Revista de Matemática da UFOP
ISSN: 2237-8103

Modelagem Matemática da Dinâmica de Crescimento por Splines Hermitianos

Oscar Antonio Gonzales Chong oscarchong@unemat-net.br
Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas - UNEMAT, Sinop, MT, Brazil

Rogério dos Reis Gonçalves rogeriogoncalves@unemat.br
Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas - UNEMAT, Sinop, MT, Brazil

Chiara Maria Seidel Luciano chiara@unemat-net.br
Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas - UNEMAT, Sinop, MT, Brazil

Marister Lopetegui Canel mlopetegui69@gmail.com
Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas - UNEMAT, Sinop, MT, Brazil

Resumo

Este trabalho apresenta uma construção de splines hermitianos de grau 1 e 2. Foram comparados os resultados obtidos nesta metodologia e a empregada com outros modelos, tais como o logístico (Verhulst) e o spline cúbico natural. Estes modelos foram aplicados no estudo da evolução populacional das cidades de Pirapora/MG e Ilha Solteira/SP, bem como, no crescimento da cana-de-açúcar. Os resultados encontrados utilizando os splines hermitianos apresentaram estimativas mais precisas, mostrando-se mais eficientes.

Palavras-chave

Modelagem Matemática, Splines Hermitianos, Crescimento Populacional.

1 Modelo Matemático Proposto

Em linhas gerais, a implementação de convenientes modelos matemáticos que simulem a evolução de populações é fundamental para planejamentos eficientes. Em se tratando do estudo desse fenômeno, é possível destacar os modelos clássicos, tais como de Matlhus e Verhulst, que descrevem para tempo contínuo a dinâmica populacional. No entanto, outros métodos podem ser incorporados. Neste trabalho utilizaremos a interpolação por splines hermitianos de grau 1 e 2.

2 Splines Hermitianos de Grau 1 e 2

Considere $\{t_1, t_2, ..., t_n\}$ uma partição no intervalo $[a, b]$, tal que $t_1 = a$, $t_2 = t_1 + h_1$, $t_3 = t_2 + h_2$, ... , $t_n = t_{n-1} + h_{n-1} = b$ e seja $\{H_1(t), H_2(t), \ldots, H_n(t)\}$ um conjunto gerador para o espaço $P_n(\mathbb{R}) = \{a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0;\, t \in [a, b],\, a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}$.

Para cada $t \in [t_i, t_{i+1}]$, define-se o spline hermitiano $S(t)$ de grau 1 conforme a equação (1).

$$S(t) = P(t_i)H_1(t) + P(t_{i+1})H_2(t) + P'(t_i)H_3(t) + P'(t_{i+1})H_4(t) \quad (1)$$

em que $P(t)$ representa a população no instante t.

Consideraremos como geradores do espaço vetorial $P_3(\mathbb{R})$ os polinômios $H_1(t)$, $H_2(t)$, $H_3(t)$ e $H_4(t)$, citados em [2]. Cada polinômio está representado na equação (2).

$$\left.\begin{aligned}
H_1(t) &= \frac{t_{i+1}-t}{h_i} + \frac{(t-t_i)(t_{i+1}-t)}{h_i^2} - \frac{2(t-t_i)^2(t_{i+1}-t)}{h_i^3}\\
H_2(t) &= \frac{t-t_i}{h_i} + \frac{(t-t_i)(t_{i+1}-t)}{h_i^2} + \frac{2(t-t_i)^2(t_{i+1}-t)}{h_i^3}\\
H_3(t) &= \frac{(t-t_i)(t_{i+1}-t)}{h_i} - \frac{(t-t_i)^2(t_{i+1}-t)}{h_i^2}\\
H_4(t) &= \frac{(t-t_i)(t_{i+1}-t)}{h_i} + \frac{(t-t_i)(t_{i+1}-t)^2}{h_i^2}
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Em se tratando do Spline Hermitiano de grau 2, define-se a função $S(t)$ conforme equação (3).

$$\begin{aligned}S(t) = P(t_i)H_1(t) + P(t_{i+1})H_2(t) + P'(t_i)H_3(t) + P'(t_{i+1})H_4(t) +\\ P''(t_i)H_5(t) + P''(t_{i+1})H_6(t)\end{aligned} \tag{3}$$

Os polinômios $H_1(t), \ldots, H_6(t)$, geradores do espaço vetorial $P_5(\mathbb{R})$, estão definidos na equação (4).

