto fixo eventual de $f(x) = x^2$, pois $f(-1) = 1$ e 1 é ponto fixo de f.

Exemplo 4. *Consideremos a equação*

$$x(n+1) = T(x(n))$$

em que tem-se

$$T(x) = \begin{cases} 2x \text{ para } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2(1-x) \text{ para } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}.$$

Neste caso, temos dois pontos de equilíbrio que são 0 *e* $\frac{2}{3}$*. Seja* $x(0) = \frac{1}{4}$*, então* $x(1) = \frac{1}{2}$*,* $x(2) = 1$ *e* $x(3) = 0$*. Como* 0 *é ponto de equilíbrio, obtemos que* $x(n) = 0$*, para* $n \geq 4$*. Temos, então que* $\frac{1}{4}$ *é um ponto de equilíbrio eventual cuja órbita é dada por*

$$\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 0, 0, 0, \ldots\right).$$

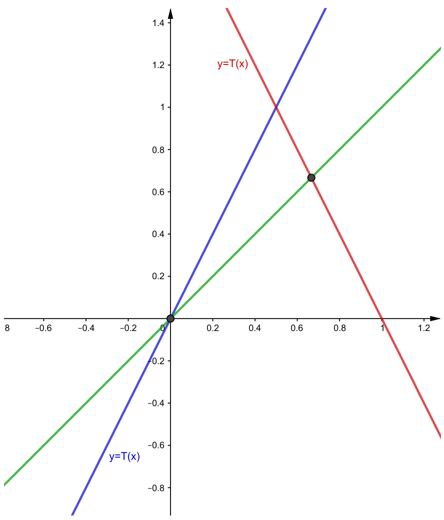

Figura 2: Pontos de equilíbrio de $x(n+1) = T(x(n))$

3.2 Estabilidade de pontos de equilíbrio

Estuda-se sistemas dinâmicos tendo como principal intuito a análise das soluções em que os valores iniciais estão próximos aos pontos de equilíbrio do sistema. Sendo assim, este estudo consiste na teoria da estabilidade.

Definição 4. *(a) Dizemos que o ponto de equilíbrio x^* de (11) é estável se dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|x_0 - x^*| < \delta$ implica $|f^n(x_0) - x^*| < \epsilon$ para todo $n > 0$. Ou seja, se $x(0) = x_0$ estiver no intervalo centrado em x^* como raio δ, isto é, $x^* - \delta < x_0 < x^* + \delta$, então, $x(n)$ estará no intervalo centrado em x^* com raio ϵ, ou seja, $x^* - \epsilon < f^n(x_0) < x^* + \epsilon$, para todo $n > 0$. Se x^* não for estável, então é chamado instável.*

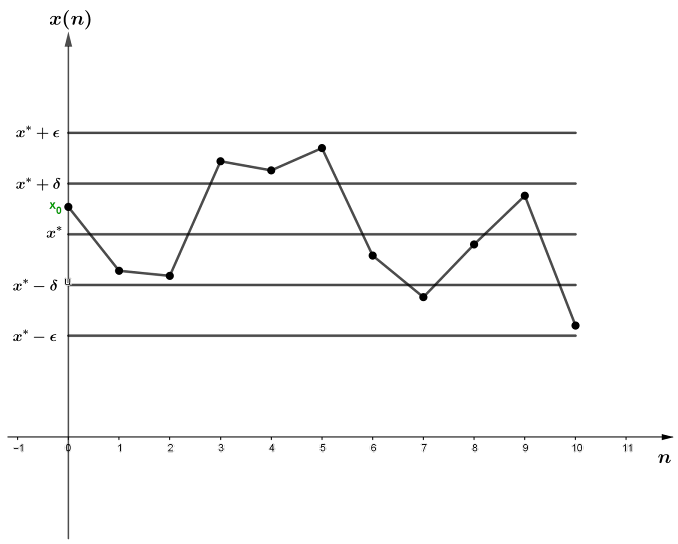

Figura 3: Ponto x^* estável

(b) O ponto x^* é dito atrator se existir $\eta > 0$ tal que

$$|x_0 - x^*| < \eta \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x(n) = x^*.$$

x^* será chamado de atrator global ou globalmente atrator se a afirmação acima for válida para todo $\eta > 0$.