$$\left.\begin{aligned}
H_1(t) &= \frac{2L_6(t)-4L_7(t)}{h_i^5} + \frac{L_3(t)}{h_i^4} + \frac{3L_5(t)+L_4(t)}{h_i^3} - \frac{2L_2(t)}{h_i^2} + \frac{L_0(t)}{h_i}\\
H_2(t) &= \frac{1}{2}\left(\frac{11L_7(t)-L_6(t)}{h_i^5} - \frac{5L_3(t)}{h_i^4} + \frac{L_4(t)-3L_5(t)}{h_i^3} + \frac{L_2(t)}{h_i^2} + \frac{2L_1(t)}{h_i}\right)\\
H_3(t) &= \frac{4L_6(t)+L_7(t)}{h_i^4} - \frac{2L_3(t)}{h_i^3} + \frac{L_5(t)}{h_i^2}\\
H_4(t) &= -\frac{L_6(t)+4L_7(t)}{h_i^4} + \frac{2L_3(t)}{h_i^3} - \frac{L_4(t)}{h_i^2}\\
H_5(t) &= \frac{1}{2}\frac{L_6(t)}{h_i^3}\\
H_6(t) &= \frac{1}{2}\frac{L_7(t)}{h_i^3}
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

onde,

$$L_0(t) = (t_{i+1} - t)$$
$$L_1(t) = (t - t_i)$$
$$L_2(t) = (t_{i+1} - t)(t - t_i)$$
$$L_3(t) = (t_{i+1} - t)^2(t - t_i)^2$$
$$L_4(t) = (t_{i+1} - t)(t - t_i)^2$$
$$L_5(t) = (t_{i+1} - t)^2(t - t_i)$$
$$L_6(t) = (t_{i+1} - t)^3(t - t_i)^2$$
$$L_7(t) = (t_{i+1} - t)^2(t - t_i)^3$$

Com a caracterização do Polinômio Interpolador, passamos às análises das metodologias utilizadas em [4], [3] e [5] comparadas à nossa proposta.

2.1 Spline Hermitiano de Grau 1 x Metodologia Utilizada por [4]

Em [4], o modelo logístico foi descartado. Em particular, a população máxima p_m suportada pelo meio mostrou-se menor que a população em certo ano. Diante disso, os autores utilizaram o spline cúbico natural. Neste trabalho, utilizamos a proposta apresentada em [1] para estimar p_m (população máxima para a inflexão da curva logística), considerando que de 1970 a 1990, o crescimento foi basicamente Malthusiano e a mudança a Verhurst começa no ano de 1990. Os dados utilizados em [4] são apresentados na Tabela 1.

Tabela 1: Dados populacionais do município de Pirapora/MG.

Ano (x)	População (y)
1970	20282
1980	32673
1990	46100
1991	46351
1996	48291
2000	50300
2007	51636
1970	53368

Ressaltamos que na construção do modelo em [4], foi considerado um passo de 10 anos, a partir de 1970. Os anos 1991, 1996 e 2007 foram considerados para verificar sua eficiência. Optamos em seguir o mesmo processo.

Aplicamos o método de Ford-Walford (ponto fixo) para assim obter $p_m = 61671$. Foram considerados os pontos $(46100, 50300)$ e $(50300, 53368)$. Considerando-se a taxa de crescimento r como a média das taxas entre 1990-2000 e 2000-2010, obtivemos $r = 0,076$.

A construção dos splines hermitianos de grau 1 foi feita utilizando como geradores os polinômios apresentados na equação (2). Em cada subintervalo, construímos a função spline (1) e, portanto, o polinômio interpolador no período [1970, 2010] fica definido conforme equação (5).

$$SP(t)=\begin{cases} 0; \quad t < 1970 \ \text{ ou } \ t > 2010 \\ 4,93605{\cdot}10^{10} - 7,46314{\cdot}10^{7}t + 3,76126{\cdot}10^{4}t^{2} - 6,31851t^{3};\ 1970 \leq t < 1980 \\ 2,11828{\cdot}10^{10} - 3,21658{\cdot}10^{7}t + 1,62805{\cdot}10^{4}t^{2} - 2,74664t^{3};\ 1980 \leq t < 1990 \\ -5,14680{\cdot}10^{10} + 7,69934{\cdot}10^{7}t - 3,83927{\cdot}10^{4}t^{2} + 6,38150t^{3};\ 1990 \leq t < 2000 \\ -5,96278{\cdot}10^{10} + 8,96475{\cdot}10^{7}t - 4,49270{\cdot}10^{4}t^{2} + 7,50510t^{3};\ 2000 \leq t < 2010 \end{cases} \tag{5}$$

A Tabela 2 apresenta a estimativa do número de habitantes da cidade de Pirapora, utilizando ambas as metodologias, nos anos 1991, 1996 e 2007.

Tabela 2: Estimativa do número de habitantes de Pirapora/MG usando a metodologia baseada em [4] e o spline hermitiano de grau 1.

Ano	1991	1996	2007
População Oficial	46351	48291	51636
Metodologia baseada em [4]	46935	49360	52345
Spline Hermitiano de grau 1	46831	48655	52346

Os erros relativos utilizando a metodologia baseada em [4] nestes anos foram 1,26%, 2,21% e 1,37%, respectivamente. Aplicando o spline hermitiano de grau 1, os erros foram de 1,12%, 0,90% e 1,37%, respectivamente.

Em [4] os autores estimaram a população até 2019 e compararam os resultados com os dados oficias disponibilizados pelo IBGE, supondo que a taxa de crescimento e p_m são conhecidas. Note-se pela Tabela 3 que foram incluídos os resultados obtidos pelo spline hermitiano de grau 1, apresentando erro relativo menor que a metodologia baseada em spline cúbico. Ressalta-se que nossa metodologia utilizou-se dos mesmos parâmetros.

Tabela 3: Estimativa do número de habitantes de Pirapora/MG e Erro Percentual comparando a metodologia aplicada por [4] e o spline hermitiano de grau 1.

Ano	População oficial	Spline cúbico	Erro relativo	Spline de grau 1	Erro relativo
2011	54215	53712	0,94 %	53849	0,67 %
2012	54449	54054	0,73 %	54216	0,42 %
2013	54672	54391	0,52 %	54495	0,32 %
2014	54885	54721	0,30 %	54708	0,32 %
2015	55089	55043	0,08 %	54882	0,37 %
2016	55285	55353	0,12 %	55040	0,44 %
2017	55475	55651	0,32 %	55207	0,48 %
2018	55658	55932	0,49 %	55407	0,44 %
2019	55836	56196	0,64 %	55666	0,30 %
Erro Médio			0,45 %		0,42 %

2.2 Spline Hermitiano de Grau 2 x Metodologia Utilizada por [3]

O trabalho [3] analisou a evolução populacional do Município de Ilha Solteira/SP entre os anos 1990 e 2000, baseado nos modelos clássicos. Na aplicação do nosso modelo utilizamos os parâmetros p_m e r calculados pelos autores, estando assim em condições idênticas com relação ao modelo logístico. Usamos os dados de 3 anos para construir apenas dois splines hermitianos, a saber, 1990, 1995 e 2000, isto é, intervalos de 5 anos. Aplicamos spline hermitiano de grau 2, ou seja, com polinômios de grau 5, pertencentes a $C^2[1990, 2000]$. A função que descreve esta situação é dada pela equação (6).

$$SP(t)=\begin{cases} 0; \quad t<1990 \quad \text{ou} \quad t>2000 \\ 3,35262{\cdot}10^{15}-8,39203{\cdot}10^{12}t+8,40252{\cdot}10^{9}t^{2}-4,20651{\cdot}10^{6}t^{3}+ \\ \qquad\qquad 1,05294{\cdot}10^{3}t^{4}-0,10542t^{5}; \quad 1990\leq t\leq 1995 \\ 2,97590{\cdot}10^{15}-7,46774{\cdot}10^{12}t+7,49585{\cdot}10^{9}t^{2}-3,76203{\cdot}10^{6}t^{3}+ \\ \qquad\qquad 9,44045{\cdot}10^{2}t^{4}-0,09476t^{5}; \quad 1995\leq t\leq 2000 \end{cases} \tag{6}$$

A Tabela 4 estima o número de habitantes e o erro relativo apresentado em cada um dos modelos. Percebe-se que a metodologia baseada nos splines hermitianos de grau 2 mostrou-se mais eficaz quando comparado à metodologia proposta em [3].

Tabela 4: Estimativa do número de habitantes de Ilha Solteira/SP e Erro Percentual comparando a metodologia utilizada por [3] e spline de grau 2.

Ano	População Real	Modelo Logístico baseado em [3]	Erro relativo	Spline de grau 2	Erro relativo
1991	21852	21859	0,03 %	21874	0,10 %
1992	22090	22107	0,08 %	22112	0,09 %
1993	22330	22359	0,12 %	22344	0,06 %
1994	22573	22612	0,17 %	22582	0,04 %
1995	22819	22869	0,21 %	22796	0,01 %
1996	23067	23129	0,13 %	23052	0,19 %
1997	23318	23391	0,31 %	23304	0,06 %
1998	23572	23657	0,36 %	23548	0,10 %
1999	23828	23925	0,44 %	23800	0,07 %
Erro Médio			0,21 %		0,09 %

2.3 Spline Hermitiano de Grau 2 x Metodologia Utilizada por [5]

Neste trabalho foi simulado a crescimento da cana-de-açúcar no período de 90 a 210 dias. As alturas, em cm, para cada período considerado, estão representadas na Tabela 5.