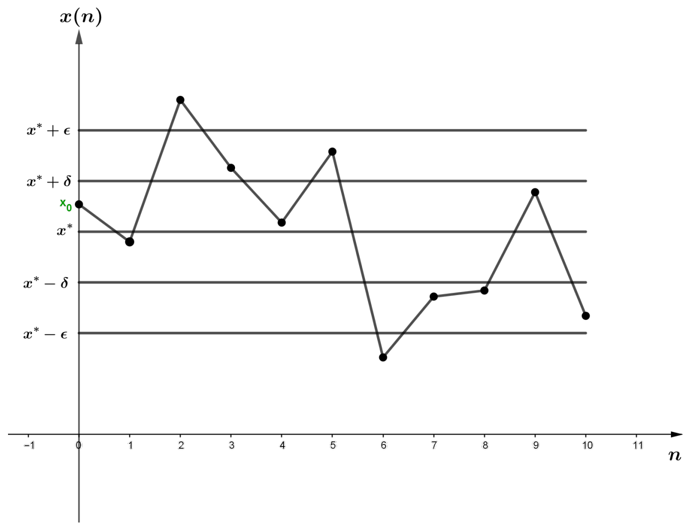

Figura 4: Ponto x^* instável

(c) *Se o ponto x^* for estável e atrator, então ele é dito assintoticamente estável. Neste caso, temos também que, se a afirmação for válida para todo $\eta > 0$, então x^* será dito globalmente assintoticamente estável.*

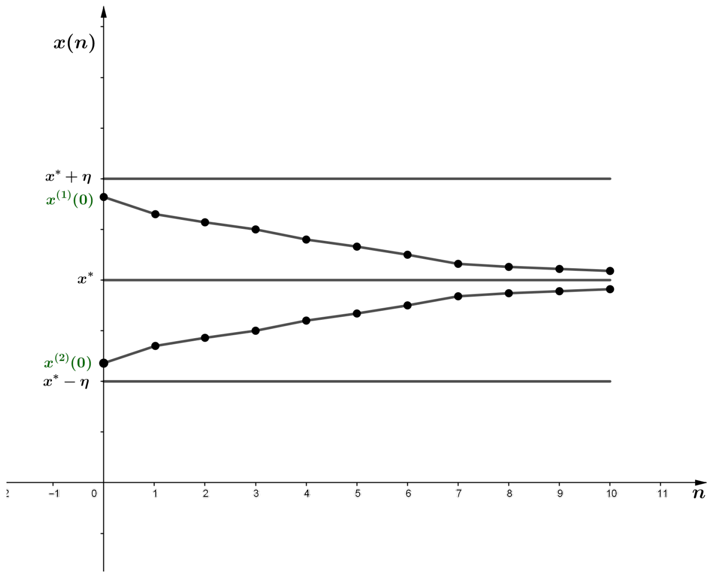

Figura 5: Ponto x^* assintoticamente estável

Observação 2. *No caso em que x^* não é estável, temos que existe $\epsilon > 0$ tal que,*

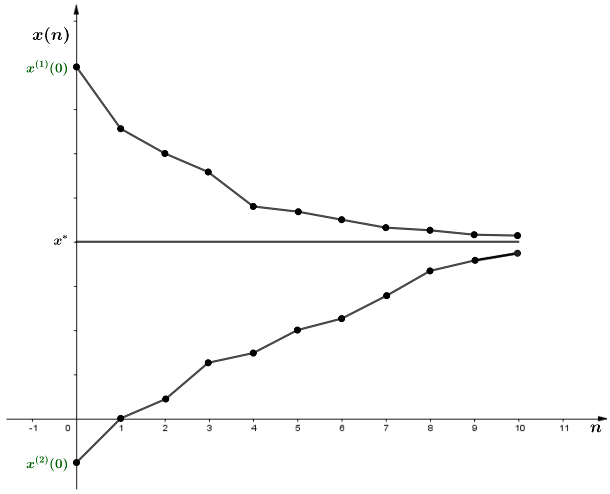

Figura 6: Ponto x^* globalmente assintoticamente estável

para todo δ em que $|x_0 - x^*| < \delta$ implica $|f^n(x_0) - x^*| \geq \epsilon$, para algum $n > 0$, ou seja, sempre haverá um instante $n > 0$ tal que a distância entre $x(n)$ e x^* é maior ou igual a ϵ, não importa o quão perto $x(0) = x_0$ esteja de x^*.

Usaremos uma técnica gráfica chamada *teia de aranha (cobweb)* para ajudar na compreensão do comportamento de soluções de (11) nas proximidades das soluções constantes dadas pelos pontos de equilíbrio, que será apresentada na próxima seção.

3.3 Método *teia de aranha*

O método *teia de aranha (cobweb)*, também conhecido como diagrama em degraus, é uma técnica gráfica utilizada para investigar a estabilidade ou instabilidade de pontos de equilíbrio. Este nos permite utilizar, em vários casos, o gráfico da função f de (11) para determinar o comportamento da órbita de um ponto. Esse processo geométrico consiste em se colocar no mesmo conjunto de eixos coordenados os gráficos de f e da diagonal $y = x$. Sendo assim, tomamos o ponto (x_0, x_0) na diagonal $y = x$ e traçamos uma reta vertical por (x_0, x_0) até tocar a curva f, o que permitirá que se determine $(x_0, f(x_0))$. A partir desse ponto, traçamos uma reta horizontal até encontrar $y = x$, obtendo o ponto $(f(x_0), f(x_0))$, que é o ponto (x_1, x_1). Repetindo o processo, podemos visualizar se a órbita se aproxima ou se afasta de algum ponto de equilíbrio de (11) (isto determinará se o ponto de equilíbrio será instável ou estável). Para definição deste método, utilizamos as referências [2] e [6]. Vejamos, agora, um exemplo de aplicação:

Exemplo 5. *Consideremos um modelo envolvendo a quantidade de um determinado produto que é ofertada ao mercado, a demanda do mesmo pelo mercado e o valor do produto. Vamos supor que a quantidade demandada no momento* t*,* D_t*, seja função do preço vigente em* t*,* p_t *a quantidade ofertada no tempo* t *e* S_t *a função do preço esperado* (p_e) *no tempo* t*. Como a produção de qualquer produto necessita de tempo, define-se a quantidade a ser produzida antes das vendas e por isso utilizamos o preço esperado e não atual ou vigente. Supondo as relações lineares, temos que:*

$$D_t = a - bp_t,$$
$$S_t = c + dp_e,$$

onde a*,* b*,* c *e* d *são constantes positivas. Podemos observar que a inclinação da reta que representa a demanda é negativa já que ao se aumentar o valor do produto haverá diminuição na quantidade que o mercado está disposto a comprar. O coeficiente* b *representa a reação dos consumidores em relação ao preço do produto. Consequentemente, o aumento no valor do mesmo refletirá em uma redução de* b *unidades na demanda.*

Como o coeficiente d *representa a reação dos fornecedores com relação ao preço esperado, a reta que representa a oferta possui inclinação positiva, ou seja, um aumento no preço esperado da unidade do produto reflete em uma quantidade* d *a mais na oferta.*

Suponha que todo produtor, quanto ao preço esperado, faça suas projeções considerando que o preço seja mantido de um período para o outro. Logo, p_e *é o preço anterior a* t*, e podemos escrever:*

$$S_t = c + dp_{t-1}.$$

Por hipótese, vamos supor que o preço ideal de um produto é aquele pelo qual o mercado adquira tudo que se produz, isto é:

$$D_t = S_t.$$

Usaremos como índices t e $t+1$ *ao invés de t e* $t-1$ *apresentados na equação da oferta, para desenvolver a igualdade acima por serem mais usuais em equações de diferenças. Logo, temos:*

$$\begin{aligned} S_{t+1} &= c + dp_t, \\ D_{t+1} &= a - bp_{t+1}. \end{aligned}$$