Em [5] os autores determinaram $a = f(t)$ aplicando a interpolação por spline cúbico natural, usando na sua construção as alturas nos dias

90, 130, 170 e 210, com passo de 40 dias, e deixaram para verificar 120, 150 e 180 a fim de obter os erros relativos.

Tabela 5: Crescimento da cana-de-açúcar com adubação e sem revestimento de polímeros.

Tempo (dias)	90	120	130	150	170	180	210
Altura (cm)	27,14	34,60	38,72	46,40	49,98	53,20	77,30

Nossa proposta para analisar este crescimento foi por meio do spline hermitiano de grau 2. Notamos que o crescimento neste caso é médio; devagar no início do período e depois de 40 dias aumenta o rítmo paulatinamente. Esse crescimento apresenta um comportamento tipo Von Bertalanfly, cuja equação diferencial está representada na equação (7),

$$\frac{d}{dt}p(t) = 3rp_0\left(1 - p(t)^{1/3}\right) \tag{7}$$

onde o valor inicial é dado por $p_0 = p(90) = 27,14$.

A solução geral desta equação diferencial pode ser expressa em (8).

$$p(t) = (1 + Be^{-r(t-to)})^3 \tag{8}$$

A função $p(t)$ foi linearizada conforme mostrado em (9).

$$\log\left(\frac{1}{p^{-1/3} - 1}\right) = rt + c \tag{9}$$

Aplicando o método dos mínimos quadrados, determinamos os parâmetros $r = 0,00394$ e $c = -0,6966$. Assim, $B = 2,007$, onde $B = e^{-c}$. Aplicando o spline hermitiano de grau 2, obtemos em cada nó as funções $p(t)$, $p'(t)$ e $p''(t)$.

A Tabela 6 apresenta os valores dos erros relativos e médio de cada um dos métodos. Note que o modelo de Von Bertalanfly possui erro médio menor do que ao encontrado usando a metodologia utilizada por [5]. No entanto, este erro foi bem menor quando aplicado o método spline

Tabela 6: Erros relativo e médio no crescimento da cana-de-açúcar utilizando os três métodos.

Dias de controle	120	150	180	Erro Médio
Altura dos dias de controle	34,60	46,40	53,20	
Altura pelo spline cúbico	36,52	42,90	54,83	
Erro relativo - spline cúbico	5,26 %	7,54 %	2,97 %	5,25 %
Altura por Von Bertalanfly	34,61	44,46	57,59	
Erro relativo - Von Bertalanfly	0,05 %	4,17 %	8,26 %	4,26 %
Altura por spline hermitiano de grau 2	34,56	44,22	54,07	
Erro relativo - spline hermitiano de grau 2	0,09 %	4,69 %	1,63 %	2,14 %

hermitiano de grau 2.

3 Conclusão

A metodologia baseada na construção dos splines hermitianos de grau 1 e 2 representa adequadamente a evolução populacional das cidades de Pirapora/MG, Ilha Solteira/SP e do crescimento da cana-de-açúcar. Os splines hermitianos de grau 1 e 2 mostraram-se mais adequados para apresentar estimativas, quando comparados com os modelos clássicos e os splines cúbicos naturais utilizados em [4], [3] e [5].

Uma das vantagens da elaboração de modelos baseados na construção de splines hermitianos é que eles permitem que a correção dos erros seja feita localmente. Em contrapartida, esta vantagem não se apresenta nos modelos propostos por [4], [3] e [5].

Referências

[1] Rodney Carlos Bassanezi. *Modelagem Matemática, teoria e prática*. Contexto, 2015.

[2] Oscar Antonio Gonzalez Chong. Aplicação de método em retrocesso para contornar a instabilidade de equações diferenciais de crescimento de população. In *congreso latino americano de biomatemática, Xalab-Velaem*, pages 91–95, campinas, São Paulo, 2002.

[3] Aline Jardim da Silva and Luiz Carlos Facundo Sanches. Aplicação de equações diferenciais no estudo da dinâmica populacional de

ilha solteira. In *Anais do Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional (XXXIII CNMAC)*, volume 3, Águas de Lindóia, São Paulo, Brasil, September 2010.

[4] José Sérgio Domingues, Marcela Carvalho Gonçalves, Suélem Costa Braz, and Flávio Júnio Pereira. Usando splines cúbicas na modelagem matemática da evolução populacional de pirapora/mg. *ForScience.: r. cient. IFMG, Campus Formiga*, 2(1):17–30, January 2014.

[5] Isabella Barbosa Menezes, Marco Aparecido Queiroz Duarte, Willian Carvalho da Silva, Hamilton Kikuti, and Nadia Rodrigues Nogueira. Interpolação spline usada no cálculo do crescimento da cana de açúcar. *Revista OMNIA Exatas*, 3(1):17–25, 2010.