Obtendo o preço ideal do produto:

$$a - bp_{t+1} = c + dp_t \Leftrightarrow$$
$$p_{t+1} = -\frac{d}{b}p_t + \frac{a-c}{b},$$

isto é, sendo A *e* B *constantes tais que* $A = -\dfrac{d}{b}$ *e* $B = \dfrac{a-c}{b}$*, temos que*

$$p_{t+1} = Ap_t + B. \tag{12}$$

O ponto (preço) de equilíbrio dessa equação de diferenças linear de primeira ordem é dado por

$$p^* = Ap^* + B \Leftrightarrow$$
$$p^*(1-A) = B \Leftrightarrow$$
$$p^* = \frac{B}{1-A},$$

que é exatamente o ponto de interseção entre as curvas que representam a oferta e a demanda, ou seja, neste ponto a quantidade procurada é exatamente igual a quantidade de produto oferecida. Quando o preço for maior que p^* *a oferta excederá e quando o valor for abaixo de* p^* *a demanda excederá. Assim, a razão entre os declives das curvas de oferta e demanda determina o comportamento da sequência de preços, que neste caso é representado pela constante* A *e teremos três* *casos a serem considerados:*

(a) $-1 < A < 0$.

(b) $A = -1$.

(c) $A < -1$.

Utilizando o diagrama de Cobweb, a análise da órbita de p_0 *na vizinhança de* p^* *é apresentada nas figuras 7, 8 e 9.*

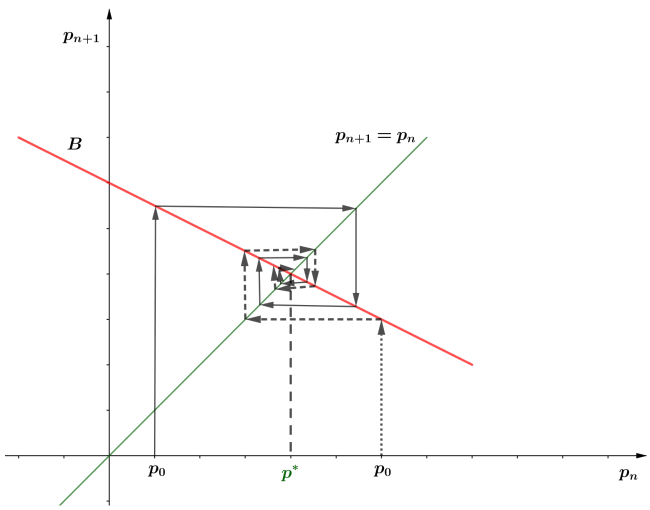

Figura 7: Preço de equilíbrio assintoticamente estável

(a) *Podemos notar que, embora o preço sofra alterações, sempre converge para o preço de equilíbrio* p^*. *Sendo assim,* p^* *será assintoticamente estável. Note que este caso é equivalente a* $a - \dfrac{d}{b} > -1$, *ou seja* $c < a$ *e com isso temos que a reação dos fornecedores, com relação ao preço, é menor que a dos compradores.*

(b) *Neste caso, os preços oscilam entre dois valores, pois* $p_1 = -p_0 + B$ *e* $p_2 = p_0$. *Assim, o ponto de equilíbrio é estável e tem-se que a reação dos compradores é a mesma que dos fornecedores, com relação ao preço.*

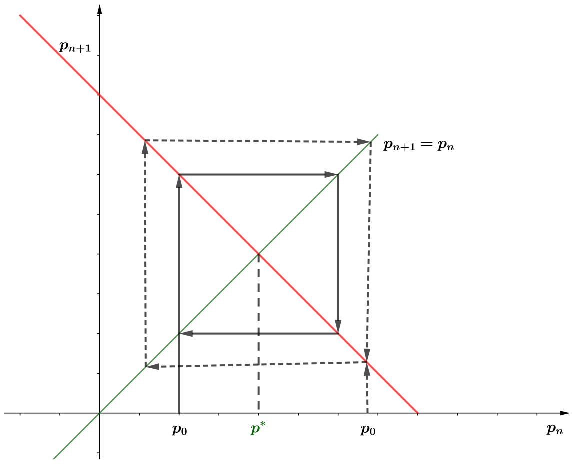

Figura 8: Preço de equilíbrio estável

(c) Agora, os preços oscilam indefinidamente em torno do ponto de equilíbrio p^*, mas, de forma progressiva, se afastam do mesmo. Neste caso, p^* é instável. Tem-se que a reação, ao preço, dos fornecedores é maior que a dos compradores.

4 Critérios para Estabilidade

Veremos, nessa seção, alguns critérios para classificarmos o ponto de equilíbrio quanto a estabilidade.

Teorema 6. *Seja x^* um ponto de equilíbrio da equação de diferenças*

$$x(n+1) = f(x(n)), \tag{13}$$

em que a função f é tal que sua derivada é contínua em $x^* \in \mathbb{R}$ e $0 < n_0 \leq n$. Sendo assim, as seguintes afirmações são válidas:

(i) Se $|f'(x^*)| < 1$, então x^* será assintoticamente estável.

(ii) Se $|f'(x^*)| > 1$, então x^* será instável.

O Teorema 6 não se aplica para $f'(x^*) = 1$, embora seja válido para $|f'(x^*)| < 1$ tal como para $|f'(x^*)| > 1$, e analisaremos tal caso através do Teorema a seguir.

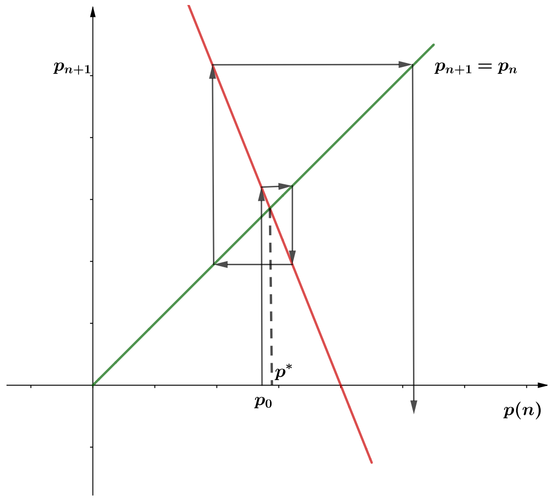

Figura 9: Preço de equilíbrio instável

Teorema 7. *Sejam x^* um ponto de equilíbrio de (13) e f três vezes diferenciável em x^*, com $f'(x^*) = 1$. Então valem as seguintes afirmações:*

(i) Se $f''(x^*) \neq 0$, então x^* será instável.

(ii) Se $f''(x^*) = 0$ e $f'''(x^*) > 0$, então x^* será instável.

(iii) Se $f''(x^*) = 0$ e $f'''(x^*) < 0$, então x^* será assintoticamente estável.

Exemplo 6. *Seja a equação de diferenças*

$$x_{n+1} = -(x_n)^2 + x_n + 1.$$

Os pontos de equilíbrio são $x^* = -1$ e $x^* = 1$. Como $f(x) = x^2 + x + 1$, $f'(x) = -2x + 1$ segue que

$$f'(-1) = 3, |f'(-1)| = 3 > 1$$

e, pelo Teorema 6 $x^* = -1$ é um ponto de equilíbrio instável.

Para $x^* = 1$, $f'(1) = -1$, mas esse caso será tratado no próximo teorema. Podemos visualizar a estabilidade do ponto $x^* = 1$ pelo método

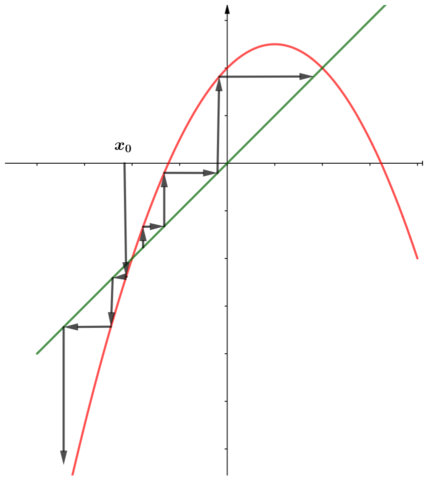

Figura 10: Método da teia de aranha para a equação $x_{n+1} = -(x_n)^2 + x_n + 1$ e $x^* = -1$

da teia de aranha, apresentado na figura 11, onde podemos concluir que $x^* = 1$ é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

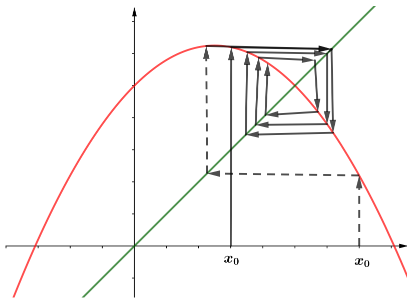

Figura 11: Método da teia de aranha para a equação $x_{n+1} = -(x_n)^2 + x_n + 1$ e $x^* = 1$

Teorema 8. *Sejam x^* o ponto de equilíbrio de (13) e*

$$S(f(x^*)) = -f'''(x^*) - \frac{3}{2}(f''(x^*))^2.$$

Para $f'(x^*) = -1$ valem as seguintes afirmações:

(i) Se $S(f(x^*)) < 0$, então x^* será assintoticamente estável.

(ii) Se $S(f(x^*)) > 0$*, então* x^* *será instável.*

5 Órbitas periódicas

Começaremos esta seção apresentando a definição de ponto periódico.

Definição 5. *Ao considerarmos a equação*

$$x(n+1) = f(x(n)), \tag{14}$$

e sendo p *um ponto no domínio de* f*, temos que:*

(i) o ponto p *é um ponto periódico de* f *se para algum inteiro* $k \in \mathbb{Z}_+$*, tem-se que* $f^k(p) = p$*. Nestas condições,* p *é dito ponto k-periódico se for ponto fixo de* f^k*, ou seja, se for um ponto de equilíbrio da equação*

$$x(n+1) = g(x(n)), \tag{15}$$

sendo $g = f^k$*.*

Usualmente denominamos por k-ciclo a órbita de p*,* $O(p) = \{p, f(p), f^2(p), \ldots, f^{k-1}(p)\}$*.*

(ii) p *é dito ponto eventualmente k-periódico se para algum* $m \in \mathbb{Z}_+$*,* $f^m(p)$ *for um ponto k-periódico, ou seja, se*

$$f^{m+k}(p) = f^m(p).$$

Um ponto k-periódico, geometricamente, é a abscissa do ponto onde o gráfico de f^k intersecta a bissetriz dos quadrantes ímpares.

Segue a definição para análise da estabilidade dos pontos periódicos.

Definição 6. *Seja* p *um ponto k-periódico de* f*. O ponto* p *é dito:*

(i) estável, se for ponto fixo estável de f^k*.*

(ii) assintoticamente estável, se for um ponto fixo assintoticamente estável de f^k*.*

(iii) instável, se for ponto fixo instável de f^k.

Exemplo 7. *Dada a equação de diferenças*

$$3x_{n+1} + 2x_n^2 - 9x_n - 8 = 0$$

temos que $x_{n+1} = f(x_n)$, *em que*

$$f(x) = \frac{8 + 9x - 2x^2}{3.}$$

Como os pontos 2-periódicos são pontos fixos de $f^2(x) = f(f(x))$, *temos que resolver a equação* $f^2(p) = p$ *e teremos, ao simplificar,*

$$8x^4 - 72x^3 + 152x^2 + 72x - 160 = 0$$

e pode ser ainda mais simplificado ao dividirmos por 8 *e teremos:*

$$x^4 - 9x^3 + 19x^2 + 9x - 20 = 0.$$

Como o termo independente é 20, *se o polinômio tiver raízes racionais, estas serão os divisores positivos e negativos de* 20, *então, temos que* -1, 1, 4 *e* 5 *são as raízes do polinômio. Como o ponto fixo de uma função* f *é, também, ponto fixo de* f^2, *podemos retirar* -1 *e* 4 *e os pontos* 1 *e* 5 *serão os 2-ciclos de* f.

Teorema 9. *Seja* f *uma função continuamente diferenciável e*

$$O(p) = \{b = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}\}$$

um k*-ciclo de* f. *O* k*-ciclo* $O(p)$ *é:*

(i) assintoticamente estável se $|f'(x_0)f'(x_1)\cdots f'(x_{k-1})| < 1$.

(ii) instável se $|f'(x_0)f'(x_1)\cdots f'(x_{k-1})| > 1$.

Demonstração. Suponha-se que f é uma função continuamente diferenciável e $O(p)$ é um k-ciclo de f. Pela regra da cadeia, temos que:

$$
\begin{aligned}
[f^k(x_0)]' &= [f(f^{k-1}(x_0))]' = f'(f^{k-1}(x_0))[f^{k-1}(x_0)]' \\
&= f'(x_{k-1})f'(f^{k-2}(x_0))[f^{k-2}(x_0)]' \\
&= f'(x_{k-1})f'(x_{k-2})f'(f^{k-3}(x_0))[f^{k-3}(x_0)]' \\
&\vdots \\
&= f'(x_{k-1})f'(x_{k-2})\cdots f'(x_1)f'(x^0).
\end{aligned}
$$

Pelo Teorema 6 vem que se $|f'(x_0)f'(x_1)\cdots f'(x_{k-1})| < 1$, então $p = x_0$ é um ponto fixo assintoticamente estável de f^k, ou seja, o k-ciclo $O(p)$ é assintoticamente estável. Se $|f'(x_0)f'(x_1)\cdots f'(x_{k-1})| > 1$ conclui-se que o k-ciclo $O(p)$ é instável. $\square$

6 Considerações Finais

Explicitar soluções de uma dada equação nem sempre é possível, embora sua aplicação esteja presente em várias áreas exatas e não-exatas no cotidiano. Esse é o caso das equações de diferenças.

Visto isso, é válido todo método que permita o estudo qualitativo dessas soluções. Apresentamos, então, o estudo da estabilidade das equações de diferenças autônomas de primeira ordem de forma que se abordou diversos conceitos de diferentes âmbitos da Matemática para analisar seu comportamento.

Referências

[1] Fabrício Raimundo Fernandes. Equações de diferenças de 1^a ordem e suas aplicações. Master's thesis, Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo., 2015.

[2] Michel Gunella. Equações de diferenças - dinâmica cobweb e ajustes adaptados. Master's thesis, Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2017.

[3] Rafael Domingos Garanito Luís. Equações de diferenças e aplicações. Master's thesis, Universidade da Madeira, Funchal, 2006.

[4] Letícia Faleiros Chaves Rodrigues. Estabilidade de equações de diferenças quase lineares. Master's thesis, Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2013.

[5] Tarcis A. O. Santos. Sistemas dinâmicos discretos: uma introdução através da modelagem. mathesis, Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Cuiabá, 2017. Programa de Pós-Graduação em Matemática.

[6] Valentim Lopes Velasco. O modelo dinâmico de teia de aranha e a expectativa. *Revista de Estatística*, vol. 1:p. 111 – 139, 1998. Lisboa, Portugal.

[7] Érica das Graças Ferreira. Estabilidade de equações de diferenças autônomas de primeira ordem. Technical report, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, February 2018